УДК 537.8

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ МАТРИЧНЫЕ ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

канд. физ.-мат. наук, доц. И.Е. АНДРУШКЕВИЧ, Ю.В. ШИЁНОК
(Витебский филиал Учреждения образования Федерации профсоюзов Беларуси «Международный институт трудовых и социальных отношений»)

Предложены и обоснованы эквивалентные матричные формы записи системы уравнений Максвелла, аналогичные хорошо изученному матричному уравнению Дирака при наличии гравитационных и векторных полей. Одна из предложенных форм записи остается эквивалентной полной системе уравнений Максвелла и в случае анизотропных сред. Выбор формы представления определяется постановкой решаемой задачи. Так, первая симметричная форма удобна при отделении переменной. В случае полного разделения переменных удобнее использовать вторую симметричную форму. В этом случае разложение материальных матриц имеет более простой вид, что упрощает выполнение операций коммутирования или антикоммутирования матриц.

1. Введение

Исследование уравнений Максвелла:

$$rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t};\;\; rot\mathrm{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathrm{j};\;\; div\mathbf{D} = \rho;\;\; div\mathbf{B} = 0\,, \tag{1}$$

разработка методов построения их точных и приближенных аналитических решений по-прежнему является актуальной проблемой прикладной электродинамики. Традиционно на начальном этапе поиска аналитических решений из уравнений (1) получают волновые уравнения для полевых векторов **E** и **H** (реализуют так называемый этап разделения уравнений). Однако, как показано в [1], данная задача может быть успешно решена только в простейших случаях.

В этой связи представляет интерес исследование матричной формы записи уравнений Максвелла, предложенной в [2] и аналогичной хорошо изученному в теоретической физике [3 – 5] релятивистскому волновому уравнению Дирака:

$$\left\{\xi^1\frac{\partial}{\partial x} + \xi^2\frac{\partial}{\partial y} + \xi^3\frac{\partial}{\partial z} + \xi^4\mathbf{M}\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{\Theta}\right\}\mathbf{\Phi} = \mathbf{P}\,\mathbf{J}\,, \tag{2}$$

где

$$\mathbf{\Phi} = \left[0, E_X, E_Y, -E_Z, -H_Z, H_Y, H_X, 0\right]^{\mathrm{T}};\; \mathbf{P} = diag(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \rho/\varepsilon,\ 0);\; \mathbf{J} = \left[1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1\right]^{\mathrm{T}}. \tag{3}$$

$$\mathbf{\Theta} = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma - \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial z} & \frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial y} & \frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma - \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma + \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial\mu}{\partial t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial\mu}{\partial t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} & \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial y} & -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial\mu}{\partial t} & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\mathbf{M} = diag(\varepsilon/\mu,\ \varepsilon,\ \varepsilon,\ \varepsilon,\ \mu,\ \mu,\ \mu,\ \mu/\varepsilon). \tag{5}$$

Заметим, что при получении (2) для материальных уравнений принималось

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E},\ \ \mathbf{B} = \mu \mathrm{H}\ ,\ \ \mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}. \tag{6}$$

Матрицы ξ^i удовлетворяют соотношениям:

$$[\xi^i, \xi^j]_+ = \xi^i\xi^j + \xi^j\xi^i = 2g^{ij}\mathbf{I};\ i, j = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6 : g^{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, i = 1,\ 2,\ 3,\ 6, \\ -\delta_{ij}, i = 4,\ 5, \end{cases} \tag{7}$$

Известно, что любое множество величин, удовлетворяющее условиям (7), является алгеброй Клиффорда [6, 7]. Такая алгебра подробно изучалась в [6, 7] при исследовании уравнения Дирака, только на примере матриц Дирака размерности 4 × 4.

Как видно из (3), вектор-столбец **Ф** содержит в себе одновременно компоненты электрического и магнитного поля. Благодаря такой записи задача о получении волновых уравнений для полевых векторов **E** и **H** теряет свою актуальность.

2. Матричное представление в системе единиц СГС

Система уравнений Максвелла в матричной записи согласно [2] была представлена в системе единиц СИ, в декартовой системе координат.

Однако для описания электромагнитных полей система единиц СИ не является единственно возможной и (или) самой удобной. Другие системы, такие как систем единиц Гаусса или расширенная система Гаусса, могут быть предпочтительней в ряде случаев [8, 9].

