УДК 539.3:534.1

ВОЛНОВЫЕ ПАКЕТЫ В ТОНКОЙ ОБОЛОЧКЕ, БЛИЗКОЙ К ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ, С УЧЕТОМ ВОЗДЕЙСТВИЯ ВНЕШНИХ СИЛ

канд. физ.-мат. наук И.В. АВДОШКА
(Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск)

Рассматривается начально-краевая задача для уравнений пологих оболочек, описывающих движение тонкой упругой оболочки, подверженной нестационарному давлению. Срединная поверхность оболочки предполагается близкой к цилиндрической, которая в общем случае может быть некруговой. На краях, которые не обязательно являются плоскими кривыми, рассматриваются условия шарнирного опирания. Начальные условия представляют собой начальный волновой пакет, т.е. начальные перемещения и скорости – функции, быстро убывающие при удалении от нулевой образующей опорного цилиндра. С использованием комплексного ВКБ-метода строится формальное асимптотическое решение задачи в виде пакетов изгибно-плоскостных волн, бегущих в окружном направлении оболочки. Рассмотрены примеры численных расчетов итоговых уравнений, иллюстрирующие влияние начальной погиби на протекание волнового процесса. В случае параболической погиби краевая задача нулевого приближения имеет явное решение.

Введение. Вопрос о колебаниях и устойчивости цилиндрических оболочек, имеющих начальные погиби, обусловленные технологическими неточностями, неоднократно обсуждался в ряде исследований. При этом установлено, что даже небольшие отклонения в форме срединной поверхности от цилиндра существенно влияют на величину критической нагрузки, частоты собственных колебаний, области динамической неустойчивости и т.д.

В настоящей статье асимптотический метод интегрирования уравнений пологих оболочек, изложенный в [1], обобщается на случай оболочек, отличных от оболочек нулевой гауссовой кривизны. Рассматривается движение волновых пакетов в оболочке, срединная поверхность которой близка к цилиндрической, а кривизна и длина переменны. Также исследуется влияние динамических усилий на характер волнообразования.

Постановка задачи. Рассмотрим тонкую упругую оболочку, поверхность которой близка к опорной цилиндрической поверхности, в общем случае некруговой и с косыми краями. Опорная поверхность задается векторным уравнением:

$$\mathbf{r_0}(s,\theta)=R\left(\boldsymbol{\rho}(\theta)+\mathrm{k}s\right), \tag{1}$$

где k – орт оси Oz; $\rho(\theta)$ – радиус-вектор направляющей цилиндра в плоскости Oxy; s – продольная координата; θ – долготный угол; R – характерный размер срединной поверхности.

Предполагаем, что рассматриваемая нами оболочка находится на расстоянии $\mu Rf(s, \theta)$ от поверхности (1), где μ – некоторый малый параметр, а $f(s, \theta)$ описывает форму погиби оболочки. Расстояние $\mu Rf(s, \theta)$ откладывается по направлению нормали к (1) в соответствующей точке. Таким образом, векторное уравнение срединной поверхности оболочки имеет вид:

$$\mathrm{r}(s,\theta)=\mathrm{r_0}+\mu Rf(s,\theta)\mathrm{n_0}, \tag{2}$$

где $\mathrm{n_0}(s,\theta)$ – единичный вектор внешней нормали опорной поверхности:

$$\mathrm{n_0}(s,\theta)=\mathrm{i}\frac{\rho(\theta)\cos(\theta)+\rho'_\theta(\theta)\sin(\theta)}{\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2_\theta(\theta)}}+\mathrm{j}\frac{\rho(\theta)\sin(\theta)-\rho'_\theta(\theta)\cos(\theta)}{\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2_\theta(\theta)}}.$$

Штрих в формуле для $\mathrm{n_0}(s,\theta)$ означает дифференцирование по координате, указанной в качестве индекса внизу.

Предположим, что $f(s,\theta)$, $|\rho(\theta)|$ вместе со своими производными имеют порядок $O(1)$. Вычислим основные геометрические характеристики рассматриваемой оболочки в координатах s, θ.

Коэффициенты первой и второй квадратичной формы, отнесенные к характерному размеру R, имеют вид:

$$A_1^2 = 1+\mu^2 \left(f_s' \right)^2, \; A_{12} = r_\theta' r_s' = \mu^2 f_s' f_\theta', \; A_2^2 = \rho^2 + \rho_\theta'^2 + 2\mu f \frac{\rho^2 + 2\rho_\theta'^2 - \rho\rho_{\theta\theta}''}{\sqrt{\rho^2+\rho_\theta'^2}} + O\left(\mu^2\right);$$

$$L_1 = f_{ss}''\mu + O\left(\mu^2\right), \; L_{12} = f_{\theta s}''\mu + O\left(\mu^2\right), \; L_2 = -\frac{\rho^2 + 2\rho_\theta'^2 - \rho\rho_{\theta\theta}''}{\sqrt{\rho^2+\rho_\theta'^2}} + O(\mu). \quad (3)$$

Введем новую окружную координату φ по формуле $d\varphi = d\theta\sqrt{\rho^2+\rho_\theta'^2}$. Ее геометрический смысл – длина направляющей опорного цилиндра, отложенная от нулевого меридиана и отнесенная к характерному размеру R. В системе координат s, φ – параметры геометрии оболочки, отнесенные к R, примут вид:

$$A_1^2 = 1+\mu^2 \left(f_s' \right)^2, \; A_{12} = \mu^2 f_s' f_\varphi', \; A_2^2 = 1 + 2k(\varphi) f \mu + O(\mu);$$

$$L_1 = f_{ss}''\mu + O\left(\mu^2\right), \; L_{12} = f_{\varphi s}''\mu + O\left(\mu^2\right), \; L_2 = -k(\varphi) + O(\mu), \quad (4)$$

где $k(\varphi)$ – кривизна направляющей опорного цилиндра. Для радиусов кривизны получаем:

$$\frac{R}{R_1} = -\frac{L_1}{A_1^2} = -f_{ss}''\mu + O\left(\mu^2\right), \; \frac{R}{R_{12}} = \frac{L_{12}}{A_1A_2} = f_{s\varphi}''\mu + O\left(\mu^2\right), \; \frac{R}{R_2} = -\frac{L_2}{A_2^2} = k(\varphi) + O(\mu). \quad (5)$$

