

## МЕХАНИКА

УДК 534.121.1

### ОСОБЕННОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И СОБСТВЕННЫХ ФОРМ СВОБОДНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИНОК МЕТОДОМ ЭДМАНА

канд. техн. наук, доц. Л.С. ТУРИЩЕВ  
(Полоцкий государственный университет)

Задача отыскания собственных частот и собственных форм свободных колебаний свободной прямоугольной изотропной пластинки является одной из трудных задач и имеет как теоретическое, так и прикладное значение. Математически задача заключается в отыскании собственных чисел и собственных функций уравнения свободных колебаний пластинки, решение которого должно подчиняться только динамическим граничным условиям. Имеющие большое распространение вариационные методы позволяют для такой задачи определять практически только низшие собственные частоты и соответствующие им собственные формы свободных колебаний. В связи с этим представляет интерес метод Эдмана, который позволяет для рассматриваемой задачи сравнительно просто вычислять собственные числа и собственные функции любого номера. Однако в методе Эдмана встречаются скрытые особенности, не исследованные автором метода. В статье приводятся результаты исследования этих особенностей и обсуждаются пути их учета при численной реализации метода.

Важной задачей, имеющей теоретическое и прикладное значение, является задача получения собственных частот и собственных форм свободных колебаний прямоугольной изотропной пластинки с произвольной схемой опирания. Математически задача заключается в нахождении собственных чисел и собственных функций уравнения

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - k^4 w = 0. \quad (1)$$

Решение этого уравнения осуществляется при некоторых граничных условиях

$$u_i(w) = 0, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (2)$$

Известно, что задача (1), (2) является наиболее трудной в случае свободной прямоугольной пластинки. Трудность решения такой задачи заключается в необходимости подчинения решения уравнения (1) только динамическим граничным условиям вида:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=0, a} &= 0; \\ \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right|_{y=0, b} &= 0; \\ \left. \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right|_{x=0, a} &= 0; \\ \left. \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right|_{y=0, b} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Наибольшее распространение для решения задачи (1), (3) получили вариационные методы. Однако следует заметить, что, несмотря на их универсальность, они удобны только для определения низших собственных частот. В связи с этим представляет интерес вычисление собственных частот и собственных форм свободных колебаний свободной прямоугольной пластинки методом Эдмана [1]. Это объясняется тем, что вычисление собственной частоты любого номера не связано с составлением и раскрытием опре-

делителя, а построение соответствующей ей собственной формы производится по несложной одночленной формуле. Поэтому метод Эдмана сравнительно просто численно реализуется с помощью ЭВМ.

Суть метода Эдмана заключается в следующем [1]. Решение дифференциального уравнения (1) ищется в виде:

$$w \approx cu(\lambda; x)v(\mu; y), \quad (4)$$

где  $c$  – произвольная постоянная;  $u, v$  – некоторые неизвестные функции от  $x$  и  $y$  соответственно четыре раза непрерывно дифференцируемые и содержащие, соответственно, неизвестные параметры  $\lambda$  и  $\mu$ .

Подставляя выражение (4) в уравнение (1) и применяя формулу Галеркина, после всех преобразований приходим к следующему выражению для нахождения собственных чисел:

$$k^4 = B_\lambda + \frac{2}{\varepsilon^2} A_\lambda A_\mu + \frac{1}{\varepsilon^4} B_\mu, \quad (5)$$

$$\text{где } A_\lambda = \frac{\int u'' u dx}{\int u^2 dx}; \quad B_\lambda = \frac{\int u^{IV} u dx}{\int u^2 dx}; \quad A_\mu = \frac{\int v'' v dy}{\int v^2 dy}; \quad B_\mu = \frac{\int v^{IV} v dy}{\int v^2 dy}; \quad \varepsilon = \frac{b}{a}.$$

Следовательно, если входящие в условия (3) функции  $u$  и  $v$  будут известны, то по формуле (5) можно определять для уравнения (1) собственные числа любого номера.

