УДК 514

ТЕНЗОР ЭЙЛЕРА-ЛАГРАНЖА В РАССЛОЕНИИ $T_r^n F_m$. (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МНОГОМЕРНОГО ОБОБЩЕННОГО 0-ИМПУЛЬСА)

канд. физ.-мат. наук, доц. Ю.Ф. ПАСТУХОВ

канд. физ.-мат. наук, доц. Д.Ф. ПАСТУХОВ

(Полоцкий государственный университет)

Аннотация .В работе введено понятие многомерного обобщенного импульса ранга n

$$P_{n,r}=\left\{p_{k,r}^i(n)\right\}=\left\{p_{k,n,r}^i\right\},\quad i=\overline{1,m},\ k\in Z_+^r,|k|=\sum_{j=1}^r k_j\le n,Z_+=N\cup\{0\}$$

Исследован закон преобразования компонент импульсов порядка $k=0$ *ранга* n *при замене координат в базе* F_m *расслоения* $T_r^n F_m$ *- они преобразуются как тензор типа (0,1) (ковектор) .*

$$\overline{p}_{0,r}^{\,i}(n)(\overline{f},\overset{(1)}{\overline{f}},...,\overset{(2n)}{\overline{x}})=\sum_{j=1}^m p_{0,r}^j(n)(f,\overset{(1)}{f},...,\overset{(2n)}{f})\cdot\frac{\partial f^j(\overline{f})}{\partial\overline{f}^i}=p_{0,r}^j(n)(f,\overset{(1)}{f},...,\overset{(2n)}{f})\cdot\frac{\partial f^j(\overline{f})}{\partial\overline{f}^i}\quad i,j=\overline{1,m},r\in N$$

Ключевые слова: уравнения Эйлера-Лагранжа, гладкие многообразия, расслоенное пространство скоростей, импульс системы, геометрия дифференциальных уравнений.

Введение.

Вариационное исчисление является одним из старейших и богатых содержанием и приложениями разделов математического анализа. Вариационные задачи (например, изопериметрические) рассматривались и в древности, но исследовались геометрическими методами. Поэтому началом зарождения вариационного исчисления можно считать работу Ферма 1662 г., в которой аналитическими методами исследована задача о распространении света из одной оптической среды в другую и о преломлении света на границе двух сред. Далее аналогичные (но более общие) вариационные задачи исследовались Ньютоном (задача о наименьшей поверхности вращения - в 1685 г.), Д. Бернулли (задача о брахистохроне) и др.

В 1696 г. И. Бернулли сформулировал и опубликовал математическую проблему с предложением для математиков своего времени заняться ее решением. В задаче о брахистохроне требовалось найти форму гладкой кривой, соединяющей две точки так, чтобы материальная точка, двигаясь по ней без трения под действием силы тяжести, прошла участок между этими точками за минимальное время. Задача была решена крупнейшими учеными того времени – Я. Бернулли, Г. Лейбницем, Г. Лопиталем и И. Ньютоном. Свои подходы к решению этой задачи предложили Л. Эйлер и Ж. Лагранж, что привело к рождению вариационного исчисления. Эти решения наметили многие направления будущей общей теории. И. Бернулли исходил из оптико-механических аналогий, Я. Бернулли применил принцип Гюйгенса, Г. Лейбниц решил задачу, заменяя кривую ломаными, заложив тем самым основу прямым методам в вариационном исчислении.

Фундаментальность законов сохранения заключается в их универсальности. Они справедливы при изучении любых физических процессов (механических, тепловых, электромагнитных и др.). Они одинаково применимы в релятивистском и нерелятивистском движении, в микромире, где справедливы квантовые представления, и в макромире, с его классическими представлениями. Дифференциально-геометрическое рассмотрение импульса-энергии в физической и математической постановке изложен в литературе [1-8,11]. Свойства тензора энергии-импульса при простейших линейных преобразованиях координат – времени объясняет законы сохранения импульса в макроскопической системе. Но тензор энергии-импульса в дифференциальной форме является инвариантным относительно произвольного невырожденного преобразования координат, что приводит к локальным законам сохранения энергии-импульса, например, в физике элементарных частиц. Функция Лагранжа определяет некоторую вариационную задачу, например, минимизацию интеграла действия в механической системе и динамику этой системы (уравнения Эйлера-Лагранжа). Если интегрант (подынтегральная функция в простейшей вариационной задаче) вырожден относительно переменных времени либо координат, то это вырождение приводит соответственно к закону сохранения энергии либо импульса относительно данной координаты. Задача Лагранжа содержит также уравнения связи (ограничения на краевые условия неизвестной функции). Переменные в уравнениях связи могут содержать производные выше второго порядка по времени от координат. Эти производные неявно входят в функцию Лагранжа, зависящую от ограничений. Поэтому рассмотренная задача актуальна в робототехнике, где перемещение механизмов могут иметь старшие производные по времени. Представленная работа является продолжением работ авторов [9, 10,13,16,17,18,19,20,21,22,23,24,27,28].

Постановка задачи и основные определения.

Пусть F_m - гладкое многообразие размерности m.

$J^n(0,F_m)$- гладкое расслоенное пространство струй порядка n (n-струй)с началом в $0\in R^r$ и концом в многообразии F_m. В локальных координатах (x^α) в R^r и (f^i) в F_m струя имеет вид

$(f^i,...,f^i_{k_1...k_r})$ $f^i_{k_1...k_r}=\partial_{k_1...k_r}f^i=\dfrac{\partial^{k_1+...+k_r}f^i}{\partial x_1^{k_1}...\partial x_r^{k_r}}$, $\forall k=(k_1,...,k_r)\Rightarrow\sum_{i=1}^r k_i\le n,\exists k_0=(k_{0_1},...,k_{0_r})\Rightarrow\sum_{i=1}^r k_{0_i}=n$

Множество всех струй $j^n(0\in R^r,f)=j^n_f=v^n_f\in J^n(0,F_m)$ многообразия F_m образует расслоенное над базой F_m пространство $T^n_rF_m=J^n(0,F_m),0\in R^r$, присоединенное к главному пространству реперов $H^n(F_m)$, типовой слой которого $T^n_{0,r}$ образован всевозможными $n-$струями из точки $o\in R^r$ в точку $O\in R^m$, а типовой охват определяется по закону умножения $n-$струй формулой: $v^n_f=r^n_f\cdot v^n_r$, $r^n_f\in H^nF_m$, $v^n_r\in T^n_{0,r}$, $T^n_rF_m$ назовем расслоением скоростей порядка n индекса r.

При $r=1$ $T^n_{r=1}F_m=T^nF_m$- расслоение скоростей порядка n

$L:T^n_rF_m\to\Re$-гладкая функция в точке $j^n(0\in R^r,f)=j^n_f$, $0\in R^r$.

В локальных координатах $L=L((f^i(x),f^i_{x_k}(x),...,f^i_{x_1^{s_1}...x_r^{s_r}}(x),...,f^i_{x_1^{n_1}...x_r^{n_r}}(x)))=L(f,f^{(1)},...,f^{(s)},...,f^{(n)})$

$\sum_{i=1}^r s_i=s\le n$, $\sum_{i=1}^r n_i=n$. Далее следует обобщение определения обобщенного импульса для многомерной вариационной задачи.

Определение 1. Система функций $P_{n,r}=\left\{p^i_{k,r}(n)\right\}=\left\{p^i_{k,n,r}\right\}$ с мультииндексом $k=(k_1,...,k_r),k_i\ge0,|k|=\sum_{i=1}^r k_i\le n$

$$p^i_{k,r}(n)=p^i_{k,n,r}(f,\overset{(1)}{f},...,\overset{(2n-|k|)}{f})=\sum_{|l|=0}^{|l|=n-|k|}(-1)^{|l|}D^l_x\Big(\frac{\partial L(f,...,\overset{(n)}{f})}{\partial\overset{(l+k)i}{f}}\Big)= \tag{1}$$

$$=\sum_{|l|=0}^{|l|=n-\sum_{i=1}^r k_i}(-1)^{\sum_{i=1}^r l_i}\partial^{\sum_{i=1}^r l_i}_{x_1^{l_1}...x_l^{l_r}}\Big(\frac{\partial L(f,...,f^{(n)})}{\partial f_{x_1^{l_1+k1}...x_l^{l_r+k_r}}}\Big),D^l_x=\partial^{\sum_{i=1}^r l_i}_{x_1^{l_1}...x_l^{l_r}}=\frac{\partial^{\sum_{i=1}^r l_i}}{\partial x_1^{l_1}...\partial x_r^{l_r}}=\partial_{x_1^{l_1}...x_l^{l_r}},\ i=\overline{1,m} \tag{2}$$

$k=(k_1,...,k_r),k_i\ge0$, $i=\overline{1,r}$,$|k|=\sum_{i=1}^r k_i$, $x=(x_1,...,x_r)$, $l=(l_1,...,l_r),l_i\ge0$, $i=\overline{1,r}$,$|l|=\sum_{i=1}^r l_i$

называется обобщенным импульсом ранга n для функции $L:T^n_rF_m\to\Re$, где

$L(f,...,f^{(n)})$- локальная запись функции L при выборе локальных координат (f) в базе F_m расслоения $T^n_rF_m$.