Пусть края оболочки задаются соотношениями:

$$s_1(\varphi) \le s \le s_2(\varphi); \quad \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2. \quad (6)$$

Для исследования движения рассматриваемой оболочки воспользуемся системой уравнений пологих оболочек [2]:

$$\varepsilon^4\Delta^2 W + \Delta_R\Phi + \varepsilon^2\Delta_T W + \varepsilon^2\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0;$$

$$\varepsilon^4\Delta^2\Phi - \Delta_R W = 0, \quad (7)$$

где

$$\Delta z = \frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial z}{\partial s}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)\right];$$

$$\Delta_R z = \frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{A_2R}{A_1R_2}\frac{\partial z}{\partial s}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{A_1R}{A_2R_1}\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{R}{R_{12}}\frac{\partial z}{\partial s}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{R}{R_{12}}\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)\right];$$

$$\Delta_T z = \frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{A_1T_2}{A_2}\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(T_3\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(T_3\frac{\partial z}{\partial s}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{A_2T_1}{A_1}\frac{\partial z}{\partial s}\right)\right];$$

$$\varepsilon^8 = \frac{h^2}{12R^2\left(1-\nu^2\right)}, \; W = \varepsilon^4\frac{W'}{R}, \; \Phi = \frac{\Phi'}{EhR\varepsilon^4}, \; \left(T_1^0, T_2^0, S\right) = -Eh\varepsilon^6\left(T_1, T_2, T_3\right), \; t = \frac{t'}{t_c}, \; t_c^2 = \frac{R^2\rho}{E\varepsilon^6},$$

где ε – естественный малый параметр; W' и Φ' – нормальный прогиб и функция напряжений соответственно; h – толщина оболочки; E, ν, ρ – модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала оболочки соответственно; t' – время; t_c – характерное время, T_1^0, T_2^0; S – мембранные усилия в срединной поверхности оболочки.

Система (7) описывает движение оболочки произвольного очертания с использованием не обязательно ортогональной системы координат. Для рассмотрения движения оболочки, определяемой уравнением (2), подставим в систему (7) значения параметров (4), (5).

Пусть функции $k(\varphi)$, $T_i(\varphi,t)$ вместе со своими производными являются функциями порядка $O(1)$.

Выберем малый параметр μ таким образом, чтобы влияние начальной погиби $\mu Rf(s,\theta)$ сказывалось уже в нулевом приближении итерационного процесса. Для этого положим $\mu=\varepsilon^2$, т.е. будем считать, что характерное значение погиби $\mu Rf(s,\theta)$ имеет порядок $(R/h)^{1/2}$.

Для исследования основного напряженного состояния на краях оболочки (6) рассмотрим условия шарнирного опирания, которые с точностью до величин ε^2 имеют вид [2]:

$$W=\frac{\partial^2 W}{\partial s^2}=0\,;\;\Phi=\frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2}=0\quad\text{при}\quad s=s_1(\varphi),\; s=s_2(\varphi). \tag{8}$$

Рассмотрим начальные условия [1]:

$$W\big|_{t=0}=W_0^*(s,\varphi,\varepsilon)F_0\,;\quad \dot W\big|_{t=0}=i\varepsilon^{-1}V_0^*(s,\varphi,\varepsilon)F_0\,; \tag{9}$$

$$F_0=F_0(\varphi,\varepsilon)=exp\left\{i\varepsilon^{-1}\left(a_0\varphi+\frac{1}{2}b_0\varphi^2\right)\right\},$$

где $\operatorname{Im} b_0>0$, a_0 ($a_0\neq 0$) – вещественное число; W_0^*, V_0^* – комплекснозначные функции, имеющие в направлении φ конечное число осцилляций с изменяемостью $\varepsilon^{-1/2}$.

Метод решения. Формальное асимптотическое решение начально-краевой задачи (7)…(9) построим методом, описанным в [1]. Рассмотрим самосопряженную краевую задачу, состоящую из уравнения:

$$\frac{d^2}{ds^2}\left(g_2(s)\frac{d^2z}{ds^2}\right)+\frac{d}{ds}\left(g_1(s)\frac{dz}{ds}\right)+g_0(s)z-\lambda z=0, \tag{10}$$

где g_2, g_1, g_0 – некоторые достаточное число раз дифференцируемые вещественные функции, конкретный вид которых будет указан ниже, с граничными условиями

$$z=\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}=0, \tag{11}$$

заданными на краях $s=s_1(\varphi)$, $s=s_2(\varphi)$. Обозначим систему собственных функций самосопряженной краевой задачи (10), (11) через $z_1(s)$, $z_2(s)$, …, а соответствующую бесконечную последовательность собственных чисел обозначим через λ_1, λ_2, … Указанная система функций будет ортонормированной. Кроме того, и собственные функции, и собственные числа действительны.

Пусть функции W_0^*, V_0^* из (9) удовлетворяют соответствующим граничным условиям (11), заданным на краях (6). Это требование с точностью до величин $O(\varepsilon^{1/2})$ совпадает с требованием согласованности начальных условий (9) и граничных условий (8), заданных на краях (6). В случае выполнения последнего предположения для любого $\varphi\in[\varphi_1,\varphi_2]$ функции W_0^*, V_0^* могут быть разложены в абсолютно и равномерно сходящиеся на отрезке $[s_1(\varphi), s_2(\varphi)]$ ряды [3]:

$$W_0^*=\sum_{n=1}^{\infty}W_{n0}(\varphi,\varepsilon)z_n(s,\varphi,0)\,,\text{ где } W_{n0}=\int_{s_1(\varphi)}^{s_2(\varphi)}W_0^*(s,\varphi,\varepsilon)z_n(s,\varphi,0)\,ds\,;$$

$$V_0^*=\sum_{n=1}^{\infty}V_{n0}(\varphi,\varepsilon)z_n(s,\varphi,0)\,,\text{ где } V_{n0}=\int_{s_1(\varphi)}^{s_2(\varphi)}V_0^*(s,\varphi,\varepsilon)z_n(s,\varphi,0)\,ds\,. \tag{12}$$

