УДК 517.927.75

О НЕКОТОРЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ АНАЛОГА ТРЕТЬЕГО И ПЯТОГО УРАВНЕНИЙ ПