УДК 519.6

Вычисление производных дробного порядка с высокой степенью точности

Волосова Н.К., аспирант
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, г. Москва
Волосов К.А., д.ф.-м.н., профессор; Волосова А.К., к. ф.-м. н.
МИИТ, г. Москва
Пастухов Д.Ф., к. ф.-м. н., доц.; Пастухов Ю.Ф., к. ф.-м. н., доц.
Полоцкий государственный университет

В работе рассмотрена задача вычисления производной дробного порядка с высокой степенью точности. Получен алгоритм вычисления производной дробного порядка с квадратурной формулой Гаусса на трех узлах (с двойной относительной точностью 15-16 значащих цифры).

Ключевые слова: *численное интегрирование функций с особенностями, численные методы, гамма-функция, ортогональные полиномы.*

Calculation of the derived fractional order with high degree of accuracy

Volosova N.K., Volosov K.A., Volosova A.K., Pastuhov D.F., Pastuhov Y.F.

Введение. Дробные производные появляются в новых научных исследованиях. Так, в монографии[4] Нахушев А.М. показал, что поток газа Трикоми на звуковой линии прямо пропорционален дробной производной с порядком 2/3 от функции тока. В работе[5] А.Н. Корчагиной рассмотрено уравнение диффузии, в котором временная и пространственная производные имеют дробный порядок 0<γ<2 и 1<α< 2 соответственно. Если 0<γ<1, то реализуется субдиффузия, при γ=1 – обычная классическая диффузия, при 1<γ<2 – происходит супердиффузия. Если γ=2 получаем классическое волновое уравнение. При γ=α=1 уравнение диффузии переходит в уравнение переноса. В работе[3] рассмотрено уравнение Пуассона дробного порядка. В связи с этим представляют интерес нелинейные и квазилинейные уравнения дробного порядка[8-13], использование уравнений эллиптического и гиперболического типов с частными производными дробного порядка[15-22]. В данной работе получен алгоритм вычисления дробных производных с квадратурной формулой Гаусса с тремя узлами с предельной двойной точностью(15-16 верных значащих цифр).

Постановка задачи

Рассмотрим задачу численного нахождения производной дробного положительного порядка.

Определение 1. Частной производной дробного порядка α>0 Капуто-Герасимова от функции двух переменных u(x,t)[3,стр.13] называется функция

$$\left(D^{\alpha}_{0+,t}u\right)(x,t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t\frac{\partial^n u(x,\tau)}{\partial\tau^n}\frac{d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}},\ n=[\alpha]+1, n\in N,\alpha\in R \tag{1}$$

Запишем обыкновенную производную дробного порядка Капуто-Герасимова для случая $0<\alpha<1$

$$\left(D^{\alpha}_{0+,t}u\right)(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{du(\tau)}{d\tau}\frac{d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}},\ n=1, 0<\alpha<1 \tag{2}$$

Где в формулах (1),(2) гамма-функции определяется интегралом

Определение 2(гамма-функция комплексного аргумента z).

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}t^{z-1}e^{t}dt, z\in C, \mathrm{Re}(z)>0 \tag{3}$$

Например, используя свойства гамма-функции, можно вычислить для половинного аргумента $\Gamma\left(\frac{21}{2}\right)$ точно $\Gamma\left(\alpha=\frac{21}{2}\right)=\frac{19}{2}\cdot\frac{17}{2}\cdot\frac{15}{2}\cdot\frac{13}{2}\cdot\frac{11}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{19!!}{2^{10}}\sqrt{\pi}\approx 1133278{,}3889488$.

В численных методах уже известны алгоритмы вычисления гамма-функции. Например, из математической библиотеки dfimsl компилятора FORTRAN подпрограмма $dgamma(\alpha)$ вычисляет гамма-функцию с двойной точностью. Рассмотрим производную дробного порядка Капуто-Герасимова для случая $0<\alpha<1$ по формуле(2). Внутренней операцией в (2) является вычисление первой производной в точке τ , внешней - взятие интеграла с сингулярным интегральным ядром $K(\tau,t)=\dfrac{1}{(t-\tau)^{\alpha}}$ в точке $\tau\to t$. Отметим, что из-за сингулярности невозможно использовать квадратурную интегральную формулу с равномерным шагом и узловым значением функции $\lim\limits_{\tau\to t}\dfrac{u^{'}(t)}{(t-\tau)^{\alpha}}$ в точке $\tau\to t$. Далее отдельно с точностью до множителя $\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}$ разобьем интеграл(2) на два слагаемых. Интеграл и производную на левом отрезке[0,b] аппроксимируем с высоким 10-м порядком погрешности. А на отрезке[b,t] запишем квадратурную формулу Гаусса с весовой функцией $\rho(\tau)=K(\tau,t)=\dfrac{1}{(t-\tau)^{\alpha}}\geq 0$ с тремя узлами, не совпадающими с узлами равномерной сетки. В последнем интеграле сделаем замену переменной $z\Big|_{t-b}^{0}=t-\tau\Big|_{b}^{t},dz=-d\tau$

$$I(u(t))\equiv\int_0^t\frac{u^{'}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}=\int_0^b\frac{u^{'}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}+\int_b^t\frac{u^{'}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}=\int_0^b\frac{u^{'}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}-\int_{t-b}^0\frac{u^{'}(t-z)dz}{z^{\alpha}}=\int_0^b\frac{u^{'}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}+\int_0^{t-b}\frac{u^{'}(t-z)dz}{z^{\alpha}}\qquad(4)$$

Производную в формуле(4) можно заменить центральной производной с 10-м порядком погрешности и равномерным шагом независимо от вычисления интегралов. Из формулы (4) следует, что функция $u(t)\in KC^{1}[0,t]$, то есть функция $u(t)$ непрерывна, кусочно-гладкая, но тогда $\exists I(u(t))\ \forall 0<\alpha<1$ в формуле(14).

Лемма 1. Первая центральная производная функции $u^{'}(0)$ с десятым порядком погрешности на равномерной сетке имеет вид

$$u^{'}(0)=\frac{1}{h}\left(\frac{5}{6}(u_1-u_{-1})-\frac{5}{21}(u_2-u_{-2})+\frac{5}{84}(u_3-u_{-3})-\frac{5}{504}(u_4-u_{-4})+\frac{1}{1260}(u_5-u_{-5})\right)+O(h^{10})\qquad(5)$$

Доказательство. Формулу(5) построим методом неопределенных коэффициентов. Известно, что центральная производная со вторым порядком погрешности имеет вид $u^{'}(0)=\dfrac{(u_1-u_{-1})}{2h}+O(h^2)$. По аналогии построим квадратурную формулу на 10 симметричных узлах, расположенных левее и правее центрального.

$$u^{'}(0)=\frac{1}{h}\big(C_1(u_1-u_{-1})+C_2(u_2-u_{-2})+C_3(u_3-u_{-3})+C_4(u_4-u_{-4})+C_5(u_5-u_{-5})\big)\qquad(6)$$

Формула(6) дает $u^{'}(0)=0$ для константы $u(x)\equiv 1$, меняет знак при обращении направления координатной оси, по аналогии с $u(x)\equiv x,u^{'}(x)=1,u(-x)\equiv -x,u^{'}(-x)=-1$. Используя координатные функции $u(x)=\{x,x^3,x^5,x^7,x^9\}$, получим коэффициенты C_1,C_2,C_3,C_4,C_5. Формула(6) для четных степеней даст тривиальное тождество 0=0 в точке $x=0$, которые мы опустим.

$$\begin{cases}u(x)=x:u^{'}(0)=1=\dfrac{1}{h}(2hC_1+4hC_2+6hC_3+8hC_4+10hC_5)\Leftrightarrow 2C_1+4C_2+6C_3+8C_4+10C_5=1\\ u(x)=x^3:u^{'}(0)=3x^2\Big|_{x=0}=0=\dfrac{h^3}{h}(2C_1+16C_2+54C_3+128C_4+250C_5)\Leftrightarrow C_1+8C_2+27C_3+64C_4+125C_5=0\\ u(x)=x^5:u^{'}(0)=0=\dfrac{h^5}{h}(2C_1+64C_2+486C_3+2048C_4+6250C_5)\Leftrightarrow C_1+32C_2+243C_3+1024C_4+3125C_5=0\\ u(x)=x^7:u^{'}(0)=0=\dfrac{h^7}{h}(2C_1+256C_2+4374C_3+32768C_4+156250C_5)\\ u(x)=x^9:u^{'}(0)=0=\dfrac{h^9}{h}(2C_1+1024C_2+39366C_3+524288C_4+3906250C_5)\end{cases}$$

Получим линейную неоднородную систему уравнений(7) с неизвестными C_1,C_2,C_3,C_4,C_5 с единственным решением. Отметим, что мы использовали (с учетом четности) 11 координатных функций включительно по x^{10} . Тогда числитель формулы(6),(5) имеет погрешность $O(h^{11})$, а формула(5) $O(h^{10})$.

$$\begin{cases}2C_1+4C_2+6C_3+8C_4+10C_5=1\\ C_1+8C_2+27C_3+64C_4+125C_5=0\\ C_1+32C_2+243C_3+1024C_4+3125C_5=0\\ C_1+128C_2+2187C_3+16384C_4+78125C_5=0\\ C_1+512C_2+19683C_3+262144C_4+1953125C_5=0\end{cases}\Leftrightarrow C_1=\frac{5}{6},C_2=-\frac{5}{21},C_3=\frac{5}{84},C_4=-\frac{5}{504},C_5=\frac{1}{1260}\qquad(7)$$

Лемма 1 доказана, так как при подстановке коэффициентов C_1,C_2,C_3,C_4,C_5 из(7) в (6), получим(5).

Замечание 1. Рассмотрим производную функции $u(x)=x^{11}$ с абсолютной погрешностью для первой производной $u^{'}(1)=11,\Delta=\left|u_{num}^{'}(1)-u^{'}(1)\right|,\Delta(h=10^{-1})=1.44\cdot10^{-6},\Delta(h=5\cdot10^{-2})=1.40625\cdot10^{-9}$

$\Delta(h)/\Delta(h/2)=1.44\cdot10^{-6}/1.40625\cdot10^{-9}=1024=2^{10}$. То есть, порядок погрешности для(7) m=10.

В 2016 году[26] авторами получена интегральная квадратура с равномерным шагом и шаблоном с 10 симметричными относительно центра узлами, включая центр.

Лемма 2. Составная интегральная квадратура с равномерным шагом и точностью $O(h^{12})$ имеет вид

$$\int_a^b u(x)dx = 5h\sum_{i=0}^{n} C_i u(x_i) + O(h^{12}), n = 10m, h = \frac{b-a}{n}, m \in N \text{, где} \tag{8}$$

$$C_i = \begin{cases} \frac{16067}{299376}, i = 0 \vee i = n \\ \frac{16067}{149688}, (i \equiv 0 \bmod 10) \wedge (0 < i < n) \\ \frac{26575}{74844}, (i \equiv 1 \bmod 10) \vee (i \equiv 9 \bmod 10) \\ \frac{-16175}{99792}, (i \equiv 2 \bmod 10) \vee (i \equiv 8 \bmod 10) \\ \frac{5675}{6237}, (i \equiv 3 \bmod 10) \vee (i \equiv 7 \bmod 10) \\ \frac{-4825}{5544}, (i \equiv 4 \bmod 10) \vee (i \equiv 6 \bmod 10) \\ \frac{17807}{12474}, i \equiv 5 \bmod 10 \end{cases} \tag{9}$$

Доказательство формул(8),(9) получено в работе[26]. Непосредственно проверим точность алгоритма(8),(9) для вычисления интеграла $I = \int_0^1 14x^{13}dx = 1$ с абсолютной погрешностью $\Delta_n = |I_{num}(n) - I|$.

$\Delta_{n=30} = |I_{num}(n=30) - I| = 3.3778535 \cdot 10^{-11}, \Delta_{n=60} = |I_{num}(n=60) - I| = 7.3247 \cdot 10^{-15}$

$\Delta_{n=30} / \Delta_{n=60} = 3.3778535 \cdot 10^{-11} / 7.3247 \cdot 10^{-15} \approx 4611 > 4096 = 2^{12}$ - с порядком m=12для (8),(9).

Рассмотрим действие композиции производной функции и интеграла на простом примере с использованием алгоритмов(5) и(8),(9). Пусть $u(x) = x^{15}$, тогда $u'(x) = 15x^{14}$ и

$$I(t) = \int_0^t u'(\tau)d\tau = \int_0^t 15\tau^{14}d\tau = \tau^{15}\Big|_0^t = t^{15}, t = 1, I(1) = \int_0^1 u'(\tau)d\tau = 1$$

Программа с использованием алгоритмов(5) и(8),(9) для последнего примера даёт абсолютную погрешность $\Delta_n = |I_{num}(n) - I|, \Delta_{30} = |I_{num}(n=30) - I| = 1.167193 \cdot 10^{-10}, \Delta_{60} = |I_{num}(n=60) - I| = 8.10463 \cdot 10^{-14}$

$\Delta_{n=30} / \Delta_{n=60} = 1.647193 \cdot 10^{-10} / 8.10463 \cdot 10^{-14} \approx 2032 (2^{10} < 2032 < 2^{11})$

Данный пример подтверждает, что порядок аппроксимации композиции функций равен наименьшему из порядков[1]. Алгоритм(5) и(8),(9) на равномерной сетке мы используем для вычисления первого слагаемого в формуле(4) $I_1 = \int_0^b \frac{u'(\tau)d\tau}{(t-\tau)^\alpha}$. Для вычисления второго интеграла в (4) $\int_0^{t-b} \frac{u'(t-z)dz}{z^\alpha}$ рассмотрим вспомогательный интеграл $I_2 = \int_0^{t-b} \frac{u(t-z)dz}{z^\alpha}$, затем добавим под аргумент функции параметр a:

$$I_2(b,t,a,\alpha) = \int_0^{t-b} \frac{u(t+a-z)dz}{z^\alpha} \tag{10}$$

Параметр a в программе принимает значения $a = \{-5h, -4h, -3h, -2h, -h, h, 2h, 3h, 4h, 5h\}$ и используется для вычисления центральной производной в интеграле(4). Далее для неотрицательной весовой функции $\rho(z) = \frac{1}{z^\alpha} \geq 0$ на отрезке $[0, t-b]$ нужно найти квадратурную формулу Гаусса [2,стр.45] с тремя узлами.

Теорема 1. Пусть функция $u(t) \in KC^1[0,t]$. Тогда квадратура Гаусса с тремя узлами для интеграла (4) с неотрицательной весовой функцией $\rho(z) = \frac{1}{z^\alpha} \geq 0, z \in [0, t-b]$ имеет вид

$$\int_0^{t-b} \frac{u(t+a-z)dz}{z^\alpha} = C_1 u(x_1) + C_2 u(x_2) + C_3 u(x_3) + O((t-b)^6) \tag{11}$$

Где $C_1, C_2, C_3, x_1, x_2, x_3$ определяются формулами

$$C_1 = \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}\left((t+a-x_2)(t+a-x_3)\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} - (2(t+a) - x_3 - x_2)\frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} + \frac{(t-b)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)}\right)$$

$$C_2=\frac{1}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)}\left((t+a-x_3)(x_1-t-a)\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}+(2(t+a)-x_1-x_3)\frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}-\frac{(t-b)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)}\right),C_3=\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}-C_2-C_1$$

$$z_1=2\sqrt{\frac{p_1}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right)-\frac{b_1}{3},z_2=2\sqrt{\frac{p_1}{3}}\cos\left(\frac{\varphi+2\pi}{3}\right)-\frac{b_1}{3},z_3=2\sqrt{\frac{p_1}{3}}\cos\left(\frac{\varphi+4\pi}{3}\right)-\frac{b_1}{3},$$

$$x_1=t+a-z_1=t+a-2\sqrt{\frac{p_1}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right)+\frac{b_1}{3},x_2=t+a-z_2=t+a-2\sqrt{\frac{p_1}{3}}\cos\left(\frac{\varphi+2\pi}{3}\right)+\frac{b_1}{3},$$

$$x_3=t+a-z_3=t+a-2\sqrt{\frac{p_1}{3}}\cos\left(\frac{\varphi+4\pi}{3}\right)+\frac{b_1}{3},\varphi=\arccos\left(-\frac{q}{2r}\right)=\arccos\left(-\frac{\left(\frac{2}{27}\right)b_1^{\,3}-\frac{b_1c}{3}+d}{2\sqrt{\frac{p_1^{\,3}}{27}}}\right)$$

$$p_1=\frac{b_1^{\,2}}{3}-c,p=-p_1=c-\frac{b_1^{\,2}}{3},q=\left(\frac{2}{27}\right)b_1^{\,3}-\frac{b_1c}{3}+d$$

Где: b_1,c,d - коэффициенты ортогонального полинома: $P_3(z)=z^3+b_1z^2+cz+d$ с весовой функцией

$$\rho(z)=\frac{1}{z^\alpha}\geq 0,z\in[0,t-b],b_1\equiv\frac{-3(3-\alpha)(t-b)}{(6-\alpha)},c=\frac{3(2-\alpha)(3-\alpha)(t-b)^2}{(5-\alpha)(6-\alpha)},d=\frac{-(1-\alpha(2-\alpha)(3-\alpha)(t-b)^3}{(4-\alpha(5-\alpha)(6-\alpha)} \tag{12}$$

Доказательство. Согласно[2] построим ортогональный полином $z^3+b_1z^2+cz+d,z\big|_{t-b}^{0}=t-\tau\big|_{b}^{t}\geq 0$ с 3 узлами и с весовой функцией $\rho(z)=\frac{1}{(z)^\alpha}\geq 0,z\in[0,t-b]$ с системой уравнений относительно b_1,c,d:

$$\begin{cases}\int\limits_0^{t-b}\rho(z)P_3(z)dz=0\Leftrightarrow\int\limits_0^{t-b}\frac{z^3+b_1z^2+cz+d}{z^\alpha}dz=0\\ \int\limits_0^{t-b}\rho(z)P_3(z)\tau dz=0\Leftrightarrow\int\limits_0^{t-b}\frac{(z^3+b_1z^2+cz+d)z}{z^\alpha}dz=0\\ \int\limits_0^{t-b}\rho(z)P_3(z)z^2dz=0\Leftrightarrow\int\limits_0^{t-b}\frac{(z^3+b_1z^2+cz+d)z^2}{z^\alpha}dz=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{(t-b)^{4-\alpha}}{(4-\alpha)}+b_1\frac{(t-b)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)}+\frac{c(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}+\frac{d(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}=0\\ \frac{(t-b)^{5-\alpha}}{(5-\alpha)}+b_1\frac{(t-b)^{4-\alpha}}{(4-\alpha)}+\frac{c(t-b)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)}+\frac{d(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}=0\Leftrightarrow\\ \frac{(t-b)^{6-\alpha}}{(6-\alpha)}+b_1\frac{(t-b)^{5-\alpha}}{(5-\alpha)}+\frac{c(t-b)^{4-\alpha}}{(4-\alpha)}+\frac{d(t-b)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)}=0\end{cases} \tag{13}$$

Из системы уравнений(13) следуют две системы из двух уравнений (14),(15)

$$\begin{cases}\frac{(t-b)^3}{(4-\alpha)(2-\alpha)}+b_1\frac{(t-b)^2}{(3-\alpha)(2-\alpha)}+\frac{c(t-b)}{(2-\alpha)^2}+\frac{d}{(1-\alpha)(2-\alpha)}=0\\ \frac{(t-b)^3}{(5-\alpha)(1-\alpha)}+b_1\frac{(t-b)^2}{(4-\alpha)(1-\alpha)}+\frac{c(t-b)}{(3-\alpha)(1-\alpha)}+\frac{d}{(2-\alpha)(1-\alpha)}=0\end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases}\frac{(t-b)^3}{(5-\alpha)(3-\alpha)}+b_1\frac{(t-b)^2}{(4-\alpha)(3-\alpha)}+\frac{c(t-b)}{(3-\alpha)^2}+\frac{d}{(3-\alpha)(2-\alpha)}=0\\ \frac{(t-b)^3}{(6-\alpha)(2-\alpha)}+b_1\frac{(t-b)^2}{(5-\alpha)(2-\alpha)}+\frac{c(t-b)}{(4-\alpha)(2-\alpha)}+\frac{d}{(2-\alpha)(3-\alpha)}=0\end{cases} \tag{15}$$