Представим функции W, Ф в виде суперпозиции n-ных волновых пакетов

$$W(s,\varphi,t,\varepsilon)=\sum_{n=1}^{N} W_n(s,\varphi,t,\varepsilon), \quad \Phi(s,\varphi,t,\varepsilon)=\sum_{n=1}^{N} \Phi_n(s,\varphi,t,\varepsilon) \tag{13}$$

с центрами на образующих $\varphi = q_n(t)$, где $q_n(0) = 0$. В силу линейности и однородности уравнений (7) функции W_n, Φ_n, очевидно, будут удовлетворять этой же системе уравнений с заменой W на W_n и Ф на Φ_n. Ниже будем называть эту систему системой уравнений для n-ного волнового пакета. Начальные условия для функций W_n, Φ_n имеют вид:

$$W_n\big|_{t=0} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m/2} w_{nm}^{0} z_n\big|_{t=0} F_0, \quad \dot{W}_n\big|_{t=0} = i\varepsilon^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m/2} v_{nm}^{0} z_n\big|_{t=0} F_0 . \tag{14}$$

Граничные условия на краях $s = s_i(\varphi)$, $i = 1, 2$ для n-ного волнового пакета имеют тот же вид, что и исходные граничные условия (8) для функций W, Ф.

Перейдем к локальной системе координат, связанной с центром n-ного волнового пакета, по формуле:

$$\varphi = q_n(t) + \varepsilon^{1/2}\xi_n . \tag{15}$$

Разложим коэффициенты системы уравнений (7) R/R_i, R/R_{12}, A_i, A_i^{-1}, T_i в соответствующие ряды по переменной φ в окрестности точки $q_n(t)$. Решение полученной начально-краевой задачи для n-ного волнового пакета будем искать в виде:

$$W_n = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m/2} w_{nm}(s,\xi_n,t) F_n, \quad \Phi_n = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m/2} f_{nm}(s,\xi_n,t) F_n ; \tag{16}$$

$$F_n = exp\left\{ i\left[\varepsilon^{-1}\int_0^t \omega_n(\tau)d\tau + \varepsilon^{-1/2} p_n(t)\xi_n + \frac{1}{2} b_n(t)\xi_n^2 \right] \right\}; \quad \operatorname{Im} b_n(t) > 0 \quad \text{для любого} \quad 0 \le t \le t' < +\infty ,$$

где ω_n, p_n, b_n – дважды дифференцируемые по t функции для любого $t > 0$, а w_{nm}, f_{nm} – полиномы по ξ_n с достаточным числом раз дифференцируемые по s и t комплексными коэффициентами.

Укажем механический смысл величин, входящих в (16): $|\omega_n(t)|$ имеет смысл мгновенной частоты колебаний оболочки; $p_n(t)$ определяет изменяемость в направлении φ; $b_n(t)$ характеризует скорость затухания амплитуды волн при удалении от центра $\varphi = q_n(t)$; w_{nm}, f_{nm} – амплитудные функции.

Подстановка (16) в соответствующее уравнение приводит к последовательности краевых задач, состоящей из уравнений:

$$\sum_{j=0}^{m} L_{nj} w_{n\,m-j} = 0 , \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{17}$$

Здесь

$$L_{n0}y = \frac{k^2[q_n]}{p_n^4}\frac{\partial^4 y}{\partial s^4} + \frac{2k[q_n]}{p_n^2}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2 f(s,q_n)}{\partial s^2}\frac{\partial y}{\partial s}\right) + \left[\frac{k[q_n]}{p_n^2}\frac{\partial^4 f(s,q_n)}{\partial s^4} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial^2 f(s,q_n)}{\partial s^2}\right)^2 + p_n^4 - T_2(s,q_n(t),\ t)\,p_n^2 - (\omega_n - \dot{q}_n p_n)^2 \right] y ; \tag{18}$$

$$L_{n1} = b_n\xi_n L_p + \xi_n L_q + \dot{p}_n \xi_n L_\omega - iL_p \frac{\partial}{\partial \xi_n};$$

$$L_{n2} = \frac{\xi_n^2}{2}\Big(b_n^2 L_{pp} + 2b_n L_{pq} + L_{qq} + \dot{p}_n^2 L_{\omega\omega} + 2\dot{p}_n L_{\omega q} +$$

$$2\dot{p}_n b_n L_{\omega p} + \dot{b}_n L_\omega\Big) + a_{n0}\frac{\partial^2}{\partial \xi_n^2} + a_{n1}\xi_n \frac{\partial}{\partial \xi_n} + a_{n2}\frac{\partial}{\partial t} + a_{n3};$$

$$a_{n0} = -\frac{1}{2}L_{pp}, \quad a_{n1} = -i(b_n L_{pp} + L_{pq} + \dot{p}_n L_{\omega p}), \quad a_{n2} = -iL_\omega, \quad a_{n3} = -i\left(\frac{1}{2}b_n L_{pp} + \frac{1}{2}\dot{\omega}_n L_{\omega\omega} + \dot{p}_n L_{\omega p}\right) + G_n;$$

$$G_n y = i\Bigg[\frac{4k}{p_n^3}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(f'''_{ss\varphi}y\right) + \frac{2k}{p_n^3}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(f''_{s\varphi}\frac{\partial y}{\partial s}\right) + \frac{2k'_\varphi f''_{ss}}{p_n^3}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + \frac{2f''_{ss}}{p_n}\frac{\partial}{\partial s}\left(f''_{s\varphi}y\right) +$$

$$+\frac{2kf''_{s\varphi}}{p_n^3}\frac{\partial^3 y}{\partial s^3} + \frac{2f''_{s\varphi}}{p_n}\frac{\partial}{\partial s}\left(f''_{ss}y\right) + \frac{4kk'_\varphi}{p_n^5}\frac{\partial^4 y}{\partial s^4} + 2p_n T_3\frac{\partial y}{\partial s} + \left(p_n\frac{\partial T_3}{\partial s} + p_n T'_{2\varphi} - \ddot{q}_n p_n\right)y\Bigg].$$

Коэффициенты p, q, ω здесь и ниже означают дифференцирование по соответствующей переменной.

Граничные условия для первых трех приближений примут вид:

$$w_{n0} = \frac{\partial^2 w_{n0}}{\partial s^2} = 0; \tag{19}$$

$$w_{n1} + \xi_n s'\frac{\partial w_{n0}}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial^2 w_{n1}}{\partial s^2} + \xi_n s'\frac{\partial^3 w_{n0}}{\partial s^3} = 0; \tag{20}$$

$$w_{n2} + \xi_n s'\frac{\partial w_{n1}}{\partial s} + \frac{\xi_n^2 s''}{2}\frac{\partial w_{n0}}{\partial s} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 w_{n2}}{\partial s^2} + \xi_n s'\frac{\partial^3 w_{n1}}{\partial s^3} + \frac{\xi_n^2}{2}\left[s''\frac{\partial^3 w_{n0}}{\partial s^3} + s'^2\frac{\partial^4 w_{n0}}{\partial s^4}\right] + \frac{6}{p_n^2}\frac{\partial^4 w_{n0}}{\partial s^2 \partial \xi_n^2} - \frac{4ib_n\xi_n}{p_n^2}\frac{\partial^3 w_{n0}}{\partial s^2 \partial \xi_n} = 0. \tag{21}$$

Зададим конкретный вид коэффициентов уравнения (10). Пусть левая часть уравнения (10) совпадает с выражением (18). Тогда коэффициенты g_2, g_1, g_0 имеют вид:

$$g_2 = \frac{k^2\left(q_n(t)\right)}{p_n^4(t)}; \qquad g_1 = \frac{2k\left(q_n(t)\right)}{p_n^2(t)}\frac{\partial^2 f\left(s, q_n(t)\right)}{\partial s^2};$$

$$g_0 = \frac{k\left(q_n(t)\right)}{p_n^2(t)}\frac{\partial^4 f\left(s, q_n(t)\right)}{\partial s^4} + \left(\frac{\partial^2 f\left(s, q_n(t)\right)}{\partial s^2}\right)^2 + p_n^4(t) - T_2\left(s, q_n(t),\ t\right)p_n^2(t) \tag{22}$$

и параметрически зависят от функций $p_n(t)$, $q_n(t)$ и от времени t явно. Это означает, что и собственные функции z_n, и собственные числа λ_n также зависят от указанных параметров.

Решение последовательности краевых задач (17) с граничными условиями (19)…(21) будем искать в виде:

$$w_{n0} = P_{n0}(\xi_n, t)\, z_n[s, q_n(t), t]; \tag{23}$$

$$w_{n1} = P_{n1}(\xi_n, t)\, z_n[s, q_n(t), t] + w_{n1}^{(p)}(s, \xi_n, t); \tag{24}$$

$$w_{n2} = P_{n2}(\xi_n,\, t)\, z_n[s,\, q_n(t),\, t] + w_{n2}^{(p)}(s,\, \xi_n,\, t), \tag{25}$$

где P_{ni} – полиномы аргумента ξ_n; $w_{n1}^{(p)}$, $w_{n2}^{(p)}$ – какие-либо частные решения краевых задач соответственно в первом и втором приближениях.

Условие разрешимости краевой задачи (17), (19) в нулевом приближении имеет вид

$$\omega_n = \dot{q}_n p_n - H_n^{\pm}\left[p_n(t), q_n(t), t\right] \tag{26}$$

и представляет собой формулу для мгновенной частоты колебаний ω_n, где $H_n^{\pm}$ – функция Гамильтона рассматриваемой задачи:

$$H_n^{\pm} = \pm\sqrt{\lambda_n}. \tag{27}$$

Неоднозначность в определении ω_n связана с наличием двух ветвей решений, отвечающих функциям H_n^{+} и H_n^{-}. Соответствующие им n^{+} и n^{-} волновые пакеты в начальный момент времени движутся в противоположные стороны от нулевой образующей. В дальнейшем, для определенности изложения рассматриваем решение, соответствующее H_n^{+}, при этом верхний индекс «+» опускается.

В первом приближении (17), (20) получаем систему Гамильтона

$$\dot{q}_n = H_p; \quad \dot{p}_n = -H_q \tag{28}$$

с начальными условиями

$$q_n(0) = 0;\ p_n(0) = a_0. \tag{29}$$

Условия разрешимости краевой задачи во втором приближении (17), (21) приводят к уравнению Риккати для нахождения функции b_n:

$$\dot{b}_n + H_{pp} b_n^2 + 2H_{pq} b_n + H_{qq} = 0 \tag{30}$$

с начальным условием

$$b_n(0) = b_0 \tag{31}$$

и амплитудному уравнению для нахождения P_{n0}:

$$a_{n0}^{*} \frac{\partial^2 P_{n0}}{\partial \xi_n^2} + a_{n1}^{*} \xi_n \frac{\partial P_{n0}}{\partial \xi_n} + a_{n2}^{*} \frac{\partial P_{n0}}{\partial t} + a_{n3}^{*} P_{n0} = 0, \tag{32}$$

$$\begin{gathered} a_{n0}^{*}(t) = \frac{1}{2} H_{pp}, \qquad a_{n1}^{*}(t) = i(b_n H_{pp} + H_{pq}), \qquad a_{n2}^{*} = i, \qquad \eta_n = \int\limits_{s_1(\varphi)}^{s_2(\varphi)} z_n^2 ds, \\ a_{n3}^{*} = \frac{i}{2H_n}\left\{ b_n H_n H_{pp} - \dot{\omega}_n + 2H_p H_q + \frac{1}{\eta_n} \int\limits_{s_1(\varphi)}^{s_2(\varphi)} \left(L_p z_q + L_\omega \dot{z}_n + iG_n z_n \right) z_n ds \right\}. \end{gathered} \tag{33}$$

Решение амплитудного уравнения (32) в виде полинома $P_{n0}(\xi_n,\ t;\ d_{nm}) = \sum\limits_{k=0}^{M_{n0}} A_{nk}(t)\xi_n^k$ степени M_{n0} приводится в [1].

