УДК 514

Тензор Эйлера-Лагранжа в расслоении $T_r^n F_m$ (преобразование многомерного обобщенного 0-импульса)

Пастухов Ю.Ф., канд. физ.-мат. наук, доц.;
Пастухов Д.Ф., канд. физ.-мат. наук, доц.
Полоцкий государственный университет

Аннотация .В *работе введено понятие многомерного обобщенного импульса ранга* n $P_{n,r} = \left\{ p_{k,r}^i(n) \right\} = \left\{ p_{k,n,r}^i \right\}$, $i = \overline{1,m},\ k \in Z_+^r, |k| = \sum_{j=1}^{r} k_j \le n, Z_+ = N \cup \{0\}$

Исследован закон преобразования компонент импульсов порядка $k = 0$ *ранга* n *при замене координат в базе* F_m *расслоения* $T_r^n F_m$ *- они преобразуются как тензор типа* (0,1) (*ковектор*).

$$\overline{p}_{0,r}^i(n)(\overline{f}, \overset{(1)}{\overline{f}}, ..., \overset{(2n)}{\overline{x}}) = \sum_{j=1}^{m} p_{0,r}^j(n)(f, \overset{(1)}{f}, ..., \overset{(2n)}{f}) \cdot \frac{\partial f^j(\overline{f})}{\partial \overline{f}^i} = p_{0,r}^j(n)(f, \overset{(1)}{f}, ..., \overset{(2n)}{f}) \cdot \frac{\partial f^j(\overline{f})}{\partial \overline{f}^i} \quad i, j = \overline{1,m}, r \in N$$

Ключевые слова: *уравнения Эйлера-Лагранжа, гладкие многообразия, расслоенное пространство скоростей, импульс системы, геометрия дифференциальных уравнений.*

Euler-Lagrange tensor in a bundle $T_r^n F_m$ (conversion of multi-dimensional generalized 0-impulse)

Pastukhov Y., Pastukhov D.
Polotsk state university

The paper introduced the concept of the generalized pulse rank n $P_{n,r} = \left\{ p_{k,r}^i(n) \right\} = \left\{ p_{k,n,r}^i \right\}$, $i = \overline{1,m},\ k \in Z_+^r, |k| = \sum_{j=1}^{r} k_j \le n, Z_+ = N \cup \{0\}$

Studied the law of transformation of order $k = 0 \in R^r$ *component pulses rank* n *at change of coordinates in the base* F_m *of the bundle* $T_r^n F_m$ *- they transform as a tensor of type (0,1) (covector).*

$$\overline{p}_{0,r}^i(n)(\overline{f}, \overset{(1)}{\overline{f}}, ..., \overset{(2n)}{\overline{x}}) = \sum_{j=1}^{m} p_{0,r}^j(n)(f, \overset{(1)}{f}, ..., \overset{(2n)}{f}) \cdot \frac{\partial f^j(\overline{f})}{\partial \overline{f}^i} = p_{0,r}^j(n)(f, \overset{(1)}{f}, ..., \overset{(2n)}{f}) \cdot \frac{\partial f^j(\overline{f})}{\partial \overline{f}^i} \quad i, j = \overline{1,m}, r \in N$$

Keywords: *Euler-Lagrange equations, smooth manifolds, fiber space of velocities, momentum of the system, geometry of differential equations.*

Введение.

Представленная работа является продолжением работ авторов [1,2,4,7,8,9,10,11,12,13,14,16].

Постановка задачи и основные определения.

Пусть F_m - гладкое многообразие размерности m. $J^n(0, F_m)$- гладкое расслоенное пространство струй порядка n (n-струй)с началом в $0 \in R^r$ и концом в многообразии F_m. В локальных координатах (x^α) в R^r и (f^i) в F_m струя имеет вид $(f^i, ..., f_{k_1...k_r}^i)$ $f_{k_1...k_r}^i = \partial_{k_1...k_r} f^i = \frac{\partial^{k_1+...+k_r} f^i}{\partial x_1^{k_1} ... \partial x_r^{k_r}}$, $\forall k = (k_1, ..., k_r) \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} k_i \le n, \exists k_0 = (k_{0_1}, ..., k_{0_r}) \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} k_{0_i} = n$ Множество струй $j^n(0 \in R^r, f) = j_f^n = v_f^n \in J^n(0, F_m)$ многообразия F_m образует расслоенное над базой F_m пространство $T_r^n F_m = J^n(0, F_m), 0 \in R^r$. $T_r^n F_m$ назовем расслоением скоростей порядка n индекса r.

$L : T_r^n F_m \to \mathfrak{R}$-гладкая функция в точке $j^n(0 \in R^r, f) = j_f^n$, $0 \in R^r$.

В локальных координатах $L = L((f^i(x), f_{x_k}^i(x), ..., f_{x_1^{s_1}...x_r^{s_r}}^i(x), ..., f_{x_1^{n_1}...x_r^{n_r}}^i(x))) = L(f^i, f^{i(1)}, ..., f^{i(s)}, ..., f^{i(n)})$

$\sum_{i=1}^{r} s_i = s \le n$, $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$. Далее следует обобщение определения многомерного обобщенного импульса.

Определение 1.Система функций $P_{n,r} = \left\{ p_{k,r}^i(n) \right\} = \left\{ p_{k,n,r}^i \right\}$ с мультииндексом $k = (k_1, ..., k_r), k_i \ge 0, |k| = \sum_{i=1}^{r} k_i \le n \in N$

$$p_{k,r}^i(n) = p_{k,n,r}^i(f, \overset{(1)}{f}, ..., \overset{(2n-|k|)}{f}) = \sum_{|l|=0}^{|l|=n-|k|} (-1)^{|l|} D_x^l \left(\frac{\partial L(f, ..., \overset{(n)}{f})}{\partial \overset{(l+k)i}{f}} \right) = \tag{1}$$

$$= \sum_{|l|=0}^{|l|=n-\sum_{i=1}^{r} k_i} (-1)^{\sum_{i=1}^{r} l_i} \partial_{x_1^{l_1}...x_l^{l_r}}^{\sum_{i=1}^{r} l_i} \left(\frac{\partial L(f, ..., f^{(n)})}{\partial f_{x_1^{l_1+k_1}...x_l^{l_r+k_r}}} \right), D_x^l = \partial_{x_1^{l_1}...x_l^{l_r}}^{\sum_{i=1}^{r} l_i} = \frac{\partial^{\sum_{i=1}^{r} l_i}}{\partial x_1^{l_1} ... \partial x_r^{l_r}} = \partial_{x_1^{l_1}...x_l^{l_r}}, \ i = \overline{1,m} \tag{2}$$

$k=(k_1,...,k_r), k_i\ge 0,\ i=\overline{1,r}$, $|k|=\sum_{i=1}^{r}k_i$, $x=(x_1,...,x_r)$, $l=(l_1,...,l_r), l_i\ge 0,\ i=\overline{1,r}$, $|l|=\sum_{i=1}^{r}l_i$

называется обобщенным импульсом ранга n для функции $L:T_r^nF_m\to\Re$, где

$L(f,...,f^{(n)})$- локальная запись функции L при выборе локальных координат (f) в базе F_m расслоения $T_r^nF_m$. Функция $p^i_{k,n,r}(f,f^{(1)},...,f^{(2n-|k|)})$ называются $k-ой$ ($k\in Z^r_+=\underbrace{Z_+\times ....Z_+}_{r}, Z_+=N\cup\{0\}$)

компонентой обобщенного импульса P_n ранга n по $i-$ой координате или импульсами порядка k (k-импульсами) k по $i-$ой координате обобщенного импульса P_n ранга n. При $k=0, k\in Z_+^r=(Z_+)^r=\underbrace{Z_+\times ....Z_+}_{r}, Z_+=N\cup\{0\}\Leftrightarrow k=(k_1,...k_r), k_i=0, i=\overline{1,r}$ в локальных координатах $(f^i), i=\overline{1,m}$ в базе F_m расслоения $T_r^nF_m$

$$p^i_{0,n,r}=\sum_{l=0}^{|l|=n-|0|}(-1)^l D^l_x\Big(\frac{\partial L(f,...,\overset{(n)}{f})}{\partial f^i_{x^l}}\Big)=\sum_{|l|=0}^{|l|=n-|0|}(-1)^{\sum_{i=1}^r l_i}\partial_{x_1^{l_1}...x_l^{l_r}}\Big(\frac{\partial L(f,...,\overset{(n)}{f})}{\partial f^i_{x^l}}\Big)=\sum_{|l|=0}^{|l|=n-|0|}(-1)^{\sum_{i=1}^r l_i}\partial_{x_1^{l_1}...x_l^{l_r}}\Big(\frac{\partial L(f,...,\overset{(n)}{f})}{\partial f^i_{x^l}}\Big) \tag{3}$$

нуль-импульс (функционал в уравнении Эйлера-Лагранжа в многомерной вариационной задаче).

$$p^i_{k=\bar{0},r}(n=1)=p^i_{\bar{0},1,r}(f,\overset{(1)}{f},...,\overset{(2-|\bar{0}|)}{f})=\frac{\partial L(f,...,\overset{(n)}{f})}{\partial f^i}-\sum_{j=1}^{r}\partial_{x_j}\Big(\frac{\partial L(f,...,\overset{(n)}{f})}{\partial f^i_{x_j}}\Big)$$

$$=\sum_{|l|=\sum_{i=1}^r l_i=0}(-1)^{|l|}D^l_x\Big(\frac{\partial L(f,...,\overset{(n)}{f})}{\partial \overset{(l)i}{f}}\Big)+\sum_{|l|=\sum_{i=1}^r l_i=1}(-1)^{|l|}D^l_x\Big(\frac{\partial L(f,...,\overset{(n)}{f})}{\partial \overset{(l)i}{f}}\Big)=\sum_{|l|=\sum_{i=1}^r l_i=0}(-1)^{|l|}D^l_x\Big(\frac{\partial L(f,...,\overset{(n)}{f})}{\partial \overset{(l)i}{f}}\Big)+$$

$$+\sum_{i=1,l=(l_j)=\delta^i_j,j=\overline{1,r}}^{r}(-1)^{|l|=1}D_x^{l=\delta^i_j}\Big(\frac{\partial L(f,...,\overset{(n)}{f})}{\partial \overset{(l=\delta^i_j)i}{f}}\Big)=\frac{\partial L(f,...,\overset{(n)}{f})}{\partial f^i}-\sum_{j=1}^{r}\partial_{x_j}\Big(\frac{\partial L(f,...,\overset{(n)}{f})}{\partial f^i_{x_j}}\Big),\quad \delta^l_j=\begin{cases}1, j=l & -символ\ Кронекера\\ 0, j\ne l\end{cases}$$

Теорема 1 Пусть $f^i=S^i(\bar{f}_1,\bar{f}_2,...,\bar{f}_m)$, $S:(\bar{f})\to(f)$, - невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия F_m расслоения скоростей порядка $T_r^nF_m, n=\max(|s|,|l|), i=\overline{1,m}$, тогда для $\forall l=(l_1,...,l_r), s=(s_1,...,s_r), l,s\in Z^r_+$

$$\frac{\partial f^{(l)i}(\bar{f},\overset{(1)}{\bar{f}},...,\overset{(|(l)|)}{\bar{f}})}{\partial \bar{f}^{(s)j}}=\frac{\partial(f^i(\bar{f}))^{(l)i}}{\partial\bar{f}^{(s)j}}=\frac{\partial(f^i(\bar{f}))_{x_1^{l_1}...\partial x_r^{l_r}}}{\partial\bar{f}^j_{x_1^{s_1}...\partial x_r^{s_r}}}=\begin{cases}C^s_l\cdot D^{l-s}_t\left(\dfrac{\partial f^i(\bar{f})}{\partial\bar{f}^j}\right), C^s_l=\dfrac{l!}{s!\cdot(l-s)!}, l!=\prod_{i=1}^{r}l_i!=\prod_{i=1}^{r}\prod_{k=1}^{l_i}k, l\ge s\Leftrightarrow l_i\ge s_i, i=\overline{1,r}\\ 0, l<s\ \Leftrightarrow\ \exists i:\ l_i<s_i\end{cases}=$$

$$=\varphi^l_sC^s_lD^{l-s}_x\Big(\frac{\partial f^i(\bar{f})}{\partial\bar{f}^j}\Big),\varphi^l_s=\begin{cases}1, l\ge s\Leftrightarrow l_i\ge s_i, i=\overline{1,r}\\ 0, l<s\Leftrightarrow\exists i: l_i<s_i\end{cases}=\prod_{i=1}^{r}\varphi^{l_i}_{s_i}, C^s_l=\prod_{i=1}^{r}\frac{l_i!}{s_i!(l_i-s_i)!}=\prod_{i=1}^{r}C^{s_i}_{l_i} \tag{4}$$

$$D^l_x=\partial^{\sum_{i=1}^r l_i}_{x_1^{l_1}...x_l^{l_r}}=\frac{\partial^{\sum_{i=1}^r l_i}}{\partial x_1^{l_1}...\partial x_r^{l_r}}=\partial_{x_1^{l_1}...x_l^{l_r}},\quad D^{l-s}_x=\partial^{\sum_{i=1}^r l_i-s_i}_{x_1^{l_1-s_1}...x_l^{l_r}}=\frac{\partial^{\sum_{i=1}^r l_i-s_i}}{\partial x_1^{l_1-s_1}...\partial x_r^{l_r-s_r}}=\partial_{x_1^{l_1-s_1}...x_l^{l_r-s_r}}$$

Теорема 5 (Тензор Эйлера-Лагранжа, закон преобразования импульсов при замене системы координат в базе F_m расслоения $T_r^nF_m$ $r,m,n\in N$). Пусть $L:T_r^nF_m\to\Re$ - гладкая функция.

Функция $f:(\bar{f})\to f(\bar{f})$-гладкая замена в базе многообразия F_m расслоения $T_r^{2n}F_m$.

Тогда $0\in R^r$-импульсы ранга n (функционалы в многомерной системе уравнений Эйлера)

$$p^i_{0,n,r}=\sum_{|l|=0}^{n}(-1)^lD^l_x\Big(\frac{\partial L(f,...,\overset{(n)}{f})}{\partial f^i_{x^l}}\Big)=\sum_{|l|=0}^{n|}(-1)^{\sum_{i=1}^r l_i}\partial_{x_1^{l_1}...x_l^{l_r}}\Big(\frac{\partial L(f,...,\overset{(n)}{f})}{\partial f^i_{x_1^{l_1}...x_l^{l_r}}}\Big)$$ преобразуются как **ковектор (тип(0,1))**

$$\bar{p}^i_{0,r}(n)(\bar{f},\overset{(1)}{\bar{f}},...,\overset{(2n)}{\bar{x}})=\sum_{j=1}^{m}p^j_{0,r}(n)(f,\overset{(1)}{f},...,\overset{(2n)}{f})\cdot\frac{\partial f^j(\bar{f})}{\partial\bar{f}^i}=p^j_{0,r}(n)(f,\overset{(1)}{f},...,\overset{(2n)}{f})\cdot\frac{\partial f^j(\bar{f})}{\partial\bar{f}^i}\quad i,j=\overline{1,m}, \tag{5}$$

который назовем тензором Эйлера-Лагранжа.

Доказательство. По определению многомерного обобщенного импульса

$$p^i_{k,r}(n)=p^i_{k,n,r}(f,f^{(1)},...,f^{(2n-|k|)})=\sum_{|l|=0}^{|l|=n-|k|}(-1)^{|l|}D^l_x\Big(\frac{\partial L(f,...,\overset{(n)}{f})}{\partial\overset{(l+k)i}{f}}\Big)=$$

$$=\sum_{|l|=0}^{|l|=n-\sum_{i=1}^r k_i}(-1)^{\sum_{i=1}^r l_i}\partial^{\sum_{i=1}^r l_i}_{x_1^{l_1}...x_l^{l_r}}\Big(\frac{\partial L(f,...,\overset{(n)}{f})}{\partial f_{x_1^{l_1+k_1}...x_l^{l_r+k_r}}}\Big), D^l_x=\partial^{\sum_{i=1}^r l_i}_{x_1^{l_1}...x_l^{l_r}}=\frac{\partial^{\sum_{i=1}^r l_i}}{\partial x_1^{l_1}...\partial x_r^{l_r}}=\partial_{x_1^{l_1}...x_l^{l_r}},\ i=\overline{1,m} \tag{6}$$

$$\bar{p}^j_{0,n,r}=\sum_{|s|=0}^{n}(-1)^{|s|}D^s_x\Big(\frac{\partial\bar{L}(\bar{f},...,\overset{(n)}{\bar{f}})}{\partial\bar{f}^j_{x^s}}\Big)=\sum_{|s|=\sum_{\alpha=1}^r s_\alpha=0}^{|s|=n}(-1)^{\sum_{i=1}^r s_i}\partial^{\sum_{i=1}^r s_i}_{x_1^{s_1}...x_r^{s_r}}\Big(\frac{\partial\bar{L}(\bar{f},...,\overset{(n)}{\bar{f}})}{\partial\bar{f}_{x_1^{s_1}...x_l^{s_r}}}\Big) \tag{7}$$

$$\bar L(\bar f,\dots,\overset{(n)}{\bar f}) = L(f(\bar f), D_x^{(1)} f(\bar f),\dots, D_x^{(1)} f(\bar f)) = L(f(\bar f), \overset{(1)}{f}(\bar f),\dots,\overset{(n)}{f}(\bar f))$$

$$\frac{\partial \bar L(\bar f,\dots,\overset{(n)}{\bar f})}{\partial \bar f^{j}_{x^s}} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{|l|=0}^{n} \frac{\partial L(f(\bar f),\dots,\overset{(n)}{f}(\bar f))}{\partial f^i_{x^l}} \frac{\partial f^i_{x^l}((\bar f))}{\partial \bar f^{j}_{x^s}} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{|l|=\sum_{\alpha=1}^{r} l_\alpha=0}^{n} \frac{\partial L(f(\bar f),\dots,\overset{(n)}{f}(\bar f))}{\partial f^i_{x_1^{l_1}\dots x_l^{l_r}}} \frac{\partial f^i_{x_1^{l_1}\dots x_l^{l_r}}(f(\bar f),\dots,\overset{(n)}{f}(\bar f))}{\partial \bar f^{j}_{x_1^{s_1}\dots x_l^{s_r}}} = \tag{8}$$