Система уравнений Максвелла в декартовой системе координат сохраняет свою структуру в СГС. Введя следующие обозначения; $x_1 = x$; $x_2 = y$; $x_3 = z$; $x_4 = t$, получим в системе СГС матричное уравнение в четырех мерных координатах:

$$\left\{\xi^1\frac{\partial}{\partial x_1} + \xi^2\frac{\partial}{\partial x_2} + \xi^3\frac{\partial}{\partial x_3} + \xi^4\mathbf{M}\frac{\partial}{\partial x_4} + \mathbf{\Theta}^{\Gamma}\right\}\mathbf{\Phi} = \mathbf{P}^{\Gamma}\mathbf{J}, \tag{8}$$

где **Ф, M, J,** ξ^i – согласно (3), (5), (7). Матрицы $\mathbf{P}^{\Gamma}$, $\mathbf{\Theta}^{\Gamma}$ имеют ту же структуру, записанную в (3), (4), дополненную естественными коэффициентами системы СГС 4π и $4\pi/c$ перед соответствующими коэффициентами.

3. Эквивалентные формы записи матричного уравнений Максвелла

3.1. Первая симметричная форма записи матричного уравнения Максвелла. Несмотря на то, что форма уравнения Максвелла, предложенная в [2], и её аналог, записанный в СГС, позволяют получать решения одновременно для электрической и магнитной составляющей поля; они обладают рядом недостатков. При разложении материальных матриц по базису элементарных матриц $\mathbf{\Gamma}^i$ получаются сложные зависимости от диэлектрической и магнитной проницаемости, что затрудняет работу с уравнением Максвелла.

Для преодоления указанных трудностей целесообразно рассмотреть другие варианты построения матричного уравнения Максвелла. Для упрощения последующих записей будем рассматривать случай отсутствия зарядов и токов $\sigma = 0$; $j = 0$.

Используя явный вид, легко показать, что в гауссовой системе единиц уравнение (8) в случае $\sigma = 0$, $j = 0$ может быть записано в симметричном виде:

$$\sum_{i=1}^{4}\left(\mathbf{R}_i\frac{\partial}{\partial x_i} + (\frac{\partial\mathbf{R}_i}{\partial x_i})\right)\xi^i\mathbf{\Phi} = 0, \tag{9}$$

где

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_3 = diag(1,\ \mu,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \varepsilon,\ 1);\ \ \mathbf{R}_4 = diag(\varepsilon,\ \varepsilon,\ \varepsilon,\ \varepsilon,\ \mu,\ \mu,\ \mu,\ \mu). \tag{10}$$

3.2. Вторая симметричная форма записи матричного уравнения Максвелла. Так как столбец **Ф** содержит два нулевых элемента, возможно получить аналогичное представление уравнения Максвелла, отличающееся структурой материальных матриц.

$$\sum_{i=1}^{4}\left(\tilde{\mathbf{R}}_i \frac{\partial}{\partial x_i}+(\frac{\partial \tilde{\mathbf{R}}_i}{\partial x_i})\right)\xi^i \mathbf{\Phi}=0\,, \tag{11}$$

где

$$\tilde{\mathbf{R}}_1 = diag(\mu,\ \mu,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \varepsilon,\ \varepsilon);\ \tilde{\mathbf{R}}_2 = diag(1,\ \mu,\ 1,\ \mu,\ \varepsilon,\ 1,\ \varepsilon,\ 1);$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_3 = diag(1,\ \mu,\ \mu,\ 1,\ 1,\ \varepsilon,\ \varepsilon,\ 1);\ \tilde{\mathbf{R}}_4 = diag(\varepsilon,\ \varepsilon,\ \varepsilon,\ \varepsilon,\ \mu,\ \mu,\ \mu,\ \mu). \tag{12}$$