В случае произвольной функции $f(s,\, \varphi)$ не представляется возможным найти явные выражения собственных чисел и функций задачи в нулевом приближении (10) с учетом (22), (11) и, соответственно, явное значение функции Гамильтона (27) и выражающихся через нее условий разрешимости. Явные выражения удается получить лишь при рассмотрении некоторых частных случаев формы начальной погиби.

Случай параболической погиби. Рассмотрим важную с точки зрения приложений параболическую погибь, определяемую формулой

$$f(s,\varphi) = a(\varphi)s^2 + b(\varphi)s + c(\varphi). \tag{34}$$

Уравнение (10) с учетом (22), (34) примет вид

$$\frac{k^2}{p_n^4}\frac{d^4 z}{ds^4} + \frac{4ka(\varphi)}{p_n^2}\frac{d^2 z}{ds^2} + \left(4a(\varphi)^2 + p_n^4 - T_2 p_n^2\right)z - \lambda z = 0. \tag{35}$$

Предположим также, что функции T_2, T_3 не зависит от s.

Удовлетворяя граничным условиям (11), будем искать функцию z в виде

$$z_n(s, \varphi) = \sin[\lambda_n^* (s - s_1(\varphi))], \tag{36}$$

где

$$\lambda_n^*(\varphi) = \pi n \big/ \left(s_2(\varphi) - s_1(\varphi)\right). \tag{37}$$

Подставляя (36) в (35), получим равенство для определения собственных чисел краевой задачи (35), (11):

$$\lambda_n = \frac{k^2 \lambda_n^{*4}}{p_n^4} - \frac{4ka(\varphi)\lambda_n^{*2}}{p_n^2} + 4a(\varphi)^2 + p_n^4 - T_2 p_n^2. \tag{38}$$

Таким образом, в данном случае бесконечные системы $\{z_n\}$, $\{\lambda_n\}$ определяются равенствами (36), (38), а функция Гамильтона имеет вид:

$$H_n^{\pm}[p_n, q_n, t] = \pm\sqrt{\left(\frac{k\lambda_n^{*2}}{p_n^2} - 2a(q_n)\right)^2 + p_n^4 - T_2 p_n^2}, \tag{39}$$

что позволяет в явном виде формулировать итоговые систему Гамильтона (28), уравнение Риккати (30) и амплитудное уравнение (32), где коэффициенты a_{n0}^*, a_{n1}^*, a_{n2}^* сохраняют прежний вид (с учетом формулы (39)), а формула для коэффициента a_{n3}^* преобразуется следующим образом:

$$a_{n3}^* = \frac{i}{H_n}\left\{\frac{b_n H_n H_{pp}}{2} - \frac{\dot\omega_n}{2} - H_p H_q - \frac{7k^2\lambda_n^3\lambda_n'}{p_n^5} + \frac{6ak\lambda_n\lambda_n'}{p_n^3} + p_n^3\frac{l'}{l} - p_n T_2\frac{l'}{2l} + \right. \tag{40}$$
$$\left. + \frac{7a'k\lambda_n^2}{p_n^3} + \frac{2k'a\lambda_n^2}{p_n^3} - \frac{2kk'\lambda_n^4}{p_n^5} - \frac{2aa'}{p_n} - \frac{p_n T_2'}{2} + \frac{\ddot q_n p_n}{2} - \frac{8\lambda_n^4 k^2}{p_n^5}\frac{l'}{l}\right\}, \quad l = s_2(\varphi) - s_1(\varphi),$$

где штрих означает производную по φ, а параметры k, λ_n, a, l, T_2 и их производные взяты при $\varphi = q_n(t)$.

Заметим, что при $a(\varphi) \equiv 0$ функция Гамильтона H_n, определяемая формулой (39), с точностью до обозначений совпадает с аналогичной функцией для цилиндрической оболочки [4], если же для любого $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$ $a(\varphi) < 0$ ($a(\varphi) > 0$), то рассматривается выпуклая (вогнутая) оболочка.

Стационарный волновой пакет. Сравнение с известными результатами. Рассмотрим стационарный волновой пакет в некруговой оболочке с погибью и с косыми краями, подверженной действию кольцевого усилия $T_2(\varphi)$. Пусть $q_w = 0$, p_w – решения вырожденной системы Гамильтона $H_p = 0$, $H_q = 0$, а b_w – решение вырожденного уравнения Риккати: $H_{pp}b_n^2 + 2H_{pq}b_n + H_{qq} = 0$.

Тогда, если $p_n(0) = p_w$, $b_n(0) = b_w$, то начальный волновой пакет (9) не распадается на n^+ и n^- волновые пакеты, а решением задачи динамики оболочки с погибью будет стационарный волновой пакет. Обозначим через ω^2 квадрат частоты колебаний стационарного волнового пакета $\omega^2 = H_n^2 + O(\varepsilon)$, где $H_n = H_n^+(p_w, 0, 0)$. В случае параболической погиби (34) квадрат частоты будет иметь вид

$$\omega^2 = \omega_0^2 + O(\varepsilon), \quad \omega_0^2 = \left(\frac{k(q_w)\pi^2 n^2}{p_w^2 l^2(q_w)} - 2a(q_w) \right)^2 + p_w^4 - T_2(q_w)\, p_w^2, \tag{41}$$

где $l = s_2(\varphi) - s_1(\varphi)$, ω_0^2 — квадрат частоты в нулевом приближении.