По теореме 1 $\dfrac{\partial f^{(l)i}(\bar f,\overset{(1)}{\bar f},\dots,\overset{(|(|l|)|)}{\bar f})}{\partial \bar f^{(s)j}} = \dfrac{\partial (f^i(\bar f))^{(l)i}}{\partial \bar f^{(s)j}} = \dfrac{\partial (f^i(\bar f))_{x_1^{l_1}\dots \partial x_r^{l_r}}}{\partial \bar f^{j}_{x_1^{s_1}\dots \partial x_r^{s_r}}} = \begin{cases} C_l^s\cdot D_t^{l-s}\left(\dfrac{\partial f^i(\bar f)}{\partial \bar f^j}\right), C_l^s = \dfrac{l!}{s!\cdot(l-s)!}, l! = \prod\limits_{i=1}^{r} l_i! = \prod\limits_{i=1}^{r}\prod\limits_{k=1}^{l_i} k, l\ge s \Leftrightarrow l_i \ge s_i, i=\overline{1,r} \\ 0, l<s \ \Leftrightarrow \ \exists i:\ l_i<s_i \end{cases} =$

$$= \varphi_s^l C_l^s D_x^{l-s}\left(\frac{\partial f^i(\bar f)}{\partial \bar f^j}\right), \varphi_s^l = \begin{cases} 1, l\ge s \Leftrightarrow l_i\ge s_i, i=\overline{1,r} \\ 0, l<s \Leftrightarrow \exists i: l_i<s_i \end{cases} = \prod_{i=1}^{r}\varphi_{s_i}^{l_i}, C_l^s = \prod_{i=1}^{r}\frac{l_i!}{s_i!(l_i-s_i)!} = \prod_{i=1}^{r} C_{l_i}^{s_i} \tag{9}$$

Подставляем в (8) правую часть (9):

$$\frac{\partial \bar L(\bar f,\dots,\overset{(n)}{\bar f})}{\partial \bar f^{j}_{x^s}} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{|l|=0}^{n} \frac{\partial L(f(\bar f),\dots,\overset{(n)}{f}(\bar f))}{\partial f^i_{x^l}} \frac{\partial f^i_{x^l}((\bar f))}{\partial \bar f^{j}_{x^s}} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{|l|=\sum_{\alpha=1}^{r} l_\alpha=0}^{n} \frac{\partial L(f(\bar f),\dots,\overset{(n)}{f}(\bar f))}{\partial f^i_{x_1^{l_1}\dots x_l^{l_r}}} \frac{\partial f^i_{x_1^{l_1}\dots x_l^{l_r}}(f(\bar f),\dots,\overset{(n)}{f}(\bar f))}{\partial \bar f^{j}_{x_1^{s_1}\dots x_l^{s_r}}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{|l|=\sum_{\alpha=1}^{r} l_\alpha=0}^{n} \frac{\partial L(f(\bar f),\dots,\overset{(n)}{f}(\bar f))}{\partial f^i_{x^l}} \varphi_s^l C_l^s D_x^{l-s}\left(\frac{\partial f^i(\bar f)}{\partial \bar f^j}\right), \varphi_s^l = \begin{cases} 1, l\ge s \Leftrightarrow l_i\ge s_i, i=\overline{1,r} \\ 0, l<s \Leftrightarrow \exists i: l_i<s_i \end{cases} \tag{10}$$

Подставляем левую часть (10) (преобразованную левую часть (8)) в (7):

$$\vec{p}^{\,j}_{0,n,r} = \sum_{|s|=\sum_{\alpha=1}^{r} s_\alpha=0}^{n} (-1)^{|s|} D_x^s\left(\frac{\partial \bar L(\bar f,\dots,\overset{(n)}{\bar f})}{\partial \bar f^{j}_{x^s}}\right) = \sum_{|s|=\sum_{\alpha=1}^{r} s_\alpha=0}^{n} (-1)^{|s|} D_x^s\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{|l|=\sum_{\alpha=1}^{r} l_\alpha=0}^{n} \frac{\partial L(f(\bar f),\dots,\overset{(n)}{f}(\bar f))}{\partial f^i_{x^l}} \varphi_s^l C_l^s D_x^{l-s}\left(\frac{\partial f^i(\bar f)}{\partial \bar f^j}\right)\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{|s|=\sum_{\alpha=1}^{r} s_\alpha=0}^{n} (-1)^{|s|} D_x^s\left(\sum_{|l|=\sum_{\alpha=1}^{r} l_\alpha=0}^{n} \varphi_s^l C_l^s \frac{\partial L(f(\bar f),\dots,\overset{(n)}{f}(\bar f))}{\partial f^i_{x^l}} D_x^{l-s}\left(\frac{\partial f^i(\bar f)}{\partial \bar f^j}\right)\right) = \sum_{|s|=\sum_{\alpha=1}^{r} s_\alpha=0}^{n} (-1)^{|s|} \sum_{|l|=\sum_{\alpha=1}^{r} l_\alpha=0}^{n} \varphi_s^l C_l^s D_x^s\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(f(\bar f),\dots,\overset{(n)}{f}(\bar f))}{\partial f^i_{x^l}} D_x^{l-s}\left(\frac{\partial f^i(\bar f)}{\partial \bar f^j}\right)\right) =$$

$$= \sum_{|s|=\sum_{\alpha=1}^{r} s_\alpha=0}^{n} (-1)^{|s|} \sum_{|l|=\sum_{\alpha=1}^{r} l_\alpha=0}^{n} \varphi_s^l C_l^s \left(\sum_{i=1}^{m} D_x^s\left(\frac{\partial L(f(\bar f),\dots,\overset{(n)}{f}(\bar f))}{\partial f^i_{x^l}} D_x^{l-s}\left(\frac{\partial f^i(\bar f)}{\partial \bar f^j}\right)\right)\right) \tag{11}$$