Формы записи (9) и (11) отличаются только явным видом материальных матриц. Такое различие возможно, так как равны нулю первая и восьмая компоненты вектора **Ф**. Рассмотрим плюсы и минусы этих вариантов. В форме, предложенной в (9), материальные матрицы, $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_3$, но их разложение в базисе имеет вид:

$$\mathbf{R}_1=\mathbf{R}_2=\mathbf{R}_3=\frac{1}{8}((2-\varepsilon-\mu)\xi^1\xi^3\xi^5+(\varepsilon+\mu-2)\xi^1\xi^4\xi^6-(\varepsilon-\mu)\xi^2\xi^5\xi^6- \\ -(\varepsilon-\mu)\xi^1\xi^2\xi^3\xi^6+(\varepsilon-\mu)\xi^1\xi^2\xi^4\xi^5+(\varepsilon+\mu-2)\xi^3\xi^4\xi^5\xi^6+(\varepsilon+\mu+6)\mathbf{I}); \tag{13}$$

$$\mathbf{R}_4=\frac{1}{2}\Big((\varepsilon-\mu)\xi^1\xi^2\xi^3\xi^6+(\varepsilon+\mu)\mathbf{I}\Big).$$

В этом случае матрицы раскладываются по восьми и по двум базисным матрицам соответственно.

Разложение материальных матриц в уравнении (11) принимает вид:

$$\tilde{\mathbf{R}}_1=\frac{1}{4}\Big((\varepsilon+\mu-2)\xi^1\xi^4\xi^6-(\varepsilon-\mu)\xi^2\xi^3\xi^4-(\varepsilon-\mu)\xi^1\xi^2\xi^3\xi^6+(\varepsilon+\mu+2)\mathbf{I}\Big);$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_2=\frac{1}{4}\Big(-(\varepsilon+\mu-2)\xi^1\xi^3\xi^5-(\varepsilon-\mu)\xi^2\xi^5\xi^6-(\varepsilon-\mu)\xi^1\xi^2\xi^3\xi^6+(\varepsilon+\mu+2)\mathbf{I}\Big); \tag{14}$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_3=\frac{1}{4}\Big(-(\varepsilon-\mu)\xi^1\xi^2\xi^3\xi^6+(\varepsilon-\mu)\xi^1\xi^2\xi^4\xi^5+(\varepsilon+\mu-2)\xi^3\xi^4\xi^5\xi^6+(\varepsilon+\mu+2)\mathbf{I}\Big);$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_4=\frac{1}{2}\Big((\varepsilon-\mu)\xi^1\xi^2\xi^3\xi^6+(\varepsilon+\mu)\mathbf{I}\Big).$$

Здесь материальные матрицы раскладываются только на две и четыре составляющие. В этом случае требования на коммутирование с соответствующей матрицей получаются более мягкие.

3.3. Первая симметричная левосторонняя форма записи матричного уравнения Максвелла. В данной вариации уравнения Максвелла произведено перемещение элементарных и материальных матриц.

$$\sum_{i=1}^{4}\xi^i\left(\bar{\mathrm{R}}_i \frac{\partial}{\partial x_i}+(\frac{\partial \bar{\mathrm{R}}_i}{\partial x_i})\right)\Phi=0, \tag{15}$$

где

$$\bar{\mathbf{R}}_1 = diag(1,\ \mu,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \varepsilon,\ 1);\ \bar{\mathbf{R}}_2 = diag(1,\ 1,\ \mu,\ 1,\ 1,\ \varepsilon,\ 1,\ 1);$$

$$\bar{\mathbf{R}}_3 = diag(1,\ 1,\ 1,\ \mu,\ \varepsilon,\ 1,\ 1,\ 1);\ \bar{\mathbf{R}}_4 = diag(\varepsilon,\ \varepsilon,\ \varepsilon,\ \varepsilon,\ \mu,\ \mu,\ \mu,\ \mu).$$

Примечание 1. Запись выражений, приведенных в (9), (11), можно упростить, свернув выражение как производную произведения, и записать следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{R}_i\xi^i\mathbf{\Phi}\right)=0;\ \ \sum_{i=1}^{4}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{\mathbf{R}}_i\xi^i\mathbf{\Phi}\right)=0.$$

Примечание 2. Запись выражения, приведенного в (15), можно упростить и записать следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{4}\xi^i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\bar{\mathbf{R}}_i\mathbf{\Phi}\right)=0.$$