Случай круговой оболочки с прямыми краями. Проведем сравнение частоты стационарного волнового пакета с частотой собственных колебаний оболочки с погибью, найденной в работе [5]. В этой статье рассмотрена оболочка постоянной длины L, близкая к круговому цилиндру радиуса R, нагруженная нормальным давлением q, так, что $T_2^0 = qR$. Ее края свободно оперты. В данном случае рассматривается параболическая погибь, которая в размерных переменных определяется формулой:

$$F(z) = \delta_0(1 - 4z^2/L^2), \tag{42}$$

где z – длина образующей опорного цилиндра; $-L/2 \le z \le L/2$. В результате разделения переменных для размерной частоты колебаний получена формула:

$$\omega^2 = \frac{E}{\rho R^2}\left[\varepsilon^8 n'^4 + \left(\frac{m'\pi R}{n'L}\right)^4 + \frac{16\delta_0 R}{L^2}\left(\frac{m'\pi R}{n'L}\right)^2 + \frac{64\delta_0^2 R^2}{L^4} - \frac{qR}{Eh} n'^2 \right], \tag{43}$$

где m' и n' – число полуволн в осевом направлении и волновое число в окружном направлении соответственно. В остальном, в (43), использованы наши обозначения.

Далее в рассматриваемой работе проводится работа по нахождению наименьшей по m' и n' частоте ω^2 для того, чтобы исследовать влияние погиби на наинизшую частоту собственных колебаний. В частности, указывается, что минимальное значение ω^2 достигается при $m' = 1$, что далее и полагаем. Кроме того, решаются алгебраические уравнения – условия минимума, и на основании полученных решений приводятся графики для различных значений параметров погиби и давления.

Вернемся к нашим результатам. Удовлетворяя всем описанным условиям, получаем: неравенства (6) принимают вид

$$-L/(2R) \le s \le L/(2R), \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \tag{44}$$

т.е. $l(\varphi) \equiv L/R$; $k(\varphi) \equiv 1$; $T_2 = qR/(Eh\varepsilon^6)$. Параметр погиби $a(\varphi)$ с учетом формул (2), (34) и (42) будет иметь вид: $a = -4\delta_0 R / (L^2 \varepsilon^2)$.

С учетом последних равенств формула (41) преобразуется к виду:

$$\omega_0^2 = \left(\frac{\pi^2 n^2 R^2}{p_w^2 L^2} + 8\frac{\delta_0 R}{L^2 \varepsilon^2} \right)^2 + p_w^4 - \frac{qRp_w^2}{Eh\varepsilon^6}. \tag{45}$$

Ниже полагаем $n = 1$, при котором, очевидно, достигается наименьшее значение величины ω_0^2. Переходя к размерному времени в формуле (16), получим формулу для размерной частоты:

$$\omega_{разм}^2 = \frac{\omega_0^2 E\varepsilon^4}{R^2\rho} + O(\varepsilon) = \frac{E}{R^2\rho}\left(\frac{\pi^4 R^4 \varepsilon^4}{p_w^4 L^4} + \frac{16\pi^2 R^3 \delta_0 \varepsilon^2}{p_w^2 L^4} + \frac{64\delta_0^2 R^2}{L^4} + p_w^4 \varepsilon^4 - \frac{qRp_w^2}{Eh\varepsilon^2} \right) + O(\varepsilon), \tag{46}$$

где $p_n = p_w$, $q_n = 0$ – решение вырожденной системы Гамильтона, что является необходимым условием минимальности гамильтониана (39) по p_n, q_n. Здесь условие $H_{pp}[p_w,0,0] > 0$ является достаточным условием минимальности (46). Таким образом, в неявной форме нами учтены все условия минимальности частоты (46).

В силу независимости параметров задачи от окружной координаты φ, получим, что решением вырожденной системы Гамильтона будет $b_w = 0$, т.е. решение не будет локализовано, а покроет всю поверхность оболочки. Так как p_w/ε является волновым числом, положим в (43) $n' = p_w/\varepsilon$. Получаемая таким образом формула полностью совпадает с (46).

Итак, при учете всех предположений работы [5] нулевое приближение наименьшей частоты колебаний стационарного волнового пакета совпадает с наименьшей частотой собственных колебаний шарнирно опертой оболочки с однородной по окружной координате параболической погибью, близкой к круговому цилиндру с прямыми краями, под действием однородного нормального давления.

Пример нестационарного волнового пакета. Здесь приводятся результаты численных расчетов для случая параболической погиби оболочки (34), в ходе которых исследовалось влияние погиби различной формы (выпуклость, вогнутость, неосесимметричная погибь).

Во всех случаях опорный цилиндр являлся круговым с кривизной $k = 1$, прямые края ($s_1 = 0$, $s_2 = 1$) шарнирно оперты. Считалось, что оболочка свободна от нагрузки, а форма погиби определяется формулой:

$$f(s,\varphi) = c(\varphi)\, s\,(1 - s). \tag{47}$$

Были приняты следующие значения параметров:

$$R/h = 100;\ n = 1;\ \nu = 0{,}3;\ a_0 = 2;\ b_0 = i;\ w^{\circ}_{n0} = (1 + i)(1 + \zeta + \zeta^2). \tag{48}$$

Расчеты проводились для трех значений функции $c(\varphi)$. На рисунках графиков (рис. 1…3), соответствующих этому примеру, цифрой 1 обозначены кривые, соответствующие оболочке, получающейся в результате малого изгиба оси круговой цилиндрической оболочки. В этом случае

$$c(\varphi) = -0{,}5 \cos\varphi. \tag{49}$$

Цифра 2 соответствует $c(\varphi) = 0{,}5$, т.е. случаю равномерно выпуклой оболочки, а цифра 3 – $c(\varphi) = -0{,}5$ (равномерно вогнутая оболочка).

Как свидетельствуют графики (рис. 1, б), изображающие зависимость координаты центра волнового пакета от времени, в случае погиби (49) происходит отражение волнового пакета от некоторых образующих. При этом колебания локализуются в окрестности наиболее вогнутой образующей, которая является «наиболее слабой», так как, как показано в [6], в ее окрестности оболочка теряет устойчивость. В случае же равномерной погиби (графики 2, 3) происходит равномерное движение волнового пакета, причем для вогнутой оболочки это движение быстрее, чем для выпуклой.

На рисунке 2 приведены графики функций групповой скорости $v_g^+ = \dot{q}_n(t)$ и мгновенной частоты в окрестности центра волнового пакета $\omega_n(t)$. Видно, что параметру погиби (49) соответствует переменные групповая скорость и мгновенная частота, в то время как при равномерной по окружности погиби эти функции постоянны.