По теореме Лейбница $D_x^s(fg) = \sum\limits_{u=0\in R^r, u\le s}^{s\in Z_+^r} C_s^u D_x^u(f) D_x^{s-u}(g),\ \varphi_s^l = \prod\limits_{i=1}^{r}\varphi_{s_i}^{l_i}, C_l^s = \prod\limits_{i=1}^{r}\dfrac{l_i!}{s_i!(l_i-s_i)!} = \prod\limits_{i=1}^{r} C_{l_i}^{s_i}$ (12)

$$D_x^s(fg) = \sum_{u=0\in R^r, u\le s}^{s\in Z_+^r} C_s^u D_x^u(f) D_x^{s-u}(g) = \sum_{|u|=0}^{|s|} \varphi_u^s C_s^u D_x^u(f) D_x^{s-u}(g),\ \ ,\varphi_u^s = \begin{cases} 1, s\ge u \Leftrightarrow s_i\ge u_i, i=\overline{1,r} \\ 0, s<u \Leftrightarrow \exists i: s_i<u_i \end{cases} \tag{13}$$

(13) доказывается индукцией по индексу r. База индукции $r=1$ есть –это формула Лейбница
По предположению индукции и теореме Лейбница получим

$$D_x^s(fg) = D^{(s_1\dots s_r s_{r+1})}_{(x_1\dots x_r x_{r+1})}(fg) = \partial_{x_{r+1}^{s_{r+1}}}\left(D^{(s_1\dots s_r s_{r+1})}_{(x_1\dots x_r x_{r+1})}(fg)\right) = \partial_{x_{r+1}^{s_{r+1}}}\left(\sum_{u=0\in R^r, u\le s}^{s\in Z_+^r} C_s^u D_x^u(f) D_x^{s-u}(g)\right) =$$

$$= \sum_{u=0\in R^r, u\le s}^{s\in Z_+^r} \partial_{x_{r+1}^{s_{r+1}}}\left(C_s^u D_x^u(f) D_x^{s-u}(g)\right) = \sum_{u=0\in R^r, u\le s}^{s\in Z_+^r} C_s^u \partial_{x_{r+1}^{s_{r+1}}}\left(D_x^u(f) D_x^{s-u}(g)\right) \tag{14}$$

$C_s^u = \prod\limits_{i=1}^{r}\dfrac{u_i!}{u_i!(s_i-u_i)!} = \prod\limits_{i=1}^{r} C_{s_i}^{u_i}$, $C_{s_1\dots s_r}^{u_1\dots u_r} C_{s_{r+1}}^{u_{r+1}} = C_{s_1\dots s_r s_{r+1}}^{u_1\dots u_r u_{r+1}}$, $D_{x_{r+1}}^{u_{r+1}}\left(D^{(u_1,\dots,u_r)}_{(x_1\dots x_r)}(f)\right) = D^{(u_1,\dots,u_r,u_{r+1})}_{(x_1\dots,x_r,x_{r+1})}(f)$

$D_{x_{r+1}}^{s_{r+1}-u_{r+1}}\left(D^{(s_1-u_1,\dots,s_r-u_r)}_{(x_1\dots x_r)}(g)\right) = D^{(s_1-u_1,\dots,s_r-u_r,s_{r+1}-u_{r+1})}_{(x_1\dots x_r,x_{r+1})}(g)$. По теореме Лейбница(одномерный случай $r=1$)

$$\partial_{x_{r+1}^{s_{r+1}}}\left(D_x^u(f) D_x^{s-u}(g)\right) = \sum_{u_{r+1}=0}^{s_{r+1}} C_{s_{r+1}}^{u_{r+1}} D_{x_{r+1}}^{u_{r+1}}\left(D_x^u(f)\right) D_{x_{r+1}}^{s_{r+1}-u_{r+1}}\left(D_x^{s-u}(g)\right) \tag{15}$$

Подставим(15) в (14):

$$\sum_{u=0\in R^r, u\le s}^{s\in Z_+^r} C_s^u \partial_{x_{r+1}^{s_{r+1}}}\left(D_x^u(f) D_x^{s-u}(g)\right) = \sum_{u=0\in R^r, u\le s}^{s\in Z_+^r} C_s^u \sum_{u_{r+1}=0}^{s_{r+1}} C_{s_{r+1}}^{u_{r+1}} D_{x_{r+1}}^{u_{r+1}}\left(D_x^u(f)\right) D_{x_{r+1}}^{s_{r+1}-u_{r+1}}\left(D_x^{s-u}(g)\right) = \tag{16}$$

$$= \sum_{u=0\in R^r, u\le s}^{s\in Z_+^r}\sum_{u_{r+1}=0}^{s_{r+1}} C_s^u C_{s_{r+1}}^{u_{r+1}} D_{x_{r+1}}^{u_{r+1}}\left(D_x^u(f)\right) D_{x_{r+1}}^{s_{r+1}-u_{r+1}}\left(D_x^{s-u}(g)\right) = \sum_{u=0\in R^r, u\le s}^{s\in Z_+^r}\sum_{u_{r+1}=0}^{s_{r+1}} C_s^u C_{s_{r+1}}^{u_{r+1}} D_{x_{r+1}}^{u_{r+1}}\left(D_x^u(f)\right) D_{x_{r+1}}^{s_{r+1}-u_{r+1}}\left(D_x^{s-u}(g)\right) =$$

$$= \sum_{u=0\in R^r, u\le s}^{s\in Z_+^r}\sum_{u_{r+1}=0}^{s_{r+1}} C_{s_1\dots s_r}^{u_1\dots u_r} C_{s_{r+1}}^{u_{r+1}} D_{x_{r+1}}^{u_{r+1}}\left(D^{(u_1,\dots,u_r)}_{(x_1\dots x_r)}(f)\right) D_{x_{r+1}}^{s_{r+1}-u_{r+1}}\left(D^{(s_1-u_1,\dots,s_r-u_r)}_{(x_1\dots x_r)}(g)\right) =$$

$$= \sum_{u=0\in R^r, u\le s}^{s\in Z_+^r}\sum_{u_{r+1}=0}^{s_{r+1}} C_{s_1\dots s_r s_{r+1}}^{u_1\dots u_r u_{r+1}} D^{(u_1,\dots,u_r,u_{r+1})}_{(x_1\dots,x_r,x_{r+1})}(f) D^{(s_1-u_1,\dots,s_r-u_r,s_{r+1}-u_{r+1})}_{(x_1\dots x_r,x_{r+1})}(g) = \sum_{u=0\in R^{r+1}, u\le s}^{s\in Z_+^{r+1}} C_s^u D_x^u(f) D_x^{s-u}(g) \tag{17}$$