Функция $p^i_{k,n,r}(f,f^{(1)},...,f^{(2n-|k|)})$ называются $k-ой$ ($k\in Z^r_+=\underbrace{Z_+\times....Z_+}_{r},Z_+=N\cup\{0\}$)компонентой

обобщенного импульса P_n ранга n по $i-$ой координате или импульсами порядка k (k-импульсами) по $i-$ой координате обобщенного импульса P_n ранга n. При

$k=0,k\in Z^r_+=(Z_+)^r=\underbrace{Z_+\times....Z_+}_{r},Z_+=N\cup\{0\}\Leftrightarrow k=(k_1,...k_r),k_i=0,i=\overline{1,r}$ в локальных координатах $(f^i), i=\overline{1,m}$ в базе F_m расслоения $T_r^n F_m$

$$p^i_{0,n,r} = \sum_{l=0}^{|l|=n-|0|} (-1)^l D_x^l \left(\frac{\partial L(f,\dots,\overset{(n)}{f})}{\partial f^i_{x^l}}\right) = \sum_{|l|=0}^{|l|=n-|0|} (-1)^{\sum_{i=1}^{r} l_i}\, \partial_{x_1^{l_1}\dots x_l^{l_r}} \left(\frac{\partial L(f,\dots,\overset{(n)}{f})}{\partial f^i_{x^l}}\right) = \sum_{|l|=0}^{|l|=n-|0|} (-1)^{\sum_{i=1}^{r} l_i}\, \partial_{x_1^{l_1}\dots x_l^{l_r}} \left(\frac{\partial L(f,\dots,\overset{(n)}{f})}{\partial f^i_{x^l}}\right) \qquad (3)$$

нуль-импульс (функционал в уравнении Эйлера-Лагранжа в многомерной вариационной задаче).

При $n=1$ $$\sum_{l=0}^{|l|=n-|0|} (-1)^l D_x^l \left(\frac{\partial L(f,\dots,\overset{(n)}{f})}{\partial f^i_{x^l}}\right) = \sum_{l=0}^{|l|=1-|0|} (-1)^{\sum_{i=1}^{r} l_i}\, \partial_{x_1^{l_1}\dots x_l^{l_r}} \left(\frac{\partial L(f,\dots,\overset{(n)}{f})}{\partial f^i_{x^l}}\right) =$$

$$= \sum_{l=0}^{|l|=1} (-1)^{\sum_{i=1}^{r} l_i}\, \partial_{x_1^{l_1}\dots x_l^{l_r}} \left(\frac{\partial L(f,\dots,\overset{(n)}{f})}{\partial f^i_{x^l}}\right) = \frac{\partial L(f,\dots,\overset{(n)}{f})}{\partial f^i} - \sum_{j=1}^{r} \partial_{x_j} \left(\frac{\partial L(f,\dots,\overset{(n)}{f})}{\partial f^i_{x_j}}\right) \qquad (4)$$

Вначале сформулируем и докажем утверждения при $r=1$

Теорема 1. Пусть $\bar{x}^i = S^i(x_1,x_2,\dots,x_m)$, здесь $S:(x)\to(\bar{x})$ – гладкое невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка T^pX_m, $p\ge \max(s,l)$, $i=\overline{1,m}$, тогда

$$D_t^k x^i(\bar x) = x^{(k)i}(\bar x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar x)}{\partial \bar x^j}\overset{(k)j}{\bar x} + f(\bar x,\dot{\bar x},\dots,\overset{(k-1)}{\bar x}) \quad k\ge 1 \qquad (5)$$

где $f(\bar x,\dot{\bar x},\dots,\overset{(k-1)}{\bar x})$ - некоторая гладкая функция $\bar x,\dot{\bar x},\dots,\overset{(k-1)}{\bar x}$, $\overset{(s)}{\bar x} = (\overset{(s)1}{\bar x},\dots,\overset{(s)m}{\bar x})$, $\overset{(s)j}{\bar x} = D_t^s \bar x^j$ $s=\overline{0,k-1}$

Доказательство проведем методом математической индукции. База индукции $k=1$

$$D_t^1 x^i(\bar x) = x^{(1)i}(\bar x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar x)}{\partial \bar x^j}\overset{(1)j}{\bar x} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar x)}{\partial \bar x^j}\dot{\bar x}^j$$ проверено. Проверим для k=2

$$D_t^2 x^i(\bar x) = x^{(2)i}(\bar x) = D_t^1\Big(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar x)}{\partial \bar x^j}\overset{(1)j}{\bar x}\Big) = \sum_{j=1}^{m} D_t^1\Big(\frac{\partial x^i(\bar x)}{\partial \bar x^j}\Big)\dot{\bar x}^j + \frac{\partial x^i(\bar x)}{\partial \bar x^j} D_t^1 \dot{\bar x}^j = \sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 x^i(\bar x)}{\partial \bar x^l \partial \bar x^j}\dot{\bar x}^l\dot{\bar x}^j +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar x)}{\partial \bar x^j}\ddot{\bar x}^j = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar x)}{\partial \bar x^j}\ddot{\bar x}^j + f(\bar x,\dot{\bar x}),\quad f(\bar x,\dot{\bar x}) = \sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 x^i(\bar x)}{\partial \bar x^l \partial \bar x^j}\dot{\bar x}^l\dot{\bar x}^j .\ \textit{Проверено. для } k=2$$

Индуктивный переход.

Пусть $D_t^k x^i(\bar x) = x^{(k)i}(\bar x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar x)}{\partial \bar x^j}\overset{(k)j}{\bar x} + f(\bar x,\dot{\bar x},\dots,\overset{(k-1)}{\bar x})$. Тогда

$$D_t^{k+1} x^i(\bar x) = D_t^1 x^{(k)i}(\bar x) = D_t\Big(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar x)}{\partial \bar x^j}\overset{(k)j}{\bar x} + f(\bar x,\dot{\bar x},\dots,\overset{(k-1)}{\bar x})\Big) = \sum_{j=1}^{m} D_t\Big(\frac{\partial x^i(\bar x)}{\partial \bar x^j}\overset{(k)j}{\bar x}\Big) + D_t\big(f(\bar x,\dot{\bar x},\dots,\overset{(k-1)}{\bar x})\big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} D_t\Big(\frac{\partial x^i(\bar x)}{\partial \bar x^j}\Big)\overset{(k)j}{\bar x} + \frac{\partial x^i(\bar x)}{\partial \bar x^j} D_t\big(\overset{(k)j}{\bar x}\big) + D_t\big(f(\bar x,\dot{\bar x},\dots,\overset{(k-1)}{\bar x})\big) \qquad (6)$$

Поскольку $D_t\Big(\frac{\partial x^i(\bar x)}{\partial \bar x^j}\Big) = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial}{\partial \bar x^l}\Big(\frac{\partial x^i(\bar x)}{\partial \bar x^j}\Big)\dot{\bar x}^l = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial^2 x^i(\bar x)}{\partial \bar x^l \partial \bar x^j}\dot{\bar x}^l$ и $D_t\big(\overset{(k)j}{\bar x}\big) = \overset{(k+1)j}{\bar x}$, то (6) равно

$$\sum_{j=1}^{m} D_t\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(k)j}{x} + \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} D_t(\overset{(k)j}{x}) + D_t(f(\bar{x},\dot{x},\ldots,\overset{(k-1)}{x})) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial^2 x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^j}\dot{x}^l\right)\overset{(k)j}{x} + \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(k+1)j}{x} + \sum_{s=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\bar{x},\dot{x},\ldots,\overset{(k-1)}{x})}{\partial \overset{(s)j}{x}}\overset{(s+1)j}{x} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(k+1)j}{x} + f(\bar{x},\dot{x},\ldots,\overset{(k)}{x}),\ 0+1\le s+1\le k-1+1=k \quad (7)$$

В (7) сгруппируем члены : $\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(k+1)j}{x} + f(\bar{x},\dot{x},\ldots,\overset{(k)}{x}),\ 0+1\le s+1\le k-1+1=k$, где

$$f(\bar{x},\dot{x},\ldots,\overset{(k)}{x}) = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial^2 x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^j}\dot{x}^l\right)\overset{(k)j}{x} + \sum_{s=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\bar{x},\dot{x},\ldots,\overset{(k-1)}{x})}{\partial \overset{(s)j}{x}}\overset{(s+1)j}{x}$$

. **Теорема 1** доказана.

Теорема 2. Пусть $x^i = S^i(\bar{x}_1^i, \bar{x}_2^i, \ldots, \bar{x}_m^i)$, $S : (\bar{x}) \to (x)$, - невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка $T^n X_m, n \ge \max(k,p)$, $i = \overline{1,m}$, тогда

$$\frac{\partial x^{(k)i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(p)j}{x}} = \begin{cases} C_k^p \cdot D_t^{k-p}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right), C_k^p = \dfrac{k!}{p!\cdot(k-p)!}, k! = \prod_{\alpha=1}^{k}\alpha, k \ge p \\ 0, k < p \end{cases} =$$

$$= \varphi_p^k C_k^p \cdot D_t^{k-p}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right), \varphi_p^k = \begin{cases} 1, k \ge p \\ 0, k < p \end{cases} \quad (8)$$

Доказательство. При $k < p$ по Теореме 1 имеем

$$x^{(k)i}(\bar{x},\dot{x},\ldots,\overset{(k)}{x}) = x^{(k)i}(\bar{x}) = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}\overset{(k)l}{x} + f(\bar{x},\dot{x},\ldots,\overset{(k-1)}{x}) \quad k \ge 1$$ Поэтому

$$\frac{\partial x^{(k)i}(\bar{x},\dot{x},\ldots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(p)j}{x}} = \frac{\partial}{\partial \overset{(p)j}{x}}\left(\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}\overset{(k)l}{x} + f(\bar{x},\dot{x},\ldots,\overset{(k-1)}{x})\right) = 0$$

При $k \ge p$ доказательство проведем методом математической индукции. База индукции $k = p$