4. Матричное уравнение Максвелла в случае анизотропных сред

В анизотропных средах связь между **E** и **D**, **B** и **H** осуществляется через тензоры электрической и магнитной индукции:

$$\varepsilon=\begin{pmatrix}\varepsilon_{x_1x_1} & \varepsilon_{x_1x_2} & \varepsilon_{x_1x_3}\\ \varepsilon_{x_2x_1} & \varepsilon_{x_2x_2} & \varepsilon_{x_2x_3}\\ \varepsilon_{x_3x_1} & \varepsilon_{x_3x_2} & \varepsilon_{x_3x_3}\end{pmatrix};\ \mu=\begin{pmatrix}\mu_{x_1x_1} & \mu_{x_1x_2} & \mu_{x_1x_3}\\ \mu_{x_2x_1} & \mu_{x_2x_2} & \mu_{x_2x_3}\\ \mu_{x_3x_1} & \mu_{x_3x_2} & \mu_{x_3x_3}\end{pmatrix}$$

Таким образом, для вектора **D** получим связь:

$$\begin{aligned}D_{x_1}&=\varepsilon_{x_1x_1}E_{x_1}+\varepsilon_{x_1x_2}E_{x_2}+\varepsilon_{x_1x_3}E_{x_3};\\ D_{x_2}&=\varepsilon_{x_2x_1}E_{x_1}+\varepsilon_{x_2x_2}E_{x_2}+\varepsilon_{x_2x_3}E_{x_3};\\ D_{x_3}&=\varepsilon_{x_3x_1}E_{x_1}+\varepsilon_{x_3x_2}E_{x_2}+\varepsilon_{x_3x_3}E_{x_3}.\end{aligned}\tag{16}$$

Записав уравнение Максвелла в случае $\sigma = 0$, $j = 0$, с учетом (16) покомпонентно, можно получить следующее матричное уравнение:

$$\sum_{i=1}^{4}\xi^i\left(\mathbf{R}^a{}_i\frac{\partial}{\partial x_i}+\left(\frac{\partial\mathbf{R}^a{}_i}{\partial x_i}\right)\right)\mathbf{\Phi}=0,$$

где

$$\mathbf{R}^a{}_1=\begin{pmatrix}1 & & & & & & & \\ & \mu_{x_1x_1} & \mu_{x_1x_2} & -\mu_{x_1x3} & & & & \\ & 0 & 1 & 0 & & 0 & & \\ & 0 & 0 & 1 & & & & \\ & & & & 1 & 0 & 0 & \\ & & 0 & & 0 & 1 & 0 & \\ & & & & -\varepsilon_{x_1x_3} & \varepsilon_{x_1x_2} & \varepsilon_{x_1x_1} & \\ & & & & & & & 1\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{R}^{a}{}_{2}=\begin{pmatrix}1 & & & & & & & \\ & 1 & 0 & 0 & & & & \\ & \mu_{x_2x_1} & \mu_{x_2x_2} & -\mu_{x_2x_3} & & 0 & & \\ & 0 & 0 & 1 & & & & \\ & & & & 1 & 0 & 0 & \\ & & 0 & & -\varepsilon_{x_2x_3} & \varepsilon_{x_2x_2} & \varepsilon_{x_2x_1} & \\ & & & & 0 & 0 & 1 & \\ & & & & & & & 1\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{R}^{a}{}_{3}=\begin{pmatrix}1 & & & & & & & \\ & 1 & 0 & 0 & & & & \\ & 0 & 1 & 0 & & 0 & & \\ & -\mu_{x_3x_1} & -\mu_{x_3x_2} & \mu_{x_3x_3} & & & & \\ & & & & \varepsilon_{x_3x_3} & -\varepsilon_{x_3x_2} & -\varepsilon_{x_3x_1} & \\ & & 0 & & 0 & 1 & 0 & \\ & & & & 0 & 0 & 1 & \\ & & & & & & & 1\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{R}^{a}{}_{4}=\begin{pmatrix}1 & & & & & & & \\ & \varepsilon_{x_1x_1} & \varepsilon_{x_1x_2} & -\varepsilon_{x_1x_3} & & & & \\ & \varepsilon_{x_2x_1} & \varepsilon_{x_2x_2} & -\varepsilon_{x_2x_3} & & 0 & & \\ & -\varepsilon_{x_3x_1} & -\varepsilon_{x_3x_2} & \varepsilon_{x_3x_3} & & & & \\ & & & & \mu_{x_3x_3} & -\mu_{x_3x_2} & -\mu_{x_3x_1} & \\ & & 0 & & -\mu_{x_2x_3} & \mu_{x_2x_2} & \mu_{x_2x_1} & \\ & & & & -\mu_{x_1x_3} & \mu_{x_1x_2} & \mu_{x_1x_1} & \\ & & & & & & & 1\end{pmatrix}.$$