и (12),(13) доказаны. Поставляем (12) в (11) и учитывая (13) для $f = \dfrac{\partial L(f(\bar f),\dots,\overset{(n)}{f}(\bar f))}{\partial f^i_{x^l}}$, $g = D_x^{l-s}\left(\dfrac{\partial f^i(\bar f)}{\partial \bar f^j}\right)$:

$$\sum_{|s|=\sum_{\alpha=1}^{r} s_\alpha=0}^{n} (-1)^{|s|} \sum_{|l|=\sum_{\alpha=1}^{r} l_\alpha=0}^{n} \varphi_s^l C_l^s (\sum_{i=1}^{m} D_x^s (\frac{\partial L(f(\overline{f}),...,\overset{(n)}{f}(\overline{f}))}{\partial f_{x^l}^i} D_x^{l-s} (\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^j}))) =$$

$$= \sum_{|s|=\sum_{\alpha=1}^{r} s_\alpha=0}^{n} (-1)^{|s|} \sum_{|l|=\sum_{\alpha=1}^{r} l_\alpha=0}^{n} \varphi_s^l C_l^s (\sum_{i=1}^{m} (\sum_{u=0,u\le s}^{s} C_s^u D_x^u (\frac{\partial L(f(\overline{f}),...,\overset{(n)}{f}(\overline{f}))}{\partial f_{x^l}^i}) D_x^{s-u} (D_x^{l-s} (\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^j})))) =$$

$$= \sum_{|s|=\sum_{\alpha=1}^{r} s_\alpha=0}^{n} (-1)^{|s|} \sum_{|l|=\sum_{\alpha=1}^{r} l_\alpha=0}^{n} \varphi_s^l C_l^s (\sum_{i=1}^{m} (\sum_{u=0,u\le s}^{s} C_s^u D_x^u (\frac{\partial L(f(\overline{f}),...,\overset{(n)}{f}(\overline{f}))}{\partial f_{x^l}^i}) D_x^{l-u} (\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^j}))) = \quad (18)$$

$$= \sum_{|s|=\sum_{\alpha=1}^{r} s_\alpha=0}^{n} (-1)^{|s|} \sum_{|l|=\sum_{\alpha=1}^{r} l_\alpha=0}^{n} \varphi_s^l C_l^s (\sum_{i=1}^{m} (\sum_{u=0}^{|s|} \varphi_u^s C_s^u D_x^u (\frac{\partial L(f(\overline{f}),...,\overset{(n)}{f}(\overline{f}))}{\partial f_{x^l}^i}) D_x^{l-u} (\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^j}))) \quad (19)$$

Подставляем в (19) очевидное тождество $C_l^s C_s^u = C_l^u C_{l-u}^{s-u}$ (20) ,которое следует из определения

$$C_l^s C_s^u = \prod_{i=1}^{r} \frac{l_i!}{s_i!(l_i-s_i)!} \prod_{i=1}^{r} \frac{s_i!}{u_i!(s_i-u_i)!} = \prod_{i=1}^{r} \frac{l_i!}{(l_i-s_i)!u_i!(s_i-u_i)!} = \prod_{i=1}^{r} \frac{l_i!}{u_i!(l_i-u_i)!} \frac{(l_i-u_i)!}{(l_i-s_i)!(s_i-u_i)!} =$$

$$= \prod_{i=1}^{r} \frac{l_i!}{u_i!(l_i-u_i)!} \prod_{i=1}^{r} \frac{(l_i-u_i)!}{(l_i-s_i)!(s_i-u_i)!} = \prod_{i=1}^{r} C_{l_i}^{u_i} \prod_{i=1}^{r} C_{l_i-u_i}^{s_i-u_i} = C_l^u C_{l-u}^{s-u}, \ \varphi_s^l \varphi_u^s = 1 \Leftrightarrow \ge l \ge s \ge u$$ получим

$$\sum_{|s|=\sum_{\alpha=1}^{r} s_\alpha=0}^{n} (-1)^{|s|} \sum_{|l|=\sum_{\alpha=1}^{r} l_\alpha=0}^{n} \varphi_s^l C_l^s (\sum_{i=1}^{m} (\sum_{u=0}^{|s|} \varphi_u^s C_s^u D_x^u (\frac{\partial L(f(\overline{f}),...,\overset{(n)}{f}(\overline{f}))}{\partial f_{x^l}^i}) D_x^{l-u} (\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^j}))) =$$

$$= \sum_{|s|=\sum_{\alpha=1}^{r} s_\alpha=0}^{n} (-1)^{|s|} \sum_{|l|=\sum_{\alpha=1}^{r} l_\alpha=0}^{n} \varphi_s^l C_{l-u}^{s-u} (\sum_{i=1}^{m} (\sum_{u=0}^{|s|} \varphi_u^s C_s^u D_x^u (\frac{\partial L(f(\overline{f}),...,\overset{(n)}{f}(\overline{f}))}{\partial f_{x^l}^i}) D_x^{l-u} (\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^j}))) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{|l|=\sum_{\alpha=1}^{r} l_\alpha=0}^{n} \sum_{u=0,u\le l}^{l} C_l^u D_x^u (\frac{\partial L(f(\overline{f}),...,\overset{(n)}{f}(\overline{f}))}{\partial f_{x^l}^i}) D_x^{l-u} (\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^j}) (\sum_{u=0}^{|l|} (-1)^{|s|} \varphi_s^l \varphi_u^s C_{l-u}^{s-u}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{|l|=\sum_{\alpha=1}^{r} l_\alpha=0}^{n} \sum_{u=0,u\le l}^{l} C_l^u D_x^u (\frac{\partial L(f(\overline{f}),...,\overset{(n)}{f}(\overline{f}))}{\partial f_{x^l}^i}) D_x^{l-u} (\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^j}) (\sum_{l\ge s\ge u} (-1)^{|s|} C_{l-u}^{s-u}) \quad (21)$$

