УДК 543.42; 517.518.45

О СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

д-р техн. наук, доц. С.Г. ЕХИЛЕВСКИЙ
(Полоцкий государственный университет)

Обоснована неконструктивность определения самого понятия периодичности. Показано, что в тех случаях, когда моделируемый процесс описывается в неэлементарных функциях, удобным критерием его периодичности может служить дискретность спектра интегрального преобразования Фурье. Попутно, в результате последовательного рассмотрения спектральной плотности периодических процессов, возникает представление для δ *-функции Дирака и само ее понятие, вводимое обычно по определению. Отмечена принципиальная конечность ширины спектральных линий и невозможность осуществления на практике строго периодических процессов.*

Феномен периодичности (повторяемости) весьма распространен в окружающей нас действительности, начиная от микромира с волнами вероятности и до Вселенной в целом, которая согласно некоторым космологическим моделям является колеблющейся. В быту мы настолько привыкли к периодичности, что испытываем дискомфорт при смене часовых поясов, не задумываемся о причине сезонных колебаний температуры[1] и т.п.

При моделировании периодических процессов возникают функции, при любом значении аргумента удовлетворяющие соотношению:

$$f(x) = f(x+T), \tag{1}$$

в котором T – некоторое конечное число, называемое периодом.

Определение (1) не является конструктивным. Если $f(x)$ задана степенным рядом, а T неизвестно (чаще всего так и бывает) убедится в справедливости (1) весьма не просто. Если же $f(x)$ получена непосредственно из эксперимента, то при наличии повторяемости не ясно, является ли x на самом деле любым (мы же не можем просканировать всю числовую ось), а при отсутствии повторений – не связано ли это с тем, что T очень велико.

Между тем наличие периода (даже если он очень велик) является новым качеством и принципиально меняет свойства функции. Например, согласно теореме Дирихле [1] периодическая функция совпадает со своим рядом Фурье во всех точках непрерывности:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{iz_n x}, \tag{2}$$

где F_n – амплитуда Фурье:

$$F_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-iz_n x}dx, \tag{3}$$

отвечающая частоте

$$z_n = 2\pi n/T. \tag{4}$$

Формулы (3), (4) определяют спектральный состав функции $f(x)$. В данном случае спектр является дискретным, так как разность

$$z_{n+1} - z_N = 2\pi/T \tag{5}$$

конечна[2].

[1] Значительная часть опрошенных затрудняется ответить на этот вопрос. При этом распространено заблуждение о том, что летом теплее, так как Земля ближе к Солнцу, чем зимой.

[2] Спектры излучения атомов состоят из отдельных линий как раз потому, что на стационарных электронных «орбитах» укладывается целое число длин их волн де Бройля, т.е. плотность электронного заряда является периодической функцией полярного и азимутального углов.

Если же период у $f(x)$ отсутствует, равенство в (2) имеет место лишь на промежутке $(-T/2,\ T/2)$. Чтобы добиться совпадения непериодической функции со своим рядом (2) на всей числовой оси, T в (3), (4) устремляют к бесконечности. В результате такого предельного перехода спектр частот, согласно (5), становится непрерывным, а ряд Фурье трансформируется в интеграл:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(z)e^{ixx}dz\ , \tag{6}$$

где $F(z)$ – плотность амплитуды Фурье или спектральная плотность:

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ixx}dx. \tag{7}$$

Несмотря на предельный переход, интеграл Фурье является более общим понятием, чем ряд. Действительно, промежуток интегрирования в (6) накрывает все точки z_n. Поэтому к периодическим функциям интегральное преобразование Фурье тоже применимо. При этом, однако, в соответствии с (2), плотность $F(z)$ равна нулю везде, кроме изолированных точек $z=z_n$. Причем в них спектральная плотность должна обращаться в бесконечность, чтобы дать при интегрировании в (6) конечный вклад в соответствующую Фурье-амплитуду F_n. Убедимся в этом непосредственно[3].

Пусть для простоты ряд (2) состоит из одного слагаемого

$$f(x)=F_n e^{iz_n x}\ . \tag{8}$$

Подставим его в (7)

$$F(z)=\frac{F_n}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(z_n-x)x}dx=\frac{F_n}{\sqrt{2\pi}}\mathop{Lim}_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}e^{i(z_n-x)x}dx=F_n\sqrt{2/\pi}\cdot\varphi(z)\ , \tag{9}$$

где $\varphi(z)$ получается с помощью формулы Эйлера элементарным интегрированием в (9):

$$\varphi(z)=\mathop{Lim}_{N\to\infty}\frac{Sin(N(z_n-z))}{z_n-z}\ . \tag{10}$$

Чтобы связать $\varphi(z)$ с δ-функцией Дирака вычислим

$$\Phi(z)=\int_{-\infty}^{z}\varphi(z)dz=\mathop{Lim}_{N\to\infty}\int_{-\infty}^{N(z-z_n)}\frac{Sint}{t}dt\ , \tag{11}$$

т.е. при $z<z_n$ имеем

$$\Phi(z)=\int_{-\infty}^{-\infty}\frac{Sint}{t}dt=0\ , \tag{12}$$

при $z=z_n$ функция $\Phi(z)$ принимает значение интеграла Дирихле [2]:

$$\Phi(z)=\int_{-\infty}^{0}\frac{Sint}{t}dt=\frac{\pi}{2}. \tag{13}$$

[3] Указанными свойствами обладает δ-функция Дирака, вводимая обычно по определению [3]. В нашем подходе само понятие δ-функции и представление для нее возникают естественным образом.