Для нахождения функций  $u$  и  $v$  выражение (4) подставляется в уравнение (1) и, считая поочередно функции  $u$  и  $v$  неизменными, дважды применяется формула Галеркина. После всех преобразований получаются два обыкновенных однородных дифференциальных уравнения 4-го порядка

$$u^{IV} + 2A_\mu u'' + \left( B_\mu - \frac{1}{a^4} k^4 \right) u = 0; \quad (6)$$

$$v^{IV} + 2A_\lambda v'' + \left( B_\lambda - \frac{1}{a^4} k^4 \right) v = 0. \quad (7)$$

Решение уравнений (6) и (7) ищется в виде

$$u(x) = a_1 ch\lambda_1 x + a_2 sh\lambda_1 x + a_3 ch\lambda_2 x + a_4 sh\lambda_2 x; \quad (8)$$

$$v(y) = b_1 ch\mu_1 y + b_2 sh\mu_1 y + b_3 ch\mu_2 y + b_4 sh\mu_2 y, \quad (9)$$

где  $a_i, b_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) – произвольные постоянные, определяемые из граничных условий (3).

Таким образом, каждая из функций  $u$  и  $v$  удовлетворяет граничным условиям только на двух противоположных сторонах. Выражения (8) и (9) с учетом полученных значений  $a_i, b_i$  принимают следующий вид.

Симметричные функции  $u_m$  и  $v_n$  ( $m, n = 2, 4, 6 \dots$ ):

$$u_m = \frac{ch\bar{\lambda}_1 \xi}{ch\bar{\lambda}_1 / 2} - \gamma_\lambda \frac{ch\bar{\lambda}_2 \xi}{ch\bar{\lambda}_2 / 2}; \quad (10)$$

$$v_n = \frac{ch\bar{\mu}_1 \eta}{ch\bar{\mu}_1 / 2} - \gamma_\mu \frac{ch\bar{\mu}_2 \eta}{ch\bar{\mu}_2 / 2}, \quad (11)$$

$$\text{где } \gamma_\lambda = \frac{2\bar{\lambda}_1^2 - \nu(\bar{\lambda}_1^2 + \bar{\lambda}_2^2)}{2\bar{\lambda}_2^2 - \nu(\bar{\lambda}_1^2 + \bar{\lambda}_2^2)}; \quad \gamma_\mu = \frac{2\bar{\mu}_1^2 - \nu(\bar{\mu}_1^2 + \bar{\mu}_2^2)}{2\bar{\mu}_2^2 - \nu(\bar{\mu}_1^2 + \bar{\mu}_2^2)}; \quad \bar{\lambda}_1 = \lambda_1 a; \quad \bar{\lambda}_2 = \lambda_2 a; \quad \bar{\mu}_1 = \mu_1 b; \quad \bar{\mu}_2 = \mu_2 b; \quad \xi = \frac{x}{a}; \quad \eta = \frac{y}{b}.$$

Входящие в выражения (10) и (11) аргументы  $\lambda_i$  и  $\mu_i$  ( $i = 1, 2$ ) определяются из аргументных уравнений:

$$th \frac{\bar{\lambda}_1}{2} = \frac{\bar{\lambda}_2}{\bar{\lambda}_1} \gamma_\lambda^2 + th \frac{\bar{\lambda}_2}{2}; \quad (12)$$

$$th \frac{\bar{\mu}_1}{2} = \frac{\bar{\mu}_2}{\bar{\mu}_1} \gamma_\mu^2 + th \frac{\bar{\mu}_2}{2}. \quad (13)$$

Антисимметричные функции  $u_m$  и  $v_n$  ( $m, n = 1, 3, 5 \dots$ ):

$$u_m = \frac{sh\bar{\lambda}_1\xi}{sh\bar{\lambda}_1/2} - \gamma_\lambda \frac{sh\bar{\lambda}_2\xi}{sh\bar{\lambda}_2/2}; \tag{14}$$

$$v_n = \frac{sh\bar{\mu}_1\eta}{sh\bar{\mu}_1/2} - \gamma_\mu \frac{sh\bar{\mu}_2\eta}{sh\bar{\mu}_2/2}. \tag{15}$$

Соответствующие им аргументные уравнения имеют вид:

$$cth \frac{\bar{\lambda}_1}{2} = \frac{\bar{\lambda}_2}{\bar{\lambda}_1} \gamma_\lambda^2 + cth \frac{\bar{\lambda}_2}{2}; \tag{16}$$

$$cth \frac{\bar{\mu}_1}{2} = \frac{\bar{\mu}_2}{\bar{\mu}_1} \gamma_\mu^2 + cth \frac{\bar{\mu}_2}{2}. \tag{17}$$