В последней сумме в (21) сделаем замену $l \ge s \ge u, k = s-u \Rightarrow l-u \ge k \ge 0, s = u+k$

$$\sum_{l\ge s\ge u} (-1)^{|s|} C_{l-u}^{s-u} = \sum_{s=u}^{l} (-1)^{|s|} C_{l-u}^{s-u} = \sum_{k=0}^{l-u} (-1)^{|u+k|} C_{l-u}^{s-u} = \sum_{k=0}^{l-u} (-1)^{|u+k|} C_{l-u}^{k} = (-1)^{|u|} \sum_{k=0}^{l-u} (-1)^{|k|} C_{l-u}^{k} == (-1)^{|u|} \sum_{k=0}^{l-u} (-1)^{|k|} C_{l-u}^{k} \quad (22)$$

Пусть $l-u = a, a = (a_1,....a_r), a_i \ge 0, i = \overline{1,r}$, преобразуем (22):

$$(-1)^{|u|} \sum_{k=0}^{l-u} (-1)^{|k|} C_{l-u}^{k} = (-1)^{|u|} \sum_{k=0}^{a} (-1)^{|k|} C_a^k = (-1)^{|u|} \sum_{\substack{k_1=...k_r=0 \\ a_i\ge k_i\ge 0}}^{a} (-1)^{\sum_{j=1}^{r} k_j} \prod_{j=1}^{r} C_{a_j}^{k_j} = (-1)^{|u|} \prod_{j=1}^{r} \sum_{k_j=0}^{a_j} (-1)^{k_j} C_{a_j}^{k_j} = \quad (23)$$

(23) следует из следующих очевидных преобразований $(-1)^{|u|} \sum_{\substack{k_1=...k_r=0 \\ a_i\ge k_i\ge 0}}^{a} (-1)^{\sum_{j=1}^{r} k_j} \prod_{j=1}^{r} C_{a_j}^{k_j} =$

$$= (-1)^{|u|} \sum_{\substack{k_1=...k_r=0 \\ a_i\ge k_i\ge 0}}^{a} (-1)^{k_1} ... (-1)^{k_r} \prod_{j=1}^{r} C_{a_j}^{k_j} = (-1)^{|u|} \sum_{\substack{k_1=...k_r=0 \\ a_i\ge k_i\ge 0}}^{a} \prod_{j=1}^{r} (-1)^{k_j} C_{a_j}^{k_j} = \sum_{\substack{k_1=...k_r=0 \\ a_i\ge k_i\ge 0}}^{a} (-1)^{k1+...k_r} C_{a_1}^{k_1} ... C_{a_r}^{k_r} =$$

$$\sum_{k_1=0}^{a_1} \sum_{k_2=0}^{a_2} ... \sum_{k_r=0}^{a_r} (-1)^{k1+...k_r} C_{a_1}^{k_1} ... C_{a_r}^{k_r} = (-1)^{|u|} \sum_{k_1=0}^{a_1} (-1)^{k_1} C_{a_1}^{k_1} \sum_{k_2=0}^{a_2} (-1)^{k_2} C_{a_2}^{k_2} ... \sum_{k_r=0}^{a_r} (-1)^{k_r} C_{a_r}^{k_r} = (-1)^{|u|} \prod_{j=1}^{r} \sum_{k_j=0}^{a_j} (-1)^{k_j} C_{a_j}^{k_j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-1)^{|u|} \sum_{\substack{k_1=...k_r=0 \\ a_i\ge k_i\ge 0}}^{a} (-1)^{\sum_{j=1}^{r} k_j} \prod_{j=1}^{r} C_{a_j}^{k_j} = (-1)^{|u|} \prod_{j=1}^{r} \sum_{k_j=0}^{a_j} (-1)^{k_j} C_{a_j}^{k_j}$$ и (23) доказано.

$$\sum_{k_j=0}^{a_j} (-1)^{k_j} C_{a_j}^{k_j} = \begin{cases} 1 = (-1)^0 C_0^0, a_j = 0 \\ 0 = \sum_{k_j=0}^{a_j} (-1)^{k_j} C_{a_j}^{k_j} = (1-1)^{a_j} = 0, a_j > 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, a_j = 0 \\ 0, a_j > 0 \end{cases} = \delta_{a_j}^0 = \begin{cases} 1, a_j = 0 \\ 0, a_j \ne 0 \end{cases}, a_j \in Z_+$$ -символ Кронекера (24)

Подставляем (24) в (23) получим:

$$\prod_{j=1}^{r} \sum_{k_j=0}^{a_j} (-1)^{k_j} C_{a_j}^{k_j} = \prod_{j=1}^{r} \delta_{a_j}^0 = \begin{cases} 1, \Leftrightarrow a_j = 0 \ j = \overline{1,r} \\ 0, \exists j : a_j > 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, a = 0 \in Z_+^r \\ 0, a > 0 \in Z_+^r \end{cases} = \begin{cases} 1, a = 0 \in Z_+^r \\ 0, a \ne 0 \in Z_+^r \end{cases} = \delta_a^0 = (-1)^{|u|} \sum_{k=0}^{l-u} (-1)^{|k|} C_{l-u}^{k} \quad (25)$$

Подставляем (49) в (46) :

$$(-1)^{|u|}\sum_{k=0}^{l-u}(-1)^{|k|}C_{l-u}^{k}=(-1)^{|u|}\delta_{l-u}^{0}=\begin{cases}(-1)^{|u|}, l=u\Leftrightarrow l_i=u_i, i=\overline{1,r}\\ 0, l>u\Leftrightarrow \exists i: l_i>u_i\end{cases}=(-1)^{|u|}\delta_u^l=\sum_{l\geq s\geq u}(-1)^{|s|}C_{l-u}^{s-u} \tag{26}$$