Вычтем из второго уравнения системы(14) первое и из второго уравнения системы(15) первое, получим систему из двух уравнений (16)относительно коэффициентов b_1,c

$$\begin{cases}(t-b)^2\left(\frac{1}{(5-\alpha)(1-\alpha)}-\frac{1}{(4-\alpha)(2-\alpha)}\right)+(t-b)b_1\left(\frac{1}{(4-\alpha)(1-\alpha)}-\frac{1}{(3-\alpha)(2-\alpha)}\right)+c\left(\frac{1}{(3-\alpha)(1-\alpha)}-\frac{1}{(2-\alpha)^2}\right)=0\\ (t-b)^2\left(\frac{1}{(6-\alpha)(2-\alpha)}-\frac{1}{(5-\alpha)(3-\alpha)}\right)+(t-b)b_1\left(\frac{1}{(5-\alpha)(2-\alpha)}-\frac{1}{(4-\alpha)(3-\alpha)}\right)+c\left(\frac{1}{(4-\alpha)(2-\alpha)}-\frac{1}{(3-\alpha)^2}\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(t-b)^2\left(\frac{8-6\alpha+\alpha^2-(5-6\alpha+\alpha^2)}{(5-\alpha)(1-\alpha)(4-\alpha)(2-\alpha)}\right)+(t-b)b_1\left(\frac{6-5\alpha+\alpha^2-(4-5\alpha+\alpha^2)}{(4-\alpha)(1-\alpha)(3-\alpha)(2-\alpha)}\right)+c\left(\frac{4-4\alpha+\alpha^2-(3-4\alpha+\alpha^2)}{(3-\alpha)(1-\alpha)(2-\alpha)^2}\right)=0\\ (t-b)^2\left(\frac{15-8\alpha+\alpha^2-(12-8\alpha+\alpha^2)}{(6-\alpha)(2-\alpha)(5-\alpha)(3-\alpha)}\right)+(t-b)b_1\left(\frac{12-7\alpha+\alpha^2-(10-7\alpha+\alpha^2)}{(5-\alpha)(2-\alpha)(4-\alpha)(3-\alpha)}\right)+c\left(\frac{9-6\alpha+\alpha^2-(8-6\alpha+\alpha^2)}{(4-\alpha)(2-\alpha)(3-\alpha)^2}\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(t-b)^2\left(\frac{3}{(5-\alpha)(4-\alpha)}\right)+(t-b)b_1\left(\frac{2}{(4-\alpha)(3-\alpha)}\right)+c\left(\frac{1}{(3-\alpha)(2-\alpha)}\right)=0\\ (t-b)^2\left(\frac{3}{(6-\alpha)(5-\alpha)}\right)+(t-b)b_1\left(\frac{2}{(5-\alpha)(4-\alpha)}\right)+c\left(\frac{1}{(4-\alpha)(3-\alpha)}\right)=0\end{cases} \tag{16}$$

Аналогично из второго уравнения системы (16) умноженного на дробь $\frac{1}{(2-\alpha)}$ вычтем первое уравнение, умноженное на дробь $\frac{1}{(4-\alpha)}$, получим

$$\frac{3(t-b)}{(5-\alpha)}\left(\frac{1}{(6-\alpha)(2-\alpha)}-\frac{1}{(4-\alpha)^2}\right)+\frac{2b_1}{(4-\alpha)}\left(\frac{1}{(5-\alpha)(2-\alpha)}-\frac{1}{(4-\alpha)(3-\alpha)}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{3(t-b)}{(5-\alpha)}\left(\frac{16-8\alpha+\alpha^2-(12-8\alpha+\alpha^2)}{(6-\alpha)(2-\alpha)(4-\alpha)^2}\right)+\frac{2b_1}{(4-\alpha)}\left(\frac{12-7\alpha+\alpha^2-(10-7\alpha+\alpha^2}{(5-\alpha)(3-\alpha)(2-\alpha)(4-\alpha)}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{3(t-b)}{(5-\alpha)}\left(\frac{4}{(6-\alpha)(2-\alpha)(4-\alpha)^2}\right)+\frac{2b_1}{(4-\alpha)}\left(\frac{2}{(5-\alpha)(3-\alpha)(2-\alpha)(4-\alpha)}\right)=0\Leftrightarrow b_1=-\frac{3(t-b)(3-\alpha)}{(6-\alpha)} \tag{17}$$

Далее из первого уравнения(16) выразим коэффициент c с учетом (17)

$$c=-(3-\alpha)(2-\alpha)\left((t-b)^2\left(\frac{3}{(5-\alpha)(4-\alpha)}\right)+(t-b)b_1\left(\frac{2}{(4-\alpha)(3-\alpha)}\right)\right)=-\frac{3(3-\alpha)(2-\alpha)(t-b)^2}{(4-\alpha)}\left(\frac{1}{(5-\alpha)}-\frac{2}{(6-\alpha)}\right)=$$

$$=-\frac{3(3-\alpha)(2-\alpha)(t-b)^2}{(4-\alpha)(5-\alpha)(6-\alpha)}(-4+\alpha)=\frac{3(2-\alpha)(3-\alpha)(t-b)^2}{(5-\alpha)(6-\alpha)} \tag{18}$$

Наконец, из первого уравнения(13) выразим коэффициент d, используя коэффициенты b_1, c из(17),(18)

$$d=-(1-\alpha)\left(\frac{(t-b)^3}{(4-\alpha)}+b_1\frac{(t-b)^2}{(3-\alpha)}+\frac{c(t-b)}{(2-\alpha)}\right)=-(1-\alpha)(t-b)^3\left(\frac{1}{(4-\alpha)}-\frac{3}{(6-\alpha)}+\frac{3(3-\alpha)}{(5-\alpha)(6-\alpha)}\right)=$$

$$=-(1-\alpha)(t-b)^3\left(\frac{6-\alpha-(12-3\alpha)}{(4-\alpha)(6-\alpha)}+\frac{3(3-\alpha)}{(5-\alpha)(6-\alpha)}\right)=\frac{(1-\alpha)(3-\alpha)(t-b)^3}{(6-\alpha)}\left(\frac{2}{(4-\alpha)}-\frac{3}{(5-\alpha)}\right)=$$

$$=\frac{(1-\alpha)(3-\alpha)(t-b)^3}{(6-\alpha)}\left(\frac{10-2\alpha-(12-3\alpha)}{(4-\alpha)(5-\alpha)}\right)=-\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)(3-\alpha)(t-b)^3}{(4-\alpha)(5-\alpha)(6-\alpha)} \tag{19}$$