В формулах (10), (11), (14), (16)  $m$  и  $n$  обозначают число узловых точек. При заданных  $m$  и  $n$  решение аргументных уравнений (12), (13), (16) и (17) осуществляется следующим образом. Первоначальные значения аргументов  $\bar{\lambda}_2$ ,  $\bar{\mu}_2$  задаются произвольно из следующих интервалов:

$$(m-0,5)\pi < \bar{\lambda}_2 < m\pi; \tag{18}$$

$$(n-0,5)\pi < \bar{\mu}_2 < n\pi. \tag{19}$$

Значения соответствующих аргументов  $\bar{\lambda}_1$ ,  $\bar{\mu}_1$  определяются решением уравнений (12), (13) при ( $m, n = 2, 4, 6 \dots$ ) и решением уравнений (16), (17) при ( $m, n = 1, 3, 5 \dots$ ).

Последующее решение задачи заключается в поэтапном «исправлении» полученных функций  $u$  и  $v$  последовательным подчинением их дополнительным граничным условиям:

$$\psi_1 = F_\lambda + \frac{(1-\nu)}{\varepsilon^2} (A_\lambda + G_\lambda)(A_\mu - G_\mu) = 0; \tag{20}$$

$$\psi_2 = F_\mu + \frac{(1-\nu)}{\varepsilon^2} (A_\mu + G_\mu)(A_\lambda - G_\lambda) = 0, \tag{21}$$

где 
$$F_\lambda = \frac{u'''u - u''u'}{\int u^2 dx} \Big|_{-0,5a}^{+0,5a}; \quad F_\mu = \frac{v'''v - v''v'}{\int v^2 dx} \Big|_{-0,5b}^{+0,5b}; \quad G_\lambda = -A_\lambda + \frac{u'u}{\int u^2 dx} \Big|_{-0,5a}^{+0,5a}; \quad G_\mu = -A_\mu + \frac{v'v}{\int v^2 dx} \Big|_{-0,5b}^{+0,5b}.$$

Граничные условия (20), (21) выражают собой равенство нулю полной работы внутренних сил на каждой грани пластинки.

Сохраняя неизменными параметры  $\bar{\lambda}_1$ ,  $\bar{\lambda}_2$ , согласно выражениям (13), (17), (19) вычисляем параметры  $\bar{\mu}_1$ ,  $\bar{\mu}_2$ , удовлетворяющие условию (20). Тем самым подбирается соответствующая функция  $v$ , удовлетворяющая первому дополнительному граничному условию.

Сохраняя неизменными вычисленные параметры  $\bar{\mu}_1$ ,  $\bar{\mu}_2$ , согласно выражениям (12), (16), (18) определяем параметры, удовлетворяющие условию (21). Тем самым подбирается соответствующая функция  $u$ , удовлетворяющая второму дополнительному граничному условию.

Дальше вычислительная процедура повторяется до получения решения требуемой точности. Достоинством метода является то, что при решении инженерных задач он позволяет с удовлетворительной точностью ограничиться одним шагом.

Однако при численной реализации метода Эдмана согласно описанному алгоритму выявляются скрытые особенности, не исследованные автором [1]. Их суть заключается в следующем. При решении аргументного уравнения (12), соответствующего четным номерам  $m$ , относительно  $\bar{\lambda}_1$  в зависимости от значений  $\bar{\lambda}_2$  могут возникать три качественно различные ситуации (внутри интервала (18) существует особое значение  $\bar{\lambda}_2$ , которое назовем критическим и обозначим  $\bar{\lambda}_{2кр}$ ):

- если  $\bar{\lambda}_2$  принадлежит интервалу

$$(m-0,5)\pi < \bar{\lambda}_2 < \bar{\lambda}_{2кр},$$

то уравнение (12) имеет три корня  $\bar{\lambda}_1^1, \bar{\lambda}_1^2, \bar{\lambda}_1^3$ ;

- если  $\bar{\lambda}_2$  принимает значение

$$\bar{\lambda}_2 = \bar{\lambda}_{2кр},$$

то уравнение (12) имеет два корня и один из них кратный;

- если  $\bar{\lambda}_2$  принадлежит интервалу

$$\bar{\lambda}_{2кр} < \bar{\lambda}_2 < m\pi,$$

то уравнение (12) имеет один корень  $\bar{\lambda}_1^1$ .