По **Теореме 1**, имеем $$\frac{\partial x^{(k)i}(\bar{x},\dot{x},\ldots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(p)j}{x}} = \frac{\partial}{\partial \overset{(p)j}{x}}\left(\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}\overset{(k)l}{x} + f(\bar{x},\dot{x},\ldots,\overset{(k-1)}{x})\right) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial \overset{(k)l}{x}}{\partial \overset{(k)j}{x}}\right) + \frac{\partial f(\bar{x},\dot{x},\ldots,\overset{(k-1)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}\delta_j^l = \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \qquad \delta_j^l = \begin{cases} 1, j = l \\ 0, j \ne l \end{cases} - \text{символ Кронекера}$$

База индукции доказана. Индуктивный переход. Пусть утверждение теоремы справедливо при $k \ge p$

Введем функции $F_k^i(\bar{x},\dot{x},\ldots,\overset{(k)}{x}) = x^{(k)i}(\bar{x},\dot{x},\ldots,\overset{(k)}{x})$, $\overset{(k+1)i}{x} = D_t(x^{(k)i}) = D_t F_k^i = \sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k} \frac{\partial F_k^i}{\partial \overset{(s)l}{x}}\overset{(s+1)l}{x}$.

$$\frac{\partial x^{(k+1)i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(l)}{x})}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}} = \frac{\partial}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}}\Big(\sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}\frac{\partial F_k^i}{\partial \overset{(s)l}{\bar{x}}}\overset{(s+1)l}{\bar{x}}\Big) = \sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}\Big(\frac{\partial^2 F_k^i}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}\,\partial \overset{(s)l}{\bar{x}}}\overset{(s+1)l}{\bar{x}} + \frac{\partial F_k^i}{\partial \overset{(s)l}{\bar{x}}}\frac{\partial x^{(s+1)l}}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}}\Big) =$$

$$= \sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}\Big(\frac{\partial^2 F_k^i}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}\,\partial \overset{(s)l}{\bar{x}}}\overset{(s+1)l}{\bar{x}}\Big) + \frac{\partial F_k^i}{\partial \overset{(s)l}{\bar{x}}}\delta_p^{s+1}\delta_j^l = \sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}\Big(\frac{\partial^2 F_k^i}{\partial \overset{(s)l}{\bar{x}}\,\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}}\overset{(s+1)l}{\bar{x}}\Big) + \frac{\partial F_k^i}{\partial \overset{(p-1)j}{\bar{x}}} \qquad (9)$$

По предположению индукции $\dfrac{\partial x^{(k)i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(k)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}} = \dfrac{\partial F_k^i}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}} = C_k^p D_t^{k-p}\Big(\dfrac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big)$. Значит, (9) равно

$$\sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}\Big(\frac{\partial^2 F_k^i}{\partial \overset{(s)l}{\bar{x}}\,\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}}\overset{(s+1)l}{\bar{x}}\Big) + \frac{\partial F_k^i}{\partial \overset{(p-1)j}{\bar{x}}} = C_k^p\Big(\sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}\frac{\partial}{\partial \overset{(s)l}{\bar{x}}}\Big(D_t^{k-p}\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big)\Big)D_t\overset{(s)l}{x}\Big) + C_k^{p-1}D_t^{k-(p-1)}\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big) =$$

$$= C_k^p\Big(\sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k-p}\frac{\partial}{\partial \overset{(s)l}{\bar{x}}}\Big(D_t^{k-p}\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big)(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(k-p)}{\bar{x}})\Big)D_t\overset{(s)l}{x}\Big) + C_k^{p-1}D_t^{k-(p-1)}\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big) . \qquad (10)$$

Так как $C_k^p + C_k^{p-1} = \dfrac{k!}{p!(k-p)!} + \dfrac{k!}{(p-1)!(k-(p-1))!} = \dfrac{k!}{p!(k-p)!}\Big(1+\dfrac{p}{k-p+1}\Big) = \dfrac{(k+1)!}{p!(k-p+1)!} = C_{k+1}^p$ и (11)

$$D_t^{k-p}\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big)(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(k-p)}{x}) = \sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k-p}\frac{\partial}{\partial \overset{(s)l}{\bar{x}}}\Big(D_t^{k-p}\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big)(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(k-p)}{x})\Big)D_t\overset{(s)l}{x}\Big) \qquad (12)$$

Учитывая (11) и (12) получим выражение для (10):

$$C_k^p\Big(\sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k-p}\frac{\partial}{\partial \overset{(s)l}{\bar{x}}}\Big(D_t^{k-p}\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big)(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(k-p)}{x})\Big)D_t\overset{(s)l}{x}\Big) + C_k^{p-1}D_t^{k-(p-1)}\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big) =$$

$$= C_k^p D_t\Big(D_t^{k-p}\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big)\Big) + C_k^{p-1}D_t^{k-(p-1)}\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big) = (C_k^p + C_k^{p-1})D_t^{k+1-p}\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big) = C_{k+1}^p D_t^{k+1-p}\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big).$$

Теорема 2 доказана.

Обобщением **теоремы 2** в многомерном случае является

Теорема 3 Пусть $f^i = S^i(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_m)$, $S:(\bar{f}) \to (f)$, - невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия F_m расслоения скоростей порядка $T_r^n F_m, n = \max(|s|,|l|)$, $i = \overline{1,m}$, тогда для $\forall l = (l_1,\dots,l_r), s = (s_1,\dots,s_r), l,s \in Z_+^r$

$$\frac{\partial f^{(l)i}(\bar{f},\overset{(1)}{\bar{f}},\dots,\overset{(|l|)}{\bar{f}})}{\partial \bar{f}^{(s)j}} = \frac{\partial (f^i(\bar{f}))^{(l)i}}{\partial \bar{f}^{(s)j}} = \frac{\partial (f^i(\bar{f}))_{x_1^{l_1}\dots\partial x_r^{l_r}}}{\partial \bar{f}^j_{x_1^{s_1}\dots\partial x_r^{s_r}}} = \begin{cases} C_l^s \cdot D_t^{l-s}\left(\dfrac{\partial f^i(\bar{f})}{\partial \bar{f}^j}\right), C_l^s = \dfrac{l!}{s!\cdot(l-s)!}, l! = \prod\limits_{i=1}^r l_i! = \prod\limits_{i=1}^r\prod\limits_{k=1}^{l_i} k, l \ge s \Leftrightarrow l_i \ge s_i, i = \overline{1,r} \\ 0, l < s \;\Leftrightarrow\; \exists i:\; l_i < s_i \end{cases} =$$

$$= \varphi_s^l C_l^s D_x^{l-s}\Big(\frac{\partial f^i(\bar{f})}{\partial \bar{f}^j}\Big), \varphi_s^l = \begin{cases} 1, l \ge s \Leftrightarrow l_i \ge s_i, i = \overline{1,r} \\ 0, l < s \Leftrightarrow \exists i: l_i < s_i \end{cases} = \prod_{i=1}^r \varphi_{s_i}^{l_i}, C_l^s = \prod_{i=1}^r \frac{l_i!}{s_i!(l_i - s_i)!} = \prod_{i=1}^r C_{l_i}^{s_i} \qquad (13)$$

$$D_x^l=\partial_{x_1^{l_1}\dots x_l^{l_r}}^{\sum_{i=1}^{r} l_i}=\frac{\partial^{\sum_{i=1}^{r} l_i}}{\partial x_1^{l_1}\dots\partial x_r^{l_r}}=\partial_{x_1^{l_1}\dots x_l^{l_r}}\ ,\ D_x^{l-s}=\partial_{x_1^{l_1-s_1}\dots x_l^{l_r}}^{\sum_{i=1}^{r} l_i-s_i}=\frac{\partial^{\sum_{i=1}^{r} l_i-s_i}}{\partial x_1^{l_1-s_1}\dots\partial x_r^{l_r-s_r}}=\partial_{x_1^{l_1-s_1}\dots x_l^{l_r-s_r}}$$

Доказательство. Проведем по индукции по индексу r расслоения $T_r^n F$.База индукции-при $r=1$ -это **теорема1:**

$$\frac{\partial x^{(l)i}(\overline{x},\dot{\overline{x}},\dots,\overset{(l)}{x})}{\partial \overset{(s)}{\underline{x}}{}^{j}}=\begin{cases}C_l^s\cdot D_t^{l-s}\left(\frac{\partial x^i(\overline{x})}{\partial \overline{x}^j}\right),C_l^s=\frac{l!}{s!\cdot(l-s)!},l!=\prod_{k=1}^{l}k,l\ge s\\ 0,l<s\end{cases}=\varphi_s^l C_l^s\cdot D_t^{l-s}\left(\frac{\partial x^i(\overline{x})}{\partial \overline{x}^j}\right),\varphi_s^l=\begin{cases}1,l\ge s\\ 0,\ l<s\end{cases}\quad(14)$$

Индуктивный переход:. Пусть утверждение теоремы справедливо при всех значениях индекса от 1 до r включительно

$$\frac{\partial f^{(l)i}(\overline{f},\overline{f}^{(1)},\dots,\overline{f}^{(\|l\|)})}{\partial \overline{f}^{(s)j}}=\frac{\partial (f^i(\overline{f}))^{(l)i}}{\partial \overline{f}^{(s)j}}=\frac{\partial (f^i(\overline{f}))_{x_1^{l_1}\dots\partial x_r^{l_r}}}{\partial \overline{f}^{j}_{x_1^{s_1}\dots\partial x_r^{s_r}}}=\begin{cases}C_l^s\cdot D_t^{l-s}\left(\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^j}\right),C_l^s=\frac{l!}{s!\cdot(l-s)!},l!=\prod_{i=1}^{r} l_i!=\prod_{i=1}^{r}\prod_{k=1}^{l_i}k,l\ge s\Leftrightarrow l_i\ge s_i,i=\overline{1,r}\\ 0,l<s\ \Leftrightarrow\ \exists i:\ l_i<s_i\end{cases}=$$

$$=\varphi_s^l C_l^s D_x^{l-s}\left(\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^j}\right),\varphi_s^l=\begin{cases}1,l\ge s\Leftrightarrow l_i\ge s_i,i=\overline{1,r}\\ 0,l<s\Leftrightarrow\exists i:l_i<s_i\end{cases}=\prod_{i=1}^{r}\varphi_{s_i}^{l_i},C_l^s=\prod_{i=1}^{r}\frac{l_i!}{s_i!(l_i-s_i)!}=\prod_{i=1}^{r}C_{l_i}^{s_i}\quad(15)$$