Графики функций $\operatorname{Im} b_n^+(t)$ и $w_{n\,\max}^+(t)$ приводятся на рисунках 3, а и 3, б соответственно.

Величина $\operatorname{Im} b_n^+(t)$ связана с шириной волнового пакета (его ширина – величина порядка $\varepsilon^{1/2}\big/\sqrt{\operatorname{Im} b_n^+(t)}$), а $w_{n\,\max}^+(t)$ – функция максимальной амплитуды колебаний.

Сверяя графики (см. рис. 1, б и рис. 3, а 3, б) заключаем, что отражения волнового пакета (см. кривую 1 на рис. 1 (б)) сопровождаются фокусировкой и ростом амплитуд, в то время как движение без отражений (кривые 2, 3) приводит к «расплыванию» волнового (увеличению ширины и уменьшению амплитуды колебаний).

Нами также были проведены расчеты, которые показали, что влияние растущего сжимающего кольцевого усилия $T_2 = C_t\, t$ на одну из локализованных собственных форм колебаний оболочки с неравномерной погибью приводит к расщеплению ее на два подвижных волновых пакета и к сильному возрастанию частоты и амплитуды колебаний.

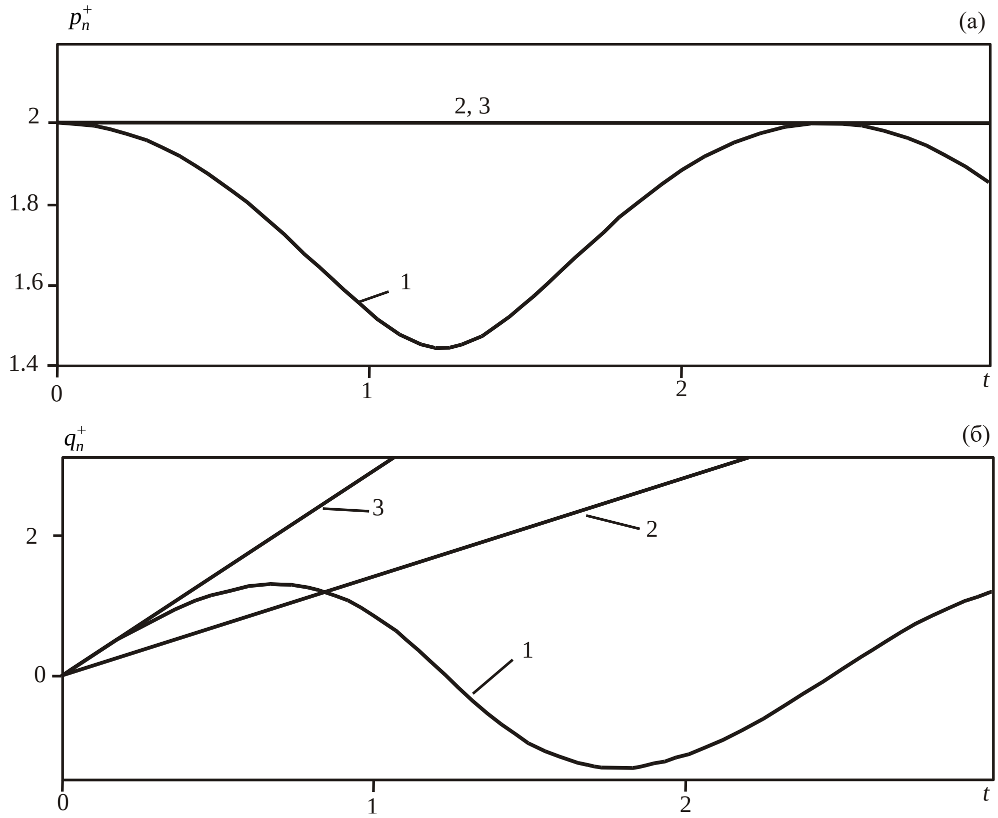

Рис. 1. Графики решений системы Гамильтона для $c(\varphi) = -0{,}5\cos(\varphi)$; 0,5; –0,5
(кривые 1, 2, 3 соответственно)