Таким образом, ортогональный полином 3-ей степени с учетом(37),(38),(39) имеет вид

$$P_3(z)=z^3+b_1z^2+cz+d=z^3-\frac{3(t-b)(3-\alpha)}{(6-\alpha)}z^2+\frac{3(2-\alpha)(3-\alpha)(t-b)^2}{(5-\alpha)(6-\alpha)}z-\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)(3-\alpha)(t-b)^3}{(4-\alpha)(5-\alpha)(6-\alpha)} \tag{20}$$

Корни уравнения (20) вычисляются формулой Кардано[1, стр.62], сделаем замену

$$y=z+\frac{b_1}{3},\ y^3+py+q=0,\ p=c-\frac{b_1^2}{3},\ q=\left(\frac{2}{27}\right)b_1^3-\frac{b_1c}{3}+d\,. \tag{21}$$

Фадеев Д.К.[1, стр.66] показал, что кубическое уравнение(21) имеет три различных вещественных корня, если и только если $p_1\equiv -p=\frac{b_1^2}{3}-c>0$. Проверим выполнимость этого условия.

$$p_1=\frac{b_1^2}{3}-c=\frac{3(t-b)^2(3-\alpha)}{(6-\alpha)}\left(\frac{(3-\alpha)}{(6-\alpha)}-\frac{(2-\alpha)}{(5-\alpha)}\right)=\frac{3(t-b)^2(3-\alpha)}{(6-\alpha)^2(5-\alpha)}(15-8\alpha+\alpha^2-(12-8\alpha+\alpha^2))=\frac{9(t-b)^2(3-\alpha)}{(6-\alpha)^2(5-\alpha)}>0$$

Условие выполнено $\forall 0<\alpha<1$. Обозначим

$$\cos(\varphi)=\left(-\frac{q}{2r}\right),\ r=\sqrt{\frac{p_1^3}{27}}. \tag{22}$$

Решениями уравнения $y^3+py+q=0$ являются три действительных корня[1]

$$y(\varphi)=2\sqrt{\frac{p_1}{3}}\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{3}\right),\ k=0,1,2,\ \cos(\varphi)=\left(-\frac{q}{2r}\right). \tag{23}$$

Проверим корни из(23), возведем формулу Эйлера в третью степень и возьмем действительную часть

$$e^{i3\varphi}=\cos(3\varphi)+i\sin(3\varphi)=(\cos\varphi+i\sin\varphi)^3=\cos^3\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi+i\left(3\cos^2\varphi\sin\varphi-\sin^3\varphi\right)\Rightarrow$$

$$\cos(3\varphi)=\cos^3\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi=\cos^3\varphi-3\cos\varphi\left(1-\cos^2\varphi\right)=4\cos^3\varphi-3\cos\varphi,\cos^3\varphi\Leftrightarrow\cos^3\varphi=\frac{\cos(3\varphi)+3\cos\varphi}{4} \tag{24}$$

Тогда с учетом формул (22),(24)подставим в левую часть кубического уравнения решение(23)

$$y^3+py+q=\left(2\sqrt{\frac{p_1}{3}}\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{3}\right)\right)^3+p\cdot 2\sqrt{\frac{p_1}{3}}\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{3}\right)+q=8\sqrt{\frac{p_1^3}{27}}\left(\frac{\cos(\varphi+2k\pi)+3\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{3}\right)}{4}\right)+$$

$$+p\cdot 2\sqrt{\frac{p_1}{3}}\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{3}\right)+q=\frac{2}{3}p_1\sqrt{\frac{p_1}{3}}\left(-\frac{q}{2r}\right)+q+\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{3}\right)\left(p\cdot 2\sqrt{\frac{p_1}{3}}+2p_1\sqrt{\frac{p_1}{3}}\right)=-\frac{p_1}{3}\sqrt{\frac{p_1}{3}}\frac{q}{\sqrt{\frac{p_1^3}{27}}}+q=0$$

Тогда[1]:

$$\varphi=\arccos\left(-\frac{q}{2r}\right)=\arccos\left(-\frac{\left(\frac{2}{27}\right)b_1^3-\frac{b_1c}{3}+d}{2\sqrt{\frac{p_1^3}{27}}}\right), \tag{25}$$

$$y_1 = 2\sqrt{\frac{p_1}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right), y_2 = 2\sqrt{\frac{p_1}{3}}\cos\left(\frac{\varphi+2\pi}{3}\right), y_3 = 2\sqrt{\frac{p_1}{3}}\cos\left(\frac{\varphi+4\pi}{3}\right)$$

$$z_1 = 2\sqrt{\frac{p_1}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right)-\frac{b_1}{3}, z_2 = 2\sqrt{\frac{p_1}{3}}\cos\left(\frac{\varphi+2\pi}{3}\right)-\frac{b_1}{3}, z_3 = 2\sqrt{\frac{p_1}{3}}\cos\left(\frac{\varphi+4\pi}{3}\right)-\frac{b_1}{3},$$ наконец,

$$x_1 = t+a-z_1 = t+a-2\sqrt{\frac{p_1}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right)+\frac{b_1}{3}, x_2 = t+a-z_2 = t+a-2\sqrt{\frac{p_1}{3}}\cos\left(\frac{\varphi+2\pi}{3}\right)+\frac{b_1}{3},$$

$$x_3 = t+a-z_3 = t+a-2\sqrt{\frac{p_1}{3}}\cos\left(\frac{\varphi+4\pi}{3}\right)+\frac{b_1}{3} \qquad (26)$$

Методом неопределенных коэффициентов определим веса в квадратурной формуле Гаусса (11)

$$\begin{cases} 1) u(t+a-z)\equiv 1: \int_0^{t-b}\frac{u(t+a-z)dz}{z^\alpha} = \int_0^{t-b}\frac{dz}{z^\alpha} = \frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} = C_1+C_2+C_3 \\ 2) u(t+a-z) = t+a-z: \int_0^{t-b}\frac{(t+a-z)dz}{z^\alpha} = (t+a)\int_0^{t-b}\frac{dz}{z^\alpha} - \int_0^{t-b}\frac{zdz}{z^\alpha} = (t+a)\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} - \frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} = C_1x_1+C_2x_2+C_3x_3 \\ 3) u(t+a-z) = (t+a-z)^2: \int_0^{t-b}\frac{(t+a-z)^2dz}{z^\alpha} = (t+a)^2\int_0^{t-b}\frac{dz}{z^\alpha} - 2(t+a)\int_0^{t-b}\frac{zdz}{z^\alpha} + \int_0^{t-b}\frac{z^2dz}{z^\alpha} = \\ = (t+a)^2\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} - 2(t+a)\frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} + \frac{(t-b)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)} = C_1x_1^2+C_2x_2^2+C_3x_3^2 \end{cases} \qquad (27)$$

Первое уравнение системы (27) умножим на число x_3 и вычтем из второго уравнения.

$$(t+a-x_3)\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} - \frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} = C_1(x_1-x_3)+C_2(x_2-x_3) \qquad (28)$$

Далее второе уравнение системы (27) умножим на число x_3 и вычтем из третьего уравнения

$$(t+a)^2\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} - 2(t+a)\frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} + \frac{(t-b)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)} - (t+a)x_3\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} + \frac{x_3(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} = C_1x_1(x_1-x_3)+C_2x_2(x_2-x_3) \Leftrightarrow$$

$$(t+a)(t+a-x_3)\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} - (2(t+a)-x_3)\frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} + \frac{(t-b)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)} = C_1x_1(x_1-x_3)+C_2x_2(x_2-x_3) \qquad (29)$$

Уравнение (28) умножим на число x_2, а затем вычтем из уравнения (29).

$$(t+a)(t+a-x_3)\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} - (2(t+a)-x_3)\frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} + \frac{(t-b)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)} - (t+a-x_3)x_2\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} + x_2\frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} =$$

$$= C_1x_1(x_1-x_3) - C_1x_2(x_1-x_3) = C_1(x_1-x_2)(x_1-x_3) = (t+a-x_2)(t+a-x_3)\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} - (2(t+a)-x_3-x_2)\frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} + \frac{(t-b)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)}.$$

$$C_1 = \frac{1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\left((t+a-x_2)(t+a-x_3)\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} - (2(t+a)-x_3-x_2)\frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} + \frac{(t-b)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)}\right) \qquad (30)$$

Подставим(30) в (28) и выразим из него C_2

$$C_2 = -\frac{C_1(x_1-x_3)}{(x_2-x_3)} + \frac{1}{(x_2-x_3)}\left((t+a-x_3)\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} - \frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}\right) =$$

$$= -\frac{1}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)}\left((t+a-x_2)(t+a-x_3)\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} - (2(t+a)-x_3-x_2)\frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} + \frac{(t-b)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)}\right) + \frac{1}{(x_2-x_3)}\left((t+a-x_3)\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} - \frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}\right) =$$

$$= \frac{(t+a-x_3)(x_1-t-a)}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)}\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} + \frac{(2(t+a)-x_1-x_3)}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)}\frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} - \frac{(t-b)^{3-\alpha}}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(3-\alpha)} =$$

$$= \frac{1}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)}\left((t+a-x_3)(x_1-t-a)\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} + (2(t+a)-x_1-x_3)\frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} - \frac{(t-b)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)}\right) \qquad (31)$$

Из первого уравнения системы(27) получим коэффициент C_3: $C_3 = \frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} - C_2 - C_1$ (32)

Сравнивая выражения формул (25),(26),(30),(31),(32) с выражениями формул(11),(12), замечаем, что они полностью совпадают. **Теорема 2** доказана.

Рассмотрим примеры производной дробного порядка для двух гладких функции, используя почленное дифференцирование, для чего разложим функцию в ряд Тейлора в нуле $\forall 0<\alpha<1$.

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)t^n}{\Gamma(n+1)} \Rightarrow (D_{0+,t}^{\alpha}f)(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)t^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1)}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\alpha)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)t^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} \qquad (33)$$

Для функции $f(t) = \sin(t), f^{(n=2k+1)}(0) = (-1)^k$ согласно формуле(33)

$$\left(D_{0+,t}^{\alpha}\sin(t)\right)(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)t^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k+1-\alpha}}{\Gamma(2k+2-\alpha)}=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k+1-\alpha}}{\prod_{i=1}^{2k+1}(i-\alpha)} \quad (34)$$

Для функции $f(t)=\exp(t), f(t)^{(n)}(0)=1$ согласно формуле(33)

$$\left(D_{0+,t}^{\alpha}\exp(t)\right)(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)t^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)}=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-\alpha}}{\prod_{i=1}^{n}(i-\alpha)} \quad (35)$$

В таблицах 1,2 первый столбец – точное значение производной Капуто, второй – численное её значение, последний – разность значений первого и второго столбцов. Таблица 1 заполнена для функции $f(t)=\sin(t), t=1, \alpha=\{0.1;0.2,\ldots,0.9\}$с точными значениями по формуле(34) алгоритмом(7),(8),(9),(11),(12).

Таблица 1. **Производная Капуто для функции** $f(t)=\sin(t), t=1, \alpha=\{0.1;0.2,\ldots,0.9\}$

α	$\left(D_{0+,t}^{\alpha}\sin(t)\right)(t=1)$	$\left(D_{0+,t}^{\alpha}\sin(t)\right)_{num}(t=1)$	$\Delta\left(D_{0+,t}^{\alpha}\sin(t)\right)(t=1)$
0.1	0.860686457851548	0.860686457851546	1.11022302462E-015
0.2	0.872028682469080	0.872028682469078	1.5543122344E-015
0.3	0.874208881768730	0.874208881768730	-5.551115123E-016
0.4	0.865955538895239	0.865955538895242	-2.886579864E-015
0.5	0.846056786724153	0.846056786724154	-1.332267629E-015
0.6	0.813409473355862	0.813409473355859	3.219646771E-015
0.7	0.767074377482551	0.767074377482561	-9.103828801E-015
0.8	0.706336625656207	0.706336625656193	1.37667655053E-014
0.9	0.630769877632009	0.630769877632010	-2.220446049E-016

Таблица 2 заполнена для функции $f(t)=\exp(t), t=1, \alpha=\{0.1;0.2,\ldots,0.9\}$ с точными значениями по формуле(35) алгоритмом(7),(8),(9),(11),(12).

Таблица 2. **Производная Капуто для функции** $f(t)=\exp(t), t=1, \alpha=\{0.1;0.2,\ldots,0.9\}$

α	$\left(D_{0+,t}^{\alpha}\exp(t)\right)(t=1)$	$\left(D_{0+,t}^{\alpha}\exp(t)\right)_{num}(t=1)$	$\Delta\left(D_{0+,t}^{\alpha}\exp(t)\right)(t=1)$
0.1	1.83590700128116	1.83590700128116	4.8849813083E-015
0.2	1.95327769737494	1.95327769737494	0.000000000000E+000
0.3	2.06912248517810	2.06912248517810	7.105427357601E-015
0.4	2.18207484049358	2.18207484049357	4.440892098500E-015
0.5	2.29069825230324	2.29069825230324	-5.32907051820E-015
0.6	2.39351811093831	2.39351811093831	-7.10542735760E-015
0.7	2.48906041969977	2.48906041969980	-2.13162820728E-014
0.8	2.57589705394628	2.57589705394625	2.708944180085E-014
0.9	2.65269690843878	2.65269690843883	-5.06261699E-014

В таблицах 1,2 использованы параметры n=10000 (число интервалов для первого интеграла в(4)) $n\cdot h=b$, $l=45$, $l\cdot h=t-b$ (l -число интервалов для второго интеграла в(4)). В формулах(34),(35)использовано 100 членов ряда для вычисления с двойной точностью производной Капуто.

Программа на языке FORTRAN, использует переменные и функции двойной точности. Первый интеграл в(4) вычисляется подпрограммой subroutine integral(h,h2,alpfa,b,t,m,int1), второй подпрограммой subroutine fun(t,h,alpfa,a,b,res1), гамма-функция вызовом dgamma(1d0-alpfa) из библиотеки dfimsl . Вычисляется производная Капуто для функции $f(t)=\sin(t), t=1, \alpha=\{0.1;0.2,\ldots,0.9\}$ с алгоритмом (7),(8),(9),(11),(12).

```
program kaputo;use dfimsl;integer(8),parameter::n=1000,m=n*10; integer(8)::i,k;
real(8)::t,t0,alpfa,h,res1,r1,r2,r3,r4,kap,res2,pi,fd(4),a,r5,r6,r7,r8,r9,r10,c1,c2;
real(8)::xx(4,2),ff(4,2),x1,x2,f1,f2,a1,a2,s1,s2,b,int1,h2,kap1,kap2,g,s,l,t1,t2;call cpu_time(t1);
t0=1d0;alpfa=9d-1;h=t0/dfloat(m+45);pi=2d0*asin(1d0);b=t-45d0*h;res2=dgamma(1d0-alpfa);
 s=0d0;do k=0,350;g=res2;do i=1,2*k+1;g=g*(dfloat(i)-alpfa);enddo;
l=(-1d0)**dfloat(k);s=s+l*(t0**(dfloat(2*k+1)-alpfa))/g;enddo;t=t0;b=t-45d0*h;h2=5d-3;
print*,"t=",t,"h=",h,"alfa=",alpfa,"b=",b,"(t-b)/h=",(t-b)/h; t=t0;a=-h2;call fun(t,h,alpfa,a,b,res1);r1=res1;t=t0;a=h2;
call fun(t,h,alpfa,a,b,res1); r2=res1;t=t0;a=-2d0*h2;call fun(t,h,alpfa,a,b,res1);r3=res1;t=t0;a=2d0*h2;
call fun(t,h,alpfa,a,b,res1); r4=res1;t=t0;a=-3d0*h2; call fun(t,h,alpfa,a,b,res1); r5=res1;t=t0;
a=3d0*h2; call fun(t,h,alpfa,a,b,res1); r6=res1;t=t0;a=-4d0*h2; call fun(t,h,alpfa,a,b,res1);r7=res1;t=t0;
a=4d0*h2;call fun(t,h,alpfa,a,b,res1); r8=res1;t=t0;a=-5d0*h2;call fun(t,h,alpfa,a,b,res1);r9=res1;t=t0;
a=5d0*h2; call fun(t,h,alpfa,a,b,res1); r10=res1;call dif(h2,r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9,r10,kap);kap2=kap;
call integral(h,h2,alpfa,b,t,m,int1); kap1=kap+int1;kap=kap1/res2; open(1, file='1.txt');
1 write(1,*),"exact=",s,"kaputo=",kap,"delt=",s-kap ,"eps=",(s-kap)/kap
call cpu_time(t2);
```

```
print*,"exact=",s,"kaputo=",kap,"delt=",s-kap,"eps=",(s-kap)/kap,"t2-t1=",t2-t1;pause;end program kaputo;
subroutine fun(t,h,alpfa,a,b,res1); real(8)::s1,s2,s3,s4,s5,s6,t,h,alpfa,res,a,b, c1,c2,c3,x,f,res1,tb,kor;
real(8)::b1,c,d,p1,r,p,q,fi,pi,x1,x2,x3,y1,y2,y3;f(x)=dsin(x);s1=1d0-alpfa;s2=2d0-alpfa;
s3=3d0-alpfa;s4=4d0-alpfa;s5=5d0-alpfa;s6=6d0-alpfa;pi=2d0*dasin(1d0);b1=-3d0*s3*(t-b)/s6;
c=(3d0*s3*s2*(t-b)**2d0)/(s5*s6);d=-(s1*s2*s3*(t-b)**3d0)/(s4*s5*s6);p=c-(b1**2d0)/3d0;
q=(2d0/27d0)*(b1**3d0)-(b1*c)/3d0+d;p1=-p;r=dsqrt((p1**3d0)/27d0);fi=dacos(-q/(2d0*r));
y1=2d0*dsqrt(p1/3d0)*dcos(fi/3d0);y2=2d0*dsqrt(p1/3d0)*dcos((fi+2d0*pi)/3d0);
y3=2d0*dsqrt(p1/3d0)*dcos((fi+4d0*pi)/3d0);print*,"check 1=",y1**3d0+p*y1+q;
print*,"check 2",y2**3d0+p*y2+q;print*,"check 3=",y3**3d0+p*y3+q; x1=y1-b1/3d0;x2=y2-b1/3d0; x3=y3-b1/3d0;
x1=-x1+t+a;x2=-x2+t+a;x3=-x3+t+a;
c1=((t+a-x3)*(t+a-x2)*(t-b)**s1)/s1-((2d0*(t+a)-x2-x3)*(t-b)**s2)/s2;
c1=(c1+((t-b)**s3)/s3)/((x1-x2)*(x1-x3)); c2=((t+a-x3)*(x1-t-a)*(t-b)**s1)/s1+(2d0*(t+a)-x1-x3)*((t-b)**s2)/s2;
c2=(c2-((t-b)**s3)/s3)/((x1-x2)*(x2-x3));
 c3=(((t-b)**s1)/s1)-c1-c2;  res=c1*f(x1)+c2*f(x2)+c3*f(x3); res1=res; end subroutine;
subroutine integral(h,h2,alpfa,b,t,m,int1); integer(8)::i,m; real(8)::h,alpfa,b,t,f,ff,tau,a,s;
real(8)::int1,h2,c1,c2,c3,c4,c5,c0,c6,f1,f2,f3,f4,f5,f6,f7,f8,f9,f10,x1,x2, x3,x4,x5,kap;
f(tau)=dsin(tau);ff(a,t,tau)=f(tau+a)/(t-tau)**alpfa; c0=16067d0/299376d0;
c1=16067d0/149688d0;c2=26575d0/74844d0; c3=-16175d0/99792d0; c4=5675d0/6237d0;
 c5=-4825d0/5544d0; c6=17807d0/12474d0;x1=5d0/6d0;x2=-5d0/21d0;x3=5d0/84d0; x4=-5d0/504d0;
x5=1d0/1260d0; s=0d0; do i=0,m; tau=h*dfloat(i);f1=ff(-h2,t,tau);f2=ff(h2,t,tau); f3=ff(-2d0*h2,t,tau);
 f4=ff(2d0*h2,t,tau);f5=ff(-3d0*h2,t,tau);f6=ff(3d0*h2,t,tau); f7=ff(-4d0*h2,t,tau); f8=ff(4d0*h2,t,tau);
 f9=ff(-5d0*h2,t,tau); f10=ff(5d0*h2,t,tau); kap=(x1*(f2-f1)+x2*(f4-f3)+x3*(f6-f5)+x4*(f8-f7)+x5*(f10-f9))/h2;
if(mod(i,10)==4.or.mod(i,10)==6)then; s=s+kap*c5; elseif(mod(i,10)==3.or.mod(i,10)==7)then;
s=s+kap*c4;elseif(mod(i,10)==2.or.mod(i,10)==8)then;s=s+kap*c3;
elseif(mod(i,10)==1.or.mod(i,10)==9)then; s=s+kap*c2;elseif(mod(i,10)==5)then;s=s+kap*c6;
elseif(mod(i,10)==0.and.i>0.and.i<m)then;s=s+kap*c1;elseif(i==0.or.i==m)then;s=s+kap*c0; endif;
enddo; int1=s*5d0*h;end subroutine;
 subroutine dif(h2,r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9,r10,kap);
real(8)::r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9,r10,kap,h2;real(8)::c1,c2,c3,c4,c5;c1=5d0/6d0;c2=-5d0/21d0;
c3=5d0/84d0;c4=-5d0/504d0;c5=1d0/1260d0;
kap=(c1*(r2-r1)+c2*(r4-r3)+c3*(r6-r5)+c4*(r8-r7)+c5*(r10-r9))/h2;end subroutine;
```

Возможно, что сохраняются некоторые интегральные инварианты в динамических системах, описываемые уравнениями с производными дробного порядка аналогично инвариантам в системах[23-25]. Интересно применить уравнение Пуассона дробного порядка для шифрования QR-кодов в работах[14,15,18], в гидродинамике[6,7]. Можно создать пакеты программ с дробными производными для задач УМФ как в работе[27].

Литература:

1. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре: Учебное пособие для вузов. – М.: Наука. Физматлит.1984. – 416 с.
2. Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2010.240 с.
3. Килбас А.А. Теория и приложения дифференциальных уравнений дробного порядка. Курс лекций – Самара. : Научная конференция "Математическая физика и нанотехрологии".2009. 121С.
4. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 272 с.
5. Корчагина А.Н. Использование производных дробного порядка для решения задач механики сплошных сред/ А.Н. Корчагина// Математика и механика. 2010. С. 65-67.
6. Волосова Н.К. О роли профиля скорости на верхнем отрезке в гидродинамической задаче для прямоугольной каверны // Евразийское Научное Объединение. – 2020. № 5-1 (63). С. 11-17.
7. Волосова Н.К. Вычисление поля давления по полю скорости в гидродинамической задаче для прямоугольной каверны // Евразийское Научное Объединение. – 2020. № 9-1 (67). С. 1-8.
8. Волосова Н.К., Волосова А.К., Волосов К.А. Интегрирование уравнений Гарри Дима и Кортевега де Вриза в параметрической форме. Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2017. № 4. С. 194-214.
9. Вакуленко С.П., Волосов К.А., Волосова Н.К. К методу оценки состояния железнодорожного полотна//Мир транспорта. 2016. Т14. № 3(64) С. 20-35.
10. Вдовина Е.К. , Пугина Л.В., Волосов К.А. Моделирование пульсирующих режимов динамики свертывания крови//Математическое моделирование. 2014. Т. 26. № 12. С. 14-32.
11. Волосов К.А.,Пугина Л.В., Волосова А.К. Нелинейные уравнения как система линейных функциональных уравнений//Математический форум (Итоги науки. Юг России). 2014. Т. 8. № 2. С. 93-104.
12. Вдовина Е.К., Волосов К.А. Моделирование спиральных волн в процессе свертывания крови// Математическое моделирование. 2013. Т. 25. № 3. С. 14-24.
13. Волосов К.А. Конструкция решений квазилинейных уравнений с частными производными//Сибирский журнал индустриальной математики. – 2008 . Т.11. № 2(34). С.29-39.
14. Вакуленко С.П., Волосова Н.К., Пастухов Д.Ф. Способы передачи QR-кода в стеганографии/ С.П. Вакуленко, Н.К. Волосова, Д.Ф. Пастухов //Мир транспорта. – 2018. Т.16. № 5(78). С. 14-25.

15. Пастухов Д.Ф., Волосова Н.К., Волосова А.К. Некоторые методы передачи QR-кода в стеганографии/ Д.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова, А.К. Волосова //Мир транспорта. – 2019. Т.17. № 3(82). С. 16-39.
16. Пастухов Д.Ф. Аппроксимация уравнения Пуассона на прямоугольнике повышенной точности/Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов//Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2017. - № 12. – С. 62-77.
17. Волосова Н.К. О конечных методах решения уравнения Пуассона на прямоугольнике с краевым условием Дирихле/ Волосова Н.К. и др.//Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2020. - № 4. – С. 78-92.
18. Волосова Н.К. Модифицированное разностное уравнение К.Н. Волкова для уравнения Пуассона на прямоугольнике с четвертым порядком погрешности// Евразийское Научное Объединение. –2019. № 6-1 (52). С. 4-11.
19. Волосова Н.К. О решении уравнения Пуассона на прямоугольнике с шестым порядком погрешности за конечное число элементарных операций// Евразийское Научное Объединение. –2020. № 3-1 (61). С. 20-27.
20. Пастухов Д.Ф. К вопросу о редукции неоднородной краевой задачи Дирихле для волнового уравнения на отрезке / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2018. – № 12. – С. 60-74.
21. Пастухов Д.Ф. Минимальная разностная схема для уравнения Пуассона на параллелепипеде с шестым порядком погрешности/ Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2019. – № 4. – С. 154–173.
22. Волосова Н.К. Решение уравнения Пуассона в целых числах по модулю p с кусочно-разрывной правой частью// Евразийское Научное Объединение. 2019. № 1-1 (47). С. 4-9.
23. Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф. Об интегралах обобщенной энергии на экстремалях системы уравнений Эйлера-Лагранжа/ Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2020. – № 4. – С. 93–107.
24. Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф. Обратная теорема Гамильтона/ Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2019. – № 12. – С. 86–100.
25. Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф. Свойства функции Гамильтона в вариационных задачах со старшими производными/ Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2019. – № 4. – С. 137–153.
26. Аппроксимация двойных и тройных интегралов в математической физике/Пастухов Д.Ф.[и др.] // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 62–77.
27. Кристалинский В.Р., Кристалинский Р.Е. О решении задач математической физики в системе WOLFRAM MATHEMATICA//Современные информационные технологии и ИТ-образование. Т 15. № 4. 2019. С. 981-991.