Докажем, что

$$\frac{\partial (f^i(\overline{f}))^{(l)i}}{\partial \overline{f}^{(s)j}}=\frac{\partial (f^i(\overline{f}))_{x_1^{l_1}\dots\partial x_r^{l_r}\partial x_{r+1}^{l_{r+1}}}}{\partial \overline{f}^{j}_{x_1^{s_1}\dots\partial x_r^{s_r}\partial x_{r+1}^{s_{r+1}}}}=\begin{cases}C_l^s\cdot D_t^{l-s}\left(\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^j}\right),C_l^s=\frac{l!}{s!\cdot(l-s)!},l!=\prod_{i=1}^{r+1} l_i!=\prod_{i=1}^{r+1}\prod_{k=1}^{l_i}k,l\ge s\Leftrightarrow l_i\ge s_i,i=\overline{1,r+1}\\ 0,l<s\ \Leftrightarrow\ \exists i:\ l_i<s_i,i=\overline{1,r+1}\end{cases}=\quad(16)$$

$$\frac{\partial (f^i(\overline{f}))_{x_1^{l_1}\dots x_r^{l_r}x_{r+1}^{l_{r+1}}}}{\partial \overline{f}^{j}_{x_1^{s_1}\dots x_r^{s_r}x_{r+1}^{s_{r+1}}}}=\frac{\partial (f^i(\overline{f}))_{x_{r+1}^{l_{r+1}}x_1^{l_1}\dots x_r^{l_r}}}{\partial \overline{f}^{j}_{x_{r+1}^{s_{r+1}}x_1^{s_1}\dots x_r^{s_r}}}=\frac{\partial(\partial_{x_{r+1}^{l_{r+1}}}(f^i(\overline{f}))_{x_1^{l_1}\dots x_r^{l_r}})}{\partial(\partial_{x_{r+1}^{s_{r+1}}}(\overline{f}^{j}_{x_1^{s_1}\dots x_r^{s_r}}))}$$

Пусть $\overline{G}^j=\overline{f}^{j}_{x_1^{s_1}\dots x_r^{s_r}}$ $G^i=(f^i(\overline{f}))_{x_1^{l_1}\dots x_r^{l_r}}=G^i(\overline{G})=\partial_{x_1^{l_1-s_1}\dots x_r^{l_r-s_r}}\overline{G}$. Тогда $\frac{\partial(\partial_{x_{r+1}^{l_{r+1}}}(f^i(\overline{f}))_{x_1^{l_1}\dots x_r^{l_r}})}{\partial(\partial_{x_{r+1}^{s_{r+1}}}(\overline{f}^{j}_{x_1^{s_1}\dots x_r^{s_r}}))}=$

$\frac{\partial(\partial_{x_{r+1}^{l_{r+1}}}(G^i(\overline{G}))}{\partial(\partial_{x_{r+1}^{s_{r+1}}}(\overline{G}^j))}$ **По теореме 1:** $\frac{\partial(\partial_{x_{r+1}^{l_{r+1}}}(G^i(\overline{G}))}{\partial(\partial_{x_{r+1}^{s_{r+1}}}(\overline{G}^j))}=\varphi_{s_{r+1}}^{l_{r+1}}C_{l_{r+1}}^{s_{r+1}}\cdot D_{x_{r+1}}^{l_{r+1}-s_{r+1}}\left(\frac{\partial G^i(\overline{G})}{\partial \overline{G}^j}\right),\varphi_{s_{r+1}}^{l_{r+1}}=\begin{cases}1,l_{r+1}\ge s_{r+1}\\ 0,\ l_{r+1}<s_{r+1}\end{cases}$ (17)

$\frac{\partial G^i(\overline{G})}{\partial \overline{G}^j}=\frac{\partial (f^i(\overline{f}))_{x_1^{l_1}\dots x_r^{l_r}})}{\partial \overline{f}^{j}_{x_1^{s_1}\dots x_r^{s_r}}}$ По **предположению индукции** (15) $\frac{\partial (f^i(\overline{f}))_{x_1^{l_1}\dots\partial x_r^{l_r}}}{\partial \overline{f}^{j}_{x_1^{s_1}\dots\partial x_r^{s_r}}}=$

$$\frac{\partial G^i(\overline{G})}{\partial \overline{G}^j}=\frac{\partial (f^i(\overline{f}))_{x_1^{l_1}\dots\partial x_r^{l_r}}}{\partial \overline{f}^{j}_{x_1^{s_1}\dots\partial x_r^{s_r}}}=\begin{cases}C_l^s\cdot D_t^{l-s}\left(\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^j}\right),C_l^s=\frac{l!}{s!\cdot(l-s)!},l!=\prod_{i=1}^{r} l_i!=\prod_{i=1}^{r}\prod_{k=1}^{l_i}k,l\ge s\Leftrightarrow l_i\ge s_i,i=\overline{1,r}\\ 0,l<s\ \Leftrightarrow\ \exists i:\ l_i<s_i\end{cases}=$$

$$\varphi_{s_{r+1}}^{r+1^l} C_l^s D_x^{l-s}(\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^j}), \varphi_s^l = \begin{cases} 1, l \geq s \Leftrightarrow l_i \geq s_i, i=\overline{1,r} \\ 0, l < s \Leftrightarrow \exists i : l_i < s_i \end{cases} = = \prod_{i=1}^{r} \varphi_{s_i}^{l_i}, C_l^s = \prod_{i=1}^{r} \frac{l_i!}{s_i!(l_i - s_i)!} = \prod_{i=1}^{r} C_{l_i}^{s_i} \quad (18)$$

Подставляем (18) в (17) получим: $\frac{\partial(\partial_{x_{r+1}{}^{l_{r+1}}}(G^i(\overline{G}))}{\partial(\partial_{x_{r+1}{}^{s_{r+1}}}(\overline{G}^j))} = \varphi_s^l C_{l_{r+1}}^{s_{r+1}} \cdot D_{x_{r+1}}^{l_{r+1}-s_{r+1}} \left(\frac{\partial G^i(\overline{G})}{\partial \overline{G}^j} \right) =$

$$= \varphi_{s_{r+1}}^{l_{r+1}} C_{l_{r+1}}^{s_{r+1}} \cdot D_{x_{r+1}}^{l_{r+1}-s_{r+1}}(\varphi_s^l C_l^s D_x^{l-s}(\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^j})) = \varphi_{s_{r+1}}^{l_{r+1}} \varphi_s^l C_{l_{r+1}}^{s_{r+1}} C_l^s \cdot D_{x_{r+1}}^{l_{r+1}-s_{r+1}}(D_x^{l-s}(\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^j})) =$$

$$= \varphi_{s_{r+1}}^{l_{r+1}} \prod_{i=1}^{r} \varphi_{s_i}^{l_i} C_{l_{r+1}}^{s_{r+1}} C_l^s \cdot D_{x_{r+1}}^{l_{r+1}-s_{r+1}}(D_x^{l-s}(\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^j})) = \varphi_{s_{r+1}}^{l_{r+1}} \prod_{i=1}^{r} \varphi_{s_i}^{l_i} C_{l_{r+1}}^{s_{r+1}} \prod_{i=1}^{r} C_{l_i}^{s_i} \cdot D_{x_{r+1}}^{l_{r+1}-s_{r+1}}(D_x^{l-s}(\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^j})) = \quad (19)$$

$$= \prod_{i=1}^{r+1} \varphi_{s_i}^{l_i} \prod_{i=1}^{r+1} C_{l_i}^{s_i} D_{x_{r+1}}^{l_{r+1}-s_{r+1}}(D_x^{l-s}(\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^j})) = \prod_{i=1}^{r+1} \varphi_{s_i}^{l_i} \prod_{i=1}^{r+1} C_{l_i}^{s_i} D_{x_{r+1}}^{l_{r+1}-s_{r+1}}(D_{x_r}^{l_r-s_r}(...D_{x_1}^{l_1-s_1}(\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^j})) = \quad (20)$$

$$= \varphi_s^l C_l^s D_{(x_1,...,x_{r+1})}^{(l_1-s_1,...,l_{r+1}-s_{r+1})}(\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^j}) = \varphi_s^l C_l^s D_x^{l-s}(\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^j}) \quad (20)$$

Теорема 3 доказана.

Теорема 4 (Тензор Эйлера-Лагранжа, закон преобразования импульсов при замене системы координат в базе F_m расслоения $T_r^n F_m \quad r,m,n \in N$).

Пусть $L : T_r^n F_m \to \Re$ - гладкая функция.

Функция $f : (\overline{f}) \to f(\overline{f})$-гладкая замена в базе многообразия F_m расслоения $T_r^{2n} F_m$.

Тогда $0 \in R^r$-импульсы ранга n (функционалы в многомерной системе уравнений Эйлера)

$$p_{0,n,r}^i = \sum_{|l|=0}^{n} (-1)^l D_x^l(\frac{\partial L(f,...,\overset{(n)}{f})}{\partial f_{x^l}^i}) = \sum_{|l|=0}^{n|} (-1)^{\sum_{i=1}^{r} l_i} \partial_{x_1^{l_1}...x_l^{l_r}}(\frac{\partial L(f,...,\overset{(n)}{f})}{\partial f_{x_1^{l_1}...x_l^{l_r}}^i})$$

преобразуются как **тензор типа (0,1) (ковектор)**:

$$\overline{p}_{0,r}^i(n)(\overline{f}, \overset{(1)}{\overline{f}},..., \overset{(2n)}{\overline{x}}) = \sum_{j=1}^{m} p_{0,r}^j(n)(f, \overset{(1)}{f},..., \overset{(2n)}{f}) \cdot \frac{\partial f^j(\overline{f})}{\partial \overline{f}^i} = p_{0,r}^j(n)(f, \overset{(1)}{f},..., \overset{(2n)}{f}) \cdot \frac{\partial f^j(\overline{f})}{\partial \overline{f}^i} \quad i,j = \overline{1,m}, \quad (21)$$

который назовем тензором Эйлера-Лагранжа .