Во всех трех случаях первый корень не удовлетворяет физическому смыслу задачи.

При решении аргументного уравнения (16), соответствующего нечетным номерам  $m$ , относительно  $\bar{\lambda}_1$  в зависимости от значений  $\bar{\lambda}_2$  могут возникать следующие качественно различные ситуации:

- если  $\bar{\lambda}_2$  принадлежит интервалу

$$(m-0,5)\pi < \bar{\lambda}_2 < \bar{\lambda}_{2кр},$$

то уравнение (16) имеет три корня  $\bar{\lambda}_1^1, \bar{\lambda}_1^2$ ;

- если  $\bar{\lambda}_2$  принимает значение

$$\bar{\lambda}_2 = \bar{\lambda}_{2кр},$$

то уравнение (16) имеет один кратный корень;

- если  $\bar{\lambda}_2$  принадлежит интервалу

$$\bar{\lambda}_{2кр} < \bar{\lambda}_2 < m\pi,$$

то уравнение (16) не имеет корней.

Выявленные особенности относительно числа решений аргументных уравнений (12), (16) необходимо учитывать при удовлетворении приближенному граничному условию (20). При значениях  $\bar{\lambda}_2$ , принадлежащих интервалу (18), в граничном условии (20) первое слагаемое положительное, а второе – отрицательное. Поэтому удовлетворение условия (20) возможно, если равны модули этих слагаемых.

При вычислении значений функции  $F_\lambda$ , являющейся первым слагаемым в левой части условия (20), необходимо учитывать, что эта функция двузначная и имеет вертикальную касательную, если  $\bar{\lambda}_2 = \bar{\lambda}_{2кр}$  (рис. 1).

Для четных номеров  $m$  при вычислении значений функции  $F_\lambda$ , принадлежащих нижней ветви, берется второй корень аргументного уравнения (12), а при вычислении значений принадлежащих верхней ветви – третий корень (рис. 1, а). Для нечетных номеров  $m$  при вычислении значений функции  $F_\lambda$ , принадлежащих нижней ветви, берется первый корень аргументного уравнения (16), а при вычислении значений, принадлежащих верхней ветви, – второй корень (рис. 1, б). Поэтому для удовлетворения граничному условию (20) с учетом особенностей поведения функции  $F_\lambda$  первоначально аргумент  $\bar{\lambda}_2$  нужно увеличивать до значения  $\bar{\lambda}_{2кр}$ , а затем уменьшать (рис. 2).

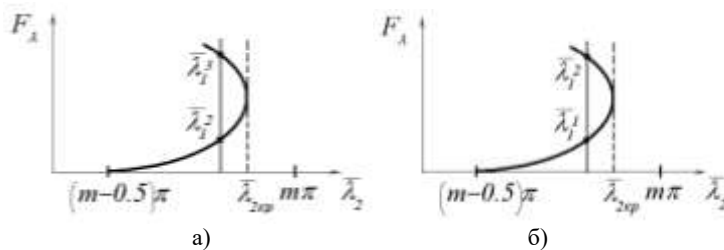


Рис. 1. Особенности вычисления функции  $F_\lambda$

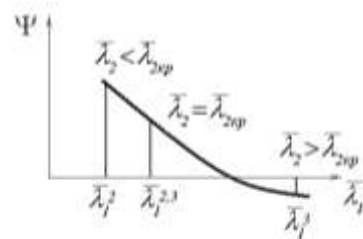


Рис. 2. Особенности вычисления функции  $\Psi$

Все вышеизложенное в отношении аргументов  $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2$  и граничного условия (20) справедливо для аргументов  $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2$  и граничного условия (21).

ЛИТЕРАТУРА

1. Odman, S.T.A. Studies of Coundary value problems, part II. Characteristic functions of rectangular plates. Sv. forsk. inst. for com. ach.b Bet / S.T.A. Odman. – Stockholm, 1955. – 283 p.

Поступила 06.08.2007