5. Симметричная форма записи уравнений Максвелла для сред с ненулевой проводимостью

В случае сред с $\rho \neq 0$, $j \neq 0$ однородное уравнение (15) принимает вид неоднородного:

$$\sum_{i=1}^{4}\xi^{i}\left(\bar{\mathbf{R}}_i\,\frac{\partial}{\partial x_i}+\Bigl(\frac{\partial\bar{\mathbf{R}}_i+\frac{4\pi}{c}\Xi_i}{\partial x_i}\Bigr)\right)\mathbf{\Phi}=\mathbf{P}^{\cdot\Gamma}\,\mathbf{J};$$

$$\Xi_1=\Xi_2=\Xi_3=\mathbf{I};\ \ \Xi_4=diag\Bigl(\int\sigma dx_4,\int\sigma dx_4,\int\sigma dx_4,\int\sigma dx_4,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\Bigr);\ \mathbf{P}^{\cdot\Gamma}=diag(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 4\pi\rho,\ 0).$$

6. Замена переменных в уравнении Максвелла

Дополнительную возможность для нахождения решения уравнения Максвелла в случае заданных параметров среды дает замена переменных. При замене переменных (x_1, x_2, x_3, x_4) на $(x_1',\ x_2',\ x_3',\ x_4')$ уравнение (9) примет вид:

$$\sum_{i=1}^{4}\left(\mathbf{R}_i'\,\frac{\partial}{\partial x`_i}+\mathbf{P}_i\right)\xi^{i}\mathbf{\Phi}=0,$$

где

$$\mathbf{R}_i' = -\sum_{j=1}^{4} \mathbf{R}_j \xi^j \xi^i \frac{1}{\partial x_j / \partial x_i'}; \quad \mathbf{P}_i = -\sum_{j=1}^{4} \frac{\partial \mathrm{R}_j}{\partial x_i'} \xi^j \xi^i \frac{1}{\partial x_j / \partial x_i'}. \tag{17}$$

Как видно из (17), при осуществлении замены переменных можно не только изменить функции, входящие в состав материальных матриц, но и изменить само разложение материальных матриц. Данное свойство может быть полезно для выполнения требований коммутирования или антикоммутирования матриц.

Заключение. На основе развития идей [2] предложены альтернативные и эквивалентные формы записи матричных уравнений Максвелла.

Выбор формы представления определяется постановкой решаемой задачи. Так, первая симметричная форма удобна при отделении переменной *t*. В случае полного разделения переменных удобнее использовать вторую симметричную форму. В этом случае разложение материальных матриц имеет более простой вид, что упрощает выполнение операций коммутирования или антикоммутирования матриц.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андрушкевич, И.Е. О классификации сред с точки зрения разделимости уравнений Максвелла / И.Е. Андрушкевич, В.А. Жизневский, Ю.В. Шиенок // Вестн. Витебск. гос. ун-та им. П.М. Машерова. – 2005. – № 1 (35). – С. 112 – 118.
2. Андрушкевич, И.Е. Алгебраический метод разделения переменных в системе уравнений Максвелла / И.Е. Андрушкевич // Классы групп и алгебр: сб. тез. междунар. алгебр. конф., Гомель, 5 окт. 2005 г. – Гомель, 2005.
3. Dirac, P.A.M. The Quantum Theory of the Electron / P.A.M. Dirac // Proc. Roy. Soc. – 1928. – Vol. A117, № 778. – P. 610 – 624.
4. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц. – М.: Наука; гл. ред. физмат. лит., 1989. – Т. 4: Квантовая электродинамика.
5. Бете, Г. Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами / Г. Бете, Э. Солпитер. – М.: Физматгиз, 1969.
6. Бете, Г. Квантовая механика / Г. Бете; пер. с англ.; под ред. В.Л. Бонч-Бруевича. – М.: Мир, 1965.
7. Мессиа, А. Квантовая механика / А. Мессиа. Т. 1, 2. – М.: Наука; гл. ред. физмат. лит., 1958.
8. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц. – М.: Наука; гл. ред. физмат. лит., 1988. – Т. 3: Теория поля.
9. Савельев, И.В. Общий курс физики / И.В. Савельев. – М.: Наука; гл. ред. физмат. лит., 1970. – Т. 2: Электричество.

Поступила 21.06.2007