Доказательство. По определению многомерного обобщенного импульса

$$p_{k,r}^i(n) = p_{k,n,r}^i(f, f^{(1)},..., f^{(2n-|k|)}) = \sum_{|l|=0}^{|l|=n-|k|} (-1)^{|l|} D_x^l(\frac{\partial L(f,...,\overset{(n)}{f})}{\partial \overset{(l+k)i}{f}}) =$$

$$= \sum_{|l|=0}^{|l|=n-\sum_{i=1}^{r} k_i} (-1)^{\sum_{i=1}^{r} l_i} \partial_{x_1^{l_1}...x_l^{l_r}}^{\sum_{i=1}^{r} l_i}(\frac{\partial L(f,...,\overset{(n)}{f})}{\partial f_{x_1^{l_1+k1}...x_l^{l_r+k_r}}}), D_x^l = \partial_{x_1^{l_1}...x_l^{l_r}}^{\sum_{i=1}^{r} l_i} = \frac{\partial^{\sum_{i=1}^{r} l_i}}{\partial x_1^{l_1}...\partial x_r^{l_r}} = \partial_{x_1^{l_1}...x_l^{l_r}}, \; i = \overline{1,m} \quad (22)$$

$$\overrightarrow{p}_{0,n,r}^j = \sum_{|s|=0}^{n} (-1)^{|s|} D_x^s(\frac{\partial \overline{L}(\overline{f},...,\overset{(n)}{\overline{f}})}{\partial \overline{f}_{x^s}^j}) = \sum_{|s|=\sum_{\alpha=1}^{r} s_\alpha=0}^{|s|=n} (-1)^{\sum_{i=1}^{r} s_i} \partial_{x_1^{s_1}...x_l^{s_r}}^{\sum_{i=1}^{r} s_i}(\frac{\partial \overline{L}(\overline{f},...,\overset{(n)}{f})}{\partial \overline{f}_{x_1^{s_1}...x_l^{s_r}}}) \quad (23)$$

$$\overline{L}(\overline{f},...,\overset{(n)}{\overline{f}}) = L(f(\overline{f}), D_x^{(1)} f(\overline{f}),..., D_x^{(1)} f(\overline{f})) = L(f(\overline{f}), \overset{(1)}{f}(\overline{f}),..., \overset{(n)}{f}(\overline{f}))$$

$$\frac{\partial \overline{L}(\overline{f},...,\overset{(n)}{\overline{f}})}{\partial \overline{f}^{\,j}_{x^s}} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{|l|=0}^{n} \frac{\partial L(f(\overline{f}),...,\overset{(n)}{f}(\overline{f}))}{\partial f^i_{x^l}} \frac{\partial f^i_{x^l}((\overline{f}))}{\partial \overline{f}^{\,j}_{x^s}} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{|l|=\sum\limits_{\alpha=1}^{r} l_\alpha=0}^{n} \frac{\partial L(f(\overline{f}),...,\overset{(n)}{f}(\overline{f}))}{\partial f^i_{x_1^{l_1}...x_l^{l_r}}} \frac{\partial f^i_{x_1^{l_1}...x_l^{l_r}}(f(\overline{f}),...,\overset{(n)}{f}(\overline{f}))}{\partial \overline{f}^{\,j}_{x_1^{s_1}...x_l^{s_r}}} = \quad (24)$$

По теореме 3

$$\frac{\partial f^{(l)i}(\overline{f},\overset{(1)}{\overline{f}},...,\overset{(|(l)|)}{\overline{f}})}{\partial \overline{f}^{(s)j}} = \frac{\partial (f^i(\overline{f}))^{(l)i}}{\partial \overline{f}^{(s)j}} = \frac{\partial (f^i(\overline{f}))_{x_1^{l_1}...\partial x_r^{l_r}}}{\partial \overline{f}^{\,j}_{x_1^{s_1}...\partial x_r^{s_r}}} =$$

$$\begin{cases} C_l^s \cdot D_t^{l-s}\left(\dfrac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^{\,j}}\right), C_l^s = \dfrac{l!}{s!\cdot(l-s)!}, l! = \prod\limits_{i=1}^{r} l_i! = \prod\limits_{i=1}^{r}\prod\limits_{k=1}^{l_i} k, l \ge s \Leftrightarrow l_i \ge s_i, i = \overline{1,r} \\ 0, l < s \;\;\Leftrightarrow\;\; \exists\, i:\; l_i < s_i \end{cases} =$$

$$= \varphi_s^l C_l^s D_x^{l-s}(\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^{\,j}}), \varphi_s^l = \begin{cases} 1, l \ge s \Leftrightarrow l_i \ge s_i, i = \overline{1,r} \\ 0, l < s \Leftrightarrow \exists i: l_i < s_i \end{cases} = \prod_{i=1}^{r} \varphi_{s_i}^{l_i}, C_l^s = \prod_{i=1}^{r} \frac{l_i!}{s_i!(l_i - s_i)!} = \prod_{i=1}^{r} C_{l_i}^{s_i} \quad (25)$$

Подставляем в (24) правую часть (25):

$$\frac{\partial \overline{L}(\overline{f},...,\overset{(n)}{\overline{f}})}{\partial \overline{f}^{\,j}_{x^s}} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{|l|=0}^{n} \frac{\partial L(f(\overline{f}),...,\overset{(n)}{f}(\overline{f}))}{\partial f^i_{x^l}} \frac{\partial f^i_{x^l}((\overline{f}))}{\partial \overline{f}^{\,j}_{x^s}} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{|l|=\sum\limits_{\alpha=1}^{r} l_\alpha=0}^{n} \frac{\partial L(f(\overline{f}),...,\overset{(n)}{f}(\overline{f}))}{\partial f^i_{x_1^{l_1}...x_l^{l_r}}} \frac{\partial f^i_{x_1^{l_1}...x_l^{l_r}}(f(\overline{f}),...,\overset{(n)}{f}(\overline{f}))}{\partial \overline{f}^{\,j}_{x_1^{s_1}...x_l^{s_r}}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{|l|=\sum\limits_{\alpha=1}^{r} l_\alpha=0}^{n} \frac{\partial L(f(\overline{f}),...,\overset{(n)}{f}(\overline{f}))}{\partial f^i_{x^l}} \varphi_s^l C_l^s D_x^{l-s}(\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^{\,j}}), \varphi_s^l = \begin{cases} 1, l \ge s \Leftrightarrow l_i \ge s_i, i = \overline{1,r} \\ 0, l < s \Leftrightarrow \exists i: l_i < s_i \end{cases} \quad (26)$$

Подставляем левую часть (26) (преобразованную левую часть (24)) в (23):

$$\overline{p}^{\,j}_{0,n,r} = \sum_{|s|=\sum\limits_{\alpha=1}^{r} s_\alpha=0}^{n} (-1)^{|s|} D_x^s(\frac{\partial \overline{L}(\overline{f},...,\overset{(n)}{\overline{f}})}{\partial \overline{f}^{\,j}_{x^s}}) = \sum_{|s|=\sum\limits_{\alpha=1}^{r} s_\alpha=0}^{n} (-1)^{|s|} D_x^s(\sum_{i=1}^{m}\sum_{|l|=\sum\limits_{\alpha=1}^{r} l_\alpha=0}^{n} \frac{\partial L(f(\overline{f}),...,\overset{(n)}{f}(\overline{f}))}{\partial f^i_{x^l}} \varphi_s^l C_l^s D_x^{l-s}(\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^{\,j}})) =$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{|s|=\sum\limits_{\alpha=1}^{r} s_\alpha=0}^{n} (-1)^{|s|} D_x^s(\sum_{|l|=\sum\limits_{\alpha=1}^{r} l_\alpha=0}^{n} \varphi_s^l C_l^s \frac{\partial L(f(\overline{f}),...,\overset{(n)}{f}(\overline{f}))}{\partial f^i_{x^l}} = D_x^{l-s}(\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^{\,j}})) = \sum_{|s|=\sum\limits_{\alpha=1}^{r} s_\alpha=0}^{n} (-1)^{|s|} \sum_{|l|=\sum\limits_{\alpha=1}^{r} l_\alpha=0}^{n} \varphi_s^l C_l^s D_x^s(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(f(\overline{f}),...,\overset{(n)}{f}(\overline{f}))}{\partial f^i_{x^l}} D_x^{l-s}(\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^{\,j}})) =$$

$$= \sum_{|s|=\sum\limits_{\alpha=1}^{r} s_\alpha=0}^{n} (-1)^{|s|} \sum_{|l|=\sum\limits_{\alpha=1}^{r} l_\alpha=0}^{n} \varphi_s^l C_l^s (\sum_{i=1}^{m} D_x^s(\frac{\partial L(f(\overline{f}),...,\overset{(n)}{f}(\overline{f}))}{\partial f^i_{x^l}} D_x^{l-s}(\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^{\,j}}))) \quad (27)$$

По теореме Лейбница $D_x^s(fg) = \sum\limits_{u=0\in R^r, u\le s}^{s\in Z_+^r} C_s^u D_x^u(f) D_x^{s-u}(g), \; = \prod\limits_{i=1}^{r} \varphi_{s_i}^{l_i}, C_l^s = \prod\limits_{i=1}^{r} \dfrac{l_i!}{s_i!(l_i - s_i)!} = \prod\limits_{i=1}^{r} C_{l_i}^{s_i}$ (28)

$$D_x^s(fg)=\sum_{u=0\in R^r,u\le s}^{s\in Z_+^r} C_s^u D_x^u(f)D_x^{s-u}(g)=\sum_{|u|=0}^{|s|}\varphi_u^s C_s^u D_x^u(f)D_x^{s-u}(g),\quad ,\varphi_u^s=\begin{cases}1, s\ge u\Leftrightarrow s_i\ge u_i, i=\overline{1,r}\\ 0, s<u\Leftrightarrow \exists i: s_i<u_i\end{cases} \quad (29)$$

(29) доказывается индукцией по по индексу r. База индукции $r=1$ есть –это формула Лейбница
По предположению индукции и теореме Лейбница получим

$$D_x^s(fg)=D_{(x_1\dots x_r x_{r+1})}^{(s_1\dots s_r s_{r+1})}(fg)=\partial_{x_{r+1}{}^{s_{r+1}}}(D_{(x_1\dots x_r x_{r+1})}^{(s_1\dots s_r s_{r+1})}(fg))=\partial_{x_{r+1}{}^{s_{r+1}}}(\sum_{u=0\in R^r,u\le s}^{s\in Z_+^r} C_s^u D_x^u(f)D_x^{s-u}(g))=$$

$$=\sum_{u=0\in R^r,u\le s}^{s\in Z_+^r}\partial_{x_{r+1}{}^{s_{r+1}}}(C_s^u D_x^u(f)D_x^{s-u}(g))=\sum_{u=0\in R^r,u\le s}^{s\in Z_+^r}C_s^u\partial_{x_{r+1}{}^{s_{r+1}}}(D_x^u(f)D_x^{s-u}(g)) \quad (29.1)$$

$$C_s^u=\prod_{i=1}^r\frac{u_i!}{u_i!(s_i-u_i)!}=\prod_{i=1}^r C_{s_i}^{u_i}\quad C_{s_1\dots s_r}^{u_1\dots u_r}C_{s_{r+1}}^{u_{r+1}}=C_{s_1\dots s_r s_{r+1}}^{u_1\dots u_r u_{r+1}},\ D_{x_{r+1}}^{u_{r+1}}(D_{(x_1\dots x_r)}^{(u_1,\dots,u_r)}(f))=D_{(x_1\dots,x_r,x_{r+1})}^{(u_1,\dots,u_r,u_{r+1})}$$

$D_{x_{r+1}}^{s_{r+1}-u_{r+1}}(D_{(x_1\dots x_r)}^{(s_1-u_1,\dots,s_r-u_r)}(g))=D_{(x_1\dots x_r,x_{r+1})}^{(s_1-u_1,\dots,s_r-u_r,s_{r+1}-u_{r+1})}$. По теореме Лейбница(одномерный случай $r=1$)

$\partial_{x_{r+1}{}^{s_{r+1}}}(D_x^u(f)D_x^{s-u}(g))=\sum_{u_{r+1}=0}^{s_{r+1}}C_{s_{r+1}}^{u_{r+1}}D_{x_{r+1}}^{u_{r+1}}(D_x^u(f))D_{x_{r+1}}^{s_{r+1}-u_{r+1}}(D_x^{s-u}(g))$ (29.2) Подставим(29.2) в (29.1):

$$\sum_{u=0\in R^r,u\le s}^{s\in Z_+^r}C_s^u\partial_{x_{r+1}{}^{s_{r+1}}}(D_x^u(f)D_x^{s-u}(g))=\sum_{u=0\in R^r,u\le s}^{s\in Z_+^r}C_s^u\sum_{u_{r+1}=0}^{s_{r+1}}C_{s_{r+1}}^{u_{r+1}}D_{x_{r+1}}^{u_{r+1}}(D_x^u(f))D_{x_{r+1}}^{s_{r+1}-u_{r+1}}(D_x^{s-u}(g))= \quad (29.3)$$

$$=\sum_{u=0\in R^r,u\le s}^{s\in Z_+^r}\sum_{u_{r+1}=0}^{s_{r+1}}C_s^u C_{s_{r+1}}^{u_{r+1}}D_{x_{r+1}}^{u_{r+1}}(D_x^u(f))D_{x_{r+1}}^{s_{r+1}-u_{r+1}}(D_x^{s-u}(g))=\sum_{u=0\in R^r,u\le s}^{s\in Z_+^r}\sum_{u_{r+1}=0}^{s_{r+1}}C_s^u C_{s_{r+1}}^{u_{r+1}}D_{x_{r+1}}^{u_{r+1}}(D_x^u(f))D_{x_{r+1}}^{s_{r+1}-u_{r+1}}(D_x^{s-u}(g))=$$

$$=\sum_{u=0\in R^r,u\le s}^{s\in Z_+^r}\sum_{u_{r+1}=0}^{s_{r+1}}C_{s_1\dots s_r}^{u_1\dots u_r}C_{s_{r+1}}^{u_{r+1}}D_{x_{r+1}}^{u_{r+1}}(D_{(x_1\dots x_r)}^{(u_1,\dots,u_r)}(f))D_{x_{r+1}}^{s_{r+1}-u_{r+1}}(D_{(x_1\dots x_r)}^{(s_1-u_1,\dots,s_r-u_r)}(g))=$$

$$=\sum_{u=0\in R^r,u\le s}^{s\in Z_+^r}\sum_{u_{r+1}=0}^{s_{r+1}}C_{s_1\dots s_r s_{r+1}}^{u_1\dots u_r u_{r+1}}D_{(x_1\dots,x_r,x_{r+1})}^{(u_1,\dots,u_r,u_{r+1})}(f)D_{(x_1\dots x_r,x_{r+1})}^{(s_1-u_1,\dots,s_r-u_r,s_{r+1}-u_{r+1})}(g)=\sum_{u=0\in R^{r+1},u\le s}^{s\in Z_+^{r+1}}C_s^u D_x^u(f)D_x^{s-u}(g) \quad (29.4)$$

и (28),(29) доказаны. Поставляем (28) в (27) и учитывая (29) для $f=\dfrac{\partial L(f(\overline{f}),\dots,\overset{(n)}{f}(\overline{f}))}{\partial f_{x^l}^i}$, $g=D_x^{l-s}(\dfrac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial\overline{f}^j})$:

$$\sum_{|s|=\sum_{\alpha=1}^r s_\alpha=0}^n(-1)^{|s|}\sum_{|l|=\sum_{\alpha=1}^r l_\alpha=0}^n\varphi_s^l C_l^s(\sum_{i=1}^m D_x^s(\frac{\partial L(f(\overline{f}),\dots,\overset{(n)}{f}(\overline{f}))}{\partial f_{x^l}^i}D_x^{l-s}(\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial\overline{f}^j})))=$$

$$=\sum_{|s|=\sum_{\alpha=1}^r s_\alpha=0}^n(-1)^{|s|}\sum_{|l|=\sum_{\alpha=1}^r l_\alpha=0}^n\varphi_s^l C_l^s(\sum_{i=1}^m(\sum_{u=0,u\le s}^s C_s^u D_x^u(\frac{\partial L(f(\overline{f}),\dots,\overset{(n)}{f}(\overline{f}))}{\partial f_{x^l}^i})D_x^{s-u}(D_x^{l-s}(\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial\overline{f}^j}))))=$$

$$=\sum_{|s|=\sum_{\alpha=1}^r s_\alpha=0}^n(-1)^{|s|}\sum_{|l|=\sum_{\alpha=1}^r l_\alpha=0}^n\varphi_s^l C_l^s(\sum_{i=1}^m(\sum_{u=0,u\le s}^s C_s^u D_x^u(\frac{\partial L(f(\overline{f}),\dots,\overset{(n)}{f}(\overline{f}))}{\partial f_{x^l}^i})D_x^{l-u}(\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial\overline{f}^j})))= \quad (30)$$

$$=\sum_{|s|=\sum_{\alpha=1}^r s_\alpha=0}^n(-1)^{|s|}\sum_{|l|=\sum_{\alpha=1}^r l_\alpha=0}^n\varphi_s^l C_l^s(\sum_{i=1}^m(\sum_{u=0}^{|s|}\varphi_u^s C_s^u D_x^u(\frac{\partial L(f(\overline{f}),\dots,\overset{(n)}{f}(\overline{f}))}{\partial f_{x^l}^i})D_x^{l-u}(\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial\overline{f}^j}))) \quad (31)$$