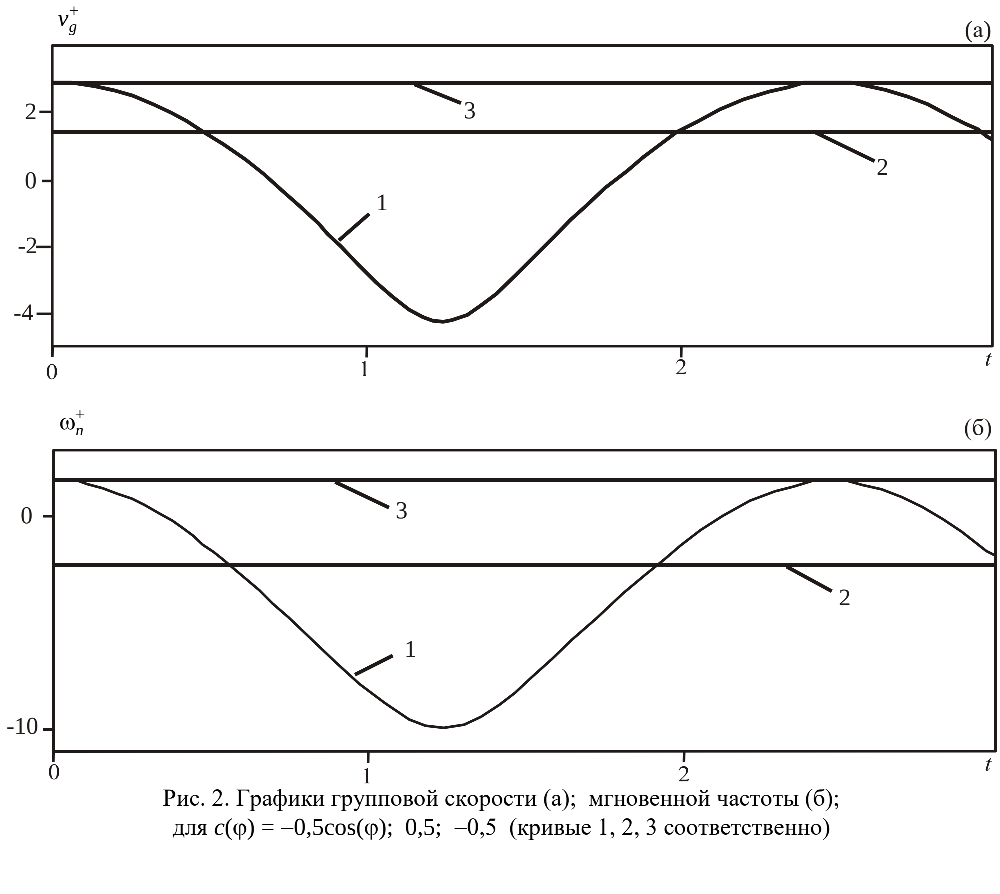

Рис. 2. Графики групповой скорости (а); мгновенной частоты (б);
для $c(\varphi) = -0{,}5\cos(\varphi)$; 0,5; –0,5 (кривые 1, 2, 3 соответственно)

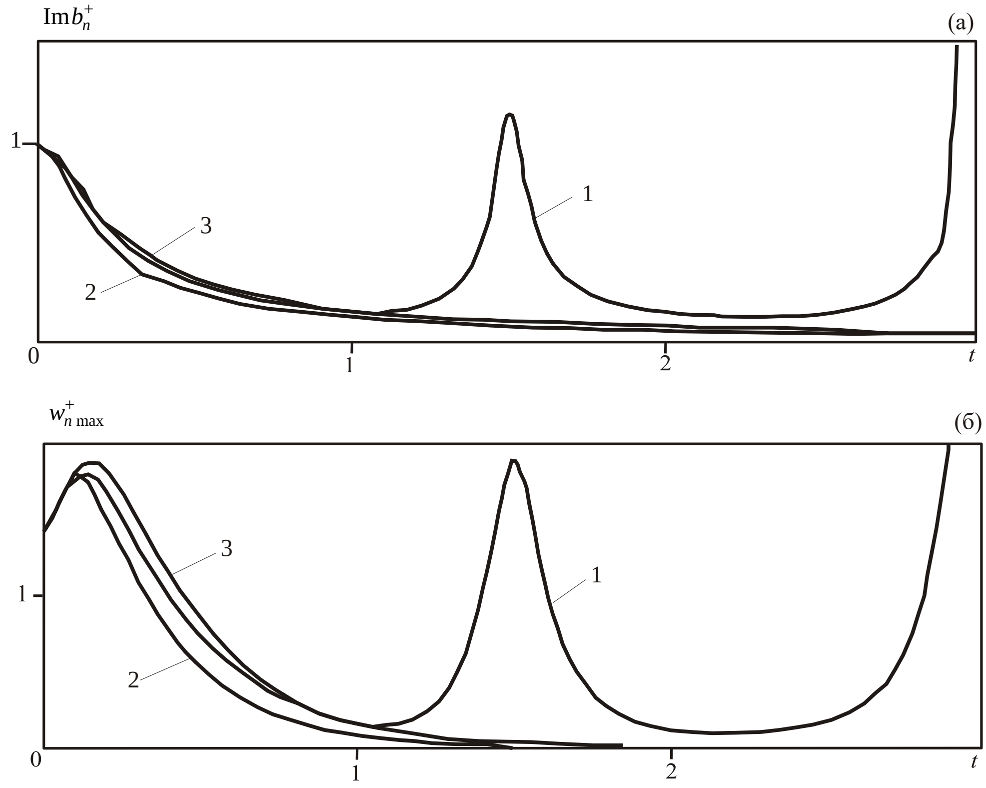

Рис. 3. Графики функций $\mathrm{Im}\, b_n(t)$ (а); $w_{n\,\max}(t)$ (б);
для $a(\varphi) = -0{,}5\cos(\varphi)$; 0,5; –0,5 (кривые 1, 2, 3 соответственно)

Выводы

1. С использованием комплексного метода ВКБ [1] исходная начально-краевая задача сведена к последовательности одномерных краевых задач, условия разрешимости которых привели к системе Гамильтона, уравнению Риккати и амплитудному уравнению. В случае параболической погиби получено явное выражение для функции Гамильтона, и, соответственно, для системы Гамильтона, уравнения Риккати и амплитудного уравнения.

2. Установлено совпадение нулевого приближения наименьшей частоты колебаний стационарного волнового пакета для оболочки с параболической погибью с наименьшей частотой собственных колебаний, найденной в [5], при использовании одинаковых предположений.

3. Численные расчеты показали, что неоднородная погибь может привести к локализации изгибных колебаний в окрестности наиболее вогнутой образующей. Расчеты также показали, что влияние растущего сжимающего кольцевого усилия на одну из собственных форм колебаний оболочки приводит к расщеплению начального волнового пакета, а также, к неограниченному возрастанию амплитуд колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михасев, Г.И. Локализованные семейства изгибных волн в некруговой цилиндрической оболочке с косыми краями / Г.И. Михасев // Прикладная математика и механика. – 1996. – Т. 60, № 4. – С. 635 – 643.
2. Товстик, П.Е. Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы / П.Е. Товстик. – М.: Наука. Физматлит, 1995. – 320 с.
3. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
4. Авдошка, И.В. Волновые пакеты в тонкой цилиндрической оболочке с учетом воздействия внешних сил / И.В. Авдошка, Г.И. Михасев // Веснік Віцебск. дзярж. ун-та. – 1997. – № 3(5).– С. 50 – 54.
5. Кукуджанов, С.Н. О влиянии нормального давления на частоты собственных колебаний оболочек вращения, близких к цилиндрическим / С.Н. Кукуджанов // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела. – 1996. – № 6. – С. 121 – 126.
6. Михасев, Г.И. Некоторые задачи устойчивости оболочек, близких к цилиндрическим / Г.И. Михасев // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. матем., механ., астрон. – 1987. – № 1. – С. 67 – 72.

Поступила 24.08.2007