Где функция $$\delta_u^l=\begin{cases}1, l=u\Leftrightarrow l_i=u_i, i=\overline{1,r}\\ 0, l\neq u\Leftrightarrow \exists i: l_i>u_i\end{cases}, l-u\in Z_+^r \Leftrightarrow \begin{cases}1, l=u\Leftrightarrow l_i=u_i, i=\overline{1,r}\\ 0, l>u\Leftrightarrow \exists i: l_i>u_i\end{cases}, l-u\in Z_+^r \tag{27}$$

Подставляем (26) в (21) :

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m}\sum_{|l|=\sum_{\alpha=1}^{r}l_\alpha=0}^{n}\sum_{u=0,u\leq l}^{l}C_l^u D_x^u\Big(\frac{\partial L(f(\overline{f}),\ldots,\overset{(n)}{f}(\overline{f}))}{\partial f_{x^l}^i}\Big)D_x^{l-u}\Big(\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^j}\Big)\Big(\sum_{l\geq s\geq u}(-1)^{|s|}C_{l-u}^{s-u}\Big)=\\ &=\sum_{i=1}^{m}\sum_{|l|=\sum_{\alpha=1}^{r}l_\alpha=0}^{n}\sum_{u=0,u\leq l}^{l}C_l^u D_x^u\Big(\frac{\partial L(f(\overline{f}),\ldots,\overset{(n)}{f}(\overline{f}))}{\partial f_{x^l}^i}\Big)D_x^{l-u}\Big(\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^j}\Big)\big((-1)^{|u|}\delta_u^l\big)=\\ &=\sum_{i=1}^{m}\sum_{|l|=\sum_{\alpha=1}^{r}l_\alpha=0}^{n}C_l^{u=l}D_x^{u=l}\Big(\frac{\partial L(f(\overline{f}),\ldots,\overset{(n)}{f}(\overline{f}))}{\partial f_{x^l}^i}\Big)D_x^{l-l}\Big(\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^j}\Big)(-1)^{|l|}=\end{aligned} \tag{28}$$

$$=\sum_{j=1}^{m}p_{0,r}^i(n)(f,\overset{(1)}{f},\ldots,\overset{(2n)}{f})\cdot\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^j}=p_{0,r}^i(n)(f,\overset{(1)}{f},\ldots,\overset{(2n)}{f})\cdot\frac{\partial f^i(\overline{f})}{\partial \overline{f}^j}=\overline{p}_{0,r}^{\,j}(n)(\overline{f},\overset{(1)}{\overline{f}},\ldots,\overset{(2n)}{\overline{x}})=\overline{p}_{0,n,r}^{\,j}=\sum_{|s|=0}^{n}(-1)^{|s|}D_x^s\Big(\frac{\partial\overline{L}(\overline{f},\ldots,\overset{(n)}{\overline{f}})}{\partial\overline{f}_{x^s}^j}\Big)$$

Теорема 2 доказана. Результат является обобщением работы авторов [2] для $\forall r\in N$.

Литература:

1. Обобщение теоремы Гамильтона – Остроградского в расслоениях скоростей произвольного порядка / Ю.Ф. Пастухов [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия C, Фундаментальные науки. – 2016. – № 12. – С. 125–133.

2. Закон преобразования обобщенного импульса / Ю.Ф. Пастухов [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия C, Фундаментальные науки. – 2017. – № 4. – С. 85–99.

3. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / Л.Е. Евтушик [и др.] // Итоги науки и техники. Серия «Проблемы геометрии»: ВИНИТИ. – 1979. – Т. 9. – С. 5–246.

4. Инварианты в расслоениях скоростей произвольного порядка / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов, С.В. Голубева // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия C, Фундаментальные науки. – 2015. – № 12. – С. 117–123.

5. Волосова Н.К. О конечных методах решения уравнения Пуассона на прямоугольнике с краевым условием Дирихле / Н.К. Волосова [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия C, Фундаментальные науки. – 2020. – № 4. – С. 78–92.

6. Пастухов Ю.Ф. Задача построения поля линий тока по температурному разрезу / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия C, Фундаментальные науки. – 2015. – № 4. – С. 27–36.

7. Пастухов Ю.Ф. Тензор обобщенной энергии / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия C, Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 78–100.

8. Пастухов Ю.Ф. Группы преобразований, сохраняющие вариационную задачу со старшими производными / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия C, Фундаментальные науки. – 2018. – № 4. – С. 194–209.

9. Пастухов Ю.Ф. “ Необходимые условия в обратной вариационной задаче ”, Фундаментальная и прикладная математика,7:1(2001), 285-288

10. Пастухов, Ю.Ф. Лагранжевы сечения / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия C, Фундаментальные науки. – 2018. – № 12. – С. 75–99.

11. Пастухов, Ю.Ф. Свойства функции Гамильтона в вариационных задачах со старшими производными / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия C, Фундаментальные науки. – 2018. – № 4. – С. 137-153.

12. Пастухов, Ю.Ф. Обратная теорема Гамильтона / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия C, Фундаментальные науки. – 2019. – № 12. – С. 86-100.

13. Пастухов Ю.Ф. Об интегралах обобщенной энергии на экстремалях системы уравнений Эйлера-Лагранжа / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов// Вестник Полоцкого государственного университета. Серия C, Фундаментальные науки. – 2020. – № 4. – С. 93-107.

14. Пастухов Д.Ф. Минимальная разностная схема для уравнения Пуассона на параллелепипеде с шестым порядком погрешности/ Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2019. – № 4. – С. 154–174.

15. Волосова Н.К. Векторный аналог метода прогонки для решения трех- и пятидиагональных матричных уравнений/ Н.К. Волосова, К.А. Волосов, А.К. Волосова, Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2019. – № 12. – С. 101–115.

16. Условия сохранения обобщенной энергии на экстремалях системы уравнений Эйлера-Лагранжа /Пастухов Ю.Ф. и др.//Евразийское Научное Объединение. 2020. Т. 1. № 3-1(61). С. 32- 39.