Подставляем в (31) очевидное тождество $C_l^s C_s^u = C_l^u C_{l-u}^{s-u}$ (32) ,которое следует из определения

$$C_l^s C_s^u = \prod_{i=1}^r \frac{l_i!}{s_i!(l_i-s_i)!}\prod_{i=1}^r \frac{s_i!}{u_i!(s_i-u_i)!} = \prod_{i=1}^r \frac{l_i!}{(l_i-s_i)!u_i!(s_i-u_i)!} = \prod_{i=1}^r \frac{l_i!}{u_i!(l_i-u_i)!}\frac{(l_i-u_i)!}{(l_i-s_i)!(s_i-u_i)!} =$$

$$= \prod_{i=1}^r \frac{l_i!}{u_i!(l_i-u_i)!}\prod_{i=1}^r \frac{(l_i-u_i)!}{(l_i-s_i)!(s_i-u_i)!} = \prod_{i=1}^r C_{l_i}^{u_i}\prod_{i=1}^r C_{l_i-u_i}^{s_i-u_i} = C_l^u C_{l-u}^{s-u}$$, $\varphi_s^l \varphi_u^s = 1 \Leftrightarrow \geq l \geq s \geq u$ получим

$$\sum_{|s|=\sum_{\alpha=1}^r s_\alpha=0}^n (-1)^{|s|} \sum_{|l|=\sum_{\alpha=1}^r l_\alpha=0}^n \varphi_s^l C_l^s (\sum_{i=1}^m (\sum_{u=0}^{|s|} \varphi_u^s C_s^u D_x^u (\frac{\partial L(f(\overline{f}),...,\overset{(n)}{f}(\overline{f}))}{\partial f_{x^l}^i}) D_x^{l-u}(\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^j}))) =$$

$$= \sum_{|s|=\sum_{\alpha=1}^r s_\alpha=0}^n (-1)^{|s|} \sum_{|l|=\sum_{\alpha=1}^r l_\alpha=0}^n \varphi_s^l C_{l-u}^{s-u} (\sum_{i=1}^m (\sum_{u=0}^{|s|} \varphi_u^s C_s^u D_x^u (\frac{\partial L(f(\overline{f}),...,\overset{(n)}{f}(\overline{f}))}{\partial f_{x^l}^i}) D_x^{l-u}(\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^j}))) =$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{|l|=\sum_{\alpha=1}^r l_\alpha=0}^n \sum_{u=0,u\leq l}^l C_l^u D_x^u (\frac{\partial L(f(\overline{f}),...,\overset{(n)}{f}(\overline{f}))}{\partial f_{x^l}^i}) D_x^{l-u}(\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^j})(\sum_{u=0}^{|l|} (-1)^{|s|} \varphi_s^l \varphi_u^s C_{l-u}^{s-u}) =$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{|l|=\sum_{\alpha=1}^r l_\alpha=0}^n \sum_{u=0,u\leq l}^l C_l^u D_x^u (\frac{\partial L(f(\overline{f}),...,\overset{(n)}{f}(\overline{f}))}{\partial f_{x^l}^i}) D_x^{l-u}(\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^j})(\sum_{l\geq s\geq u} (-1)^{|s|} C_{l-u}^{s-u}) \quad (33)$$

В последней сумме в (33) сделаем замену $l \geq s \geq u, k = s-u \Rightarrow l-u \geq k \geq 0, s = u+k$

$$\sum_{l\geq s\geq u} (-1)^{|s|} C_{l-u}^{s-u} = \sum_{s=u}^l (-1)^{|s|} C_{l-u}^{s-u} = \sum_{k=0}^{l-u} (-1)^{|u+k|} C_{l-u}^{s-u} = \sum_{k=0}^{l-u} (-1)^{|u+k|} C_{l-u}^k = (-1)^{|u|}\sum_{k=0}^{l-u} (-1)^{|k|} C_{l-u}^k =$$

$$= (-1)^{|u|}\sum_{k=0}^{l-u} (-1)^{|k|} C_{l-u}^k$$ (34) Пусть $l-u = a, a = (a_1,....a_r), a_i \geq 0, i = \overline{1,r}$, преобразуем (34):

$$(-1)^{|u|}\sum_{k=0}^{l-u} (-1)^{|k|} C_{l-u}^k = (-1)^{|u|}\sum_{k=0}^{a} (-1)^{|k|} C_a^k = (-1)^{|u|}\sum_{\substack{k_1=...k_r=0\\ a_i\geq k_i\geq 0}}^{a} (-1)^{\sum_{j=1}^r k_j} \prod_{j=1}^r C_{a_j}^{k_j} = (-1)^{|u|}\prod_{j=1}^r \sum_{k_j=0}^{a_j} (-1)^{k_j} C_{a_j}^{k_j} = \quad (35)$$

(35) следует из следующих очевидных преобразований $(-1)^{|u|}\sum_{\substack{k_1=...k_r=0\\ a_i\geq k_i\geq 0}}^{a} (-1)^{\sum_{j=1}^r k_j} \prod_{j=1}^r C_{a_j}^{k_j} =$

$$= (-1)^{|u|}\sum_{\substack{k_1=...k_r=0\\ a_i\geq k_i\geq 0}}^{a} (-1)^{k_1}...(-1)^{k_r}\prod_{j=1}^r C_{a_j}^{k_j} = (-1)^{|u|}\sum_{\substack{k_1=...k_r=0\\ a_i\geq k_i\geq 0}}^{a} \prod_{j=1}^r (-1)^{k_j} C_{a_j}^{k_j} = \sum_{\substack{k_1=...k_r=0\\ a_i\geq k_i\geq 0}}^{a} (-1)^{k1+...k_r} C_{a_1}^{k_1}...C_{a_r}^{k_r} =$$

$$\sum_{k_1=0}^{a_1}\sum_{k_2=0}^{a_2}...\sum_{k_r=0}^{a_r} (-1)^{k1+...k_r} C_{a_1}^{k_1}...C_{a_r}^{k_r} = (-1)^{|u|}\sum_{k_1=0}^{a_1} (-1)^{k_1} C_{a_1}^{k_1} \sum_{k_2=0}^{a_2} (-1)^{k_2} C_{a_2}^{k_2} ... \sum_{k_r=0}^{a_r} (-1)^{k_r} C_{a_r}^{k_r} = (-1)^{|u|}\prod_{j=1}^r \sum_{k_j=0}^{a_j} (-1)^{k_j} C_{a_j}^{k_j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-1)^{|u|}\sum_{\substack{k_1=...k_r=0\\ a_i\geq k_i\geq 0}}^{a} (-1)^{\sum_{j=1}^r k_j} \prod_{j=1}^r C_{a_j}^{k_j} = (-1)^{|u|}\prod_{j=1}^r \sum_{k_j=0}^{a_j} (-1)^{k_j} C_{a_j}^{k_j}$$ и (35) доказано.

$$\sum_{k_j=0}^{a_j}(-1)^{k_j}C_{a_j}^{k_j}=\begin{cases}1=(-1)^0C_0^0, a_j=0\\ 0=\sum_{k_j=0}^{a_j}(-1)^{k_j}C_{a_j}^{k_j}=(1-1)^{a_j}=0, a_j>0\end{cases}=\begin{cases}1, a_j=0\\ 0, a_j>0\end{cases}=\delta_{a_j}^0=\begin{cases}1, a_j=0\\ 0, a_j\neq 0\end{cases}, a_j\in Z_+ \text{ -символ Кронекера} \quad (36)$$

Подставляем (36) в (35) получим:

$$\prod_{j=1}^{r}\sum_{k_j=0}^{a_j}(-1)^{k_j}C_{a_j}^{k_j}=\prod_{j=1}^{r}\delta_{a_j}^0=\begin{cases}1, \Leftrightarrow a_j=0 \;\; j=\overline{1,r}\\ 0, \exists j: a_j>0\end{cases}=\begin{cases}1, a=0\in Z_+^r\\ 0, a>0\in Z_+^r\end{cases}=\begin{cases}1, a=0\in Z_+^r\\ 0, a\neq 0\in Z_+^r\end{cases}=\delta_a^0=(-1)^{|u|}\sum_{k=0}^{l-u}(-1)^{|k|}C_{l-u}^{k} \quad (37)$$

Подставляем (37) в (34) :

$$(-1)^{|u|}\sum_{k=0}^{l-u}(-1)^{|k|}C_{l-u}^{k}=(-1)^{|u|}\delta_{l-u}^0=\begin{cases}(-1)^{|u|}, l=u\Leftrightarrow l_i=u_i, i=\overline{1,r}\\ 0, l>u\Leftrightarrow \exists i: l_i>u_i\end{cases}=(-1)^{|u|}\delta_u^l=\sum_{l\geq s\geq u}(-1)^{|s|}C_{l-u}^{s-u} \quad (38)$$

Где функция $\delta_u^l=\begin{cases}1, l=u\Leftrightarrow l_i=u_i, i=\overline{1,r}\\ 0, l\neq u\Leftrightarrow \exists i: l_i>u_i\end{cases}, l-u\in Z_+^r \Leftrightarrow \begin{cases}1, l=u\Leftrightarrow l_i=u_i, i=\overline{1,r}\\ 0, l>u\Leftrightarrow \exists i: l_i>u_i\end{cases}, l-u\in Z_+^r$ (39)

Подставляем (38) в (33) :

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{|l|=\sum_{\alpha=1}^{r}l_\alpha=0}^{n}\sum_{u=0,u\leq l}^{l}C_l^uD_x^u\left(\frac{\partial L(f(\overline{f}),...,\overset{(n)}{f}(\overline{f}))}{\partial f_{x^l}^i}\right)D_x^{l-u}\left(\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^j}\right)\left(\sum_{l\geq s\geq u}(-1)^{|s|}C_{l-u}^{s-u}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{|l|=\sum_{\alpha=1}^{r}l_\alpha=0}^{n}\sum_{u=0,u\leq l}^{l}C_l^uD_x^u\left(\frac{\partial L(f(\overline{f}),...,\overset{(n)}{f}(\overline{f}))}{\partial f_{x^l}^i}\right)D_x^{l-u}\left(\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^j}\right)\left((-1)^{|u|}\delta_u^l\right) \quad (40)$$

Учитывая, что $\delta_u^l=\begin{cases}1, l=u\Leftrightarrow l_i=u_i, i=\overline{1,r}\\ 0, l>u\Leftrightarrow \exists i: l_i>u_i\end{cases}, l-u\in Z_+^r$ равна 1 только при $l=u$, преобразуем (40)