и, наконец, при $z > z_n$

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Sint}{t} dt = \pi , \qquad (14)$$

так как подынтегральная функция четная.

Таким образом

$$\Phi(z) = \pi \cdot \theta(z - z_n) , \qquad (15)$$

где $\theta(z)$ – ступенчатая функция Хевисайда:

$$\theta(z) = \begin{cases} 0 & , z < 0 \\ \frac{1}{2} & , z = 0 \\ 1 & , z > 0 \end{cases} .$$

То есть, оставаясь постоянной при всех $z \neq z_n$, функция $\Phi(z)$ при переходе через точку z_n терпит скачок. Следовательно, согласно (11), (15)

$$\varphi(z) = \Phi'(z) = \pi \cdot \delta(z - z_n) , \qquad (16)$$

где $\delta(z) - \delta$ -функция Дирака:

$$\delta(z) = \begin{cases} 0 & , z \neq 0 \\ \infty & , z = 0 \end{cases} ,$$

причем согласно (11) – (16)

$$\int_a^b \delta(z) dz = \begin{cases} 0 & , 0 \notin (a,b) \\ \frac{1}{2} & , 0 = a \ (0 = b) \\ 1 & , 0 \in (a,b) \end{cases} .$$

Будучи обобщенной, δ -функция Дирака может по-разному аппроксимироваться непрерывными функциями [2]. В частности, в нашем случае[4] (см. (10), (16)):

$$\delta(z) = \frac{1}{\pi} \underset{N \to \infty}{Lim} \frac{Sin(Nz)}{z} . \qquad (17)$$

Таким образом (см. (9), (16))

$$F(z) = F_n \sqrt{2\pi} \cdot \delta(z - z_n) ,$$

что после подстановки в (6) дает (8), как это и должно быть.

В общем случае периодических функций спектральная плотность представляет собой суперпозицию δ -функций:

$$F(z) = \sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \cdot \delta(z - z_n) ,$$

что может являться критерием периодичности при наличии очень больших периодов.

[4] Еще раз подчеркнем, что представление (17) возникло естественным путем (и привело к понятию δ -функции), не по определению, а в результате последовательного рассмотрения спектральной плотности периодической функции.

В действительности, однако, строго периодические зависимости никогда не встречаются, ибо ничто не длится бесконечно. Начало отсчета – величина условная, поэтому, не нарушая общности, будем считать

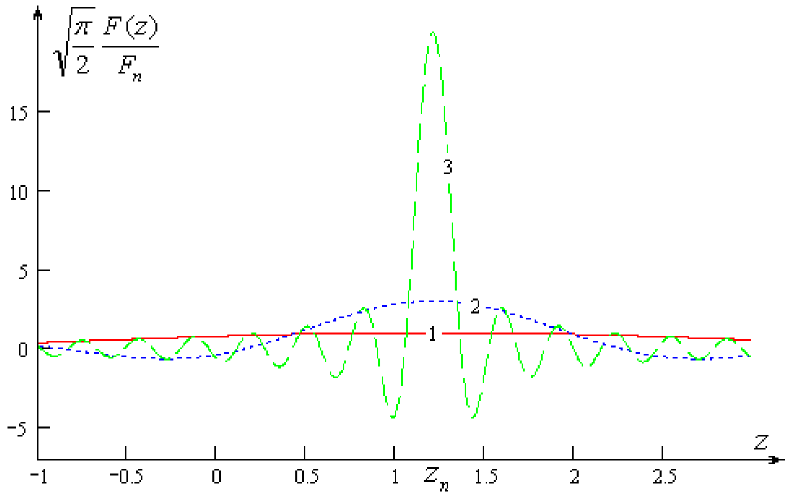
$$f(x)=\begin{cases} F_n e^{iz_n x} & ,x\in[-N,N]; \\ 0 & ,x\notin[-N,N], \end{cases} \tag{18}$$

Заметим, что коэффициент F_n в (18) не является амплитудой Фурье, так как $f(x)$ уже непериодическая функция.

Подставив (18) в (7), получим (см. (9), (10)):

$$F(z)=F_n\sqrt{2/\pi}\,\frac{Sin(N(z_n-z))}{z_n-z}\,. \tag{19}$$

Зависимость (19) для различных N представлена на рисунке и позволяет непосредственно проследить трансформацию непрерывного спектра в дискретный по мере того, как непериодическая функция (17) с ростом N превращается в периодическую функцию (8).



Трансформация непрерывного спектра в дискретный
при превращении непериодической зависимости в периодическую:
1 – N = 1; 2 – N = 3; 3 – N = 20

Чем дольше осциллирует экспонента, тем более монохроматическим становится сигнал. Однако на практике предельный переход $N\to\infty$ не может быть реализован. По этой причине ни одна радиостанция не работает строго на заявленной частоте. Если бы это было не так, сигнал от нее был бы слышен еще до начала его излучения. Даже линии в спектрах излучения атомов имеют конечную ширину. Это значит, что феномен периодичности является математической идеализацией, и в природе действительно дискретные спектры встречаться не могут.

ЛИТЕРАТУРА

1. Романовский, П.П. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа / П.П. Романовский. – М.: Наука, 1973. – 336 с.
2. Владимиров, В.С. Обобщенные функции в математической физике / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1979.
3. Дирак, П. Основы квантовой механики / П. Дирак. – М. – Л., 1937.

Поступила 28.08.2007