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{|l|=\sum_{\alpha=1}^{r}l_\alpha=0}^{n}\sum_{u=0,u\leq l}^{l}C_l^uD_x^u\left(\frac{\partial L(f(\overline{f}),...,\overset{(n)}{f}(\overline{f}))}{\partial f_{x^l}^i}\right)D_x^{l-u}\left(\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^j}\right)\left((-1)^{|u|}\delta_u^l\right)=$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{|l|=\sum_{\alpha=1}^{r}l_\alpha=0}^{n}\sum_{u=0,u\leq l}^{l}C_l^{u=l}D_x^{u=l}\left(\frac{\partial L(f(\overline{f}),...,\overset{(n)}{f}(\overline{f}))}{\partial f_{x^l}^i}\right)D_x^{l-l}\left(\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^j}\right)\left((-1)^{|u=l|}\delta_{u=l}^l\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{|l|=\sum_{\alpha=1}^{r}l_\alpha=0}^{n}C_l^{u=l}D_x^{u=l}\left(\frac{\partial L(f(\overline{f}),...,\overset{(n)}{f}(\overline{f}))}{\partial f_{x^l}^i}\right)D_x^{l-l}\left(\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^j}\right)(-1)^{|l|}=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{|l|=\sum_{\alpha=1}^{r}l_\alpha=0}^{n}1\cdot D_x^{l}\left(\frac{\partial L(f(\overline{f}),...,\overset{(n)}{f}(\overline{f}))}{\partial f_{x^l}^i}\right)D_x^{0}\left(\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^j}\right)(-1)^{|l|}=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{|l|=\sum_{\alpha=1}^{r}l_\alpha=0}^{n}C_l^{l}D_x^{l}\left(\frac{\partial L(f(\overline{f}),...,\overset{(n)}{f}(\overline{f}))}{\partial f_{x^l}^i}\right)D_x^{0}\left(\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^j}\right)(-1)^{|l|}=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{|l|=\sum\limits_{\alpha=1}^{r} l_\alpha=0}^{n} 1\cdot D_x^l\left(\frac{\partial L(f(\overline{f}),\ldots,\overset{(n)}{f}(\overline{f}))}{\partial f^i_{x^l}}\right)D_x^0\left(\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^j}\right)(-1)^{|l|}=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{|l|=\sum\limits_{\alpha=1}^{r} l_\alpha=0}^{n}(-1)^{|l|}D_x^l\left(\frac{\partial L(f(\overline{f}),\ldots,\overset{(n)}{f}(\overline{f}))}{\partial f^i_{x^l}}\right)\right)\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^j}=$$

$$=\sum_{j=1}^{m} p^i_{0,r}(n)(f,\overset{(1)}{f},\ldots,\overset{(2n)}{f})\cdot\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^j}=p^i_{0,r}(n)(f,\overset{(1)}{f},\ldots,\overset{(2n)}{f})\cdot\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^j}=$$

$$=\overline{p}^j_{0,r}(n)(\overline{f},\overset{(1)}{\overline{f}},\ldots,\overset{(2n)}{x})=\overline{p}^j_{0,n,r}=\sum_{|s|=0}^{n}(-1)^{|s|}D_x^s\left(\frac{\partial \overline{L}(\overline{f},\ldots,\overset{(n)}{\overline{f}})}{\partial \overline{f}^j_{x^s}}\right) \quad (41)$$

Теорема 4 доказана. Таким образом, получено обобщение основного результата работы авторов [10] ,в которой этот результат был доказан при $r=1$ в расслоении скоростей $T^n X_m$.

В данной работе результат был сформулирован и доказан для $\forall r\in N$ в расслоении $T_r^n F_m$ конечного порядка n индекса r - многомерное уравнение Эйлера-Лагранжа(0-импульс) преобразуется как тензор типа (0,1) –ковектор при замене координат в базе F_m расслоения $T_r^n F_m$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин В.А. Современная геометрия. Методы и приложения / В.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. – М.: УРСС, 1994.
2. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П.К. Рашевский. – М. : Гостехиздат, 1956.
3. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия / А.В. Погорелов. – М. : Наука, 1974.
4. Арнольд В.И. Математические методы классической механики / В.И. Арнольд. – М. : Наука, 1974.
5. Козлов А.А. Об управлении показателями Ляпунова двумерных линейных систем с локально интегрируемыми коэффициентами / А.А. Козлов // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44, № 10. – С. 1319–1335.
6. Козлов А.А. Об управлении показателями Ляпунова линейных систем в невырожденном случае / А.А. Козлов // Дифференциальные уравнения. – 2007. – Т. 43, № 5. – С. 621–627.
7. Козлов А.А. О глобальном управлении показателями Ляпунова линейных систем в невырожденном случае / А.А. Козлов // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. – 2006. – № 3. – С. 63–64.
8. Галеев Э.М. Краткий курс теории экстремальных задач / Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров. – М.: Изд-во МГУ, 1989. – 203 с.
9. Обобщение теоремы Гамильтона – Остроградского в расслоениях скоростей произвольного порядка / Ю.Ф. Пастухов [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 12. – С. 125–133.
10. Закон преобразования обобщенного импульса / Ю.Ф. Пастухов [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 4. – С. 85–99.
11. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / Л.Е. Евтушик [и др.] // Итоги науки и техники. Серия «Проблемы геометрии»: ВИНИТИ. – 1979. – Т. 9. – С. 5–246.
12. Трофимов В.В. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых и дифференциальных уравнений / В.В. Трофимов А.Т. Фоменко. – М.: Факториал, 1995.
13. Инварианты в расслоениях скоростей произвольного порядка / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов, С.В. Голубева // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2015. – № 12. – С. 117–123.

14. Пастухов Д.Ф. О КОНЕЧНЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА НА ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ С КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ ДИРИХЛЕ / Д.Ф. Пастухов [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2020. – № 4. – С. 78–92.
15. Пастухов Д.Ф. Задача построения поля линий тока по температурному разрезу / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2015. – № 4. – С. 27–36.
16. Пастухов Ю.Ф. Тензор обобщенной энергии / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 78–100.
17. Пастухов Ю.Ф. Группы преобразований, сохраняющие вариационную задачу со старшими производными / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2018. – № 4. – С. 194–209.
18. Пастухов, Ю.Ф. Сборник статей по дифференциальной геометрии [Электронный ресурс] / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов. – Новополоцк: ПГУ, 2018. – Режим доступа: http://elib.psu.by:8080/handle/123456789/22094. – Дата доступа: 15.06.2019.
19. Пастухов Ю.Ф. “ Необходимые условия в обратной вариационной задаче ”, Фундаментальная и прикладная математика,7:1(2001), 285-288
20. Пастухов, Ю.Ф. Лагранжевы сечения / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2018. – № 12. – С. 75–99.
21. Пастухов, Ю.Ф. Сборник статей по дифференциальной геометрии 2 [Электронный ресурс] / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов. – Новополоцк: ПГУ, 2019. – Режим доступа: http://elib.psu.by:8080/handle/123456789/23288. – Дата доступа: 26.03.2019.
22. Пастухов, Ю.Ф. Свойства функции Гамильтона в вариационных задачах со старшими производными / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2018. – № 4. – С. 137-153.
23. Пастухов, Ю.Ф. Обратная теорема Гамильтона / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2018. – № 12. – С. 86-100.
24. Пастухов, Ю.Ф. ОБ ИНТЕГРАЛАХ ОБОБЩЕННОЙ ЭНЕРГИИ НА ЭКСТРЕМАЛЯХ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА-ЛАГРАНЖА / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2020. – № 4. – С. 93-107.
25. Пастухов Д.Ф. Минимальная разностная схема для уравнения Пуассона в параллелепипеде с шестым порядком погрешности/ Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2019. – № 4. – С. 154–174.
26. Волосова Н.К. Векторный аналог метода прогонки для решения трех- и пятидиагональных матричных уравнений/ Н.К. Волосова, К.А. Волосов, А.К. Волосова, Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2019. – № 12. – С. 101–115.
27. Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф., Чернов С.В., Пастухов А.Ю. Условия сохранения обобщенной энергии на экстремалях системы уравнений Эйлера-Лагранжа /Пастухов Ю.Ф.//Евразийское Научное Объединение. 2020. Т. 1. № 3(61). С. 32- 39.
28. Пастухов, Ю.Ф. Сборник статей по дифференциальной геометрии (3-е издание) [Электронный ресурс] / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов. – Новополоцк: ПГУ, 2020. – Режим доступа: http://elib.psu.by:8080/handle/123456789/24448. – Дата доступа: 26.03.2019.

EULER-LAGRANGE TENSOR IN A BUNDLE $T_r^n F_m$.
(CONVERSION OF MULTI-DIMENSIONAL GENERALIZED 0-IMPULSE)

Y. PASTUKHOV, D. PASTUKHOV
(POLOTSK STATE UNIVERSITY)

The paper introduced the concept of the generalized pulse rank n

$$P_{n,r} = \left\{ p_{k,r}^i(n) \right\} = \left\{ p_{k,n,r}^i \right\}, \quad i = \overline{1,m},\ k \in Z_+^r, |k| = \sum_{j=1}^{r} k_j \le n, Z_+ = N \cup \{0\}$$

Studied the law of transformation of order $k = 0$ *component pulses rank* n *at change of coordinates in the base* F_m *of the bundle* $T_r^n F_m$ *- they transform as a tensor of type (0,1) (covector).*

$$\overline{p}_{0,r}^i(n)(\overline{f}, \overset{(1)}{\overline{f}}, ..., \overset{(2n)}{\overline{x}}) = \sum_{j=1}^{m} p_{0,r}^j(n)(f, \overset{(1)}{f}, ..., \overset{(2n)}{f}) \cdot \frac{\partial f^j(\overline{f})}{\partial \overline{f}^i} = p_{0,r}^j(n)(f, \overset{(1)}{f}, ..., \overset{(2n)}{f}) \cdot \frac{\partial f^j(\overline{f})}{\partial \overline{f}^i} \quad i, j = \overline{1,m}, r \in N$$

Key words: Euler-Lagrange equations, smooth manifolds, fiber space of velocities, momentum of the system, geometry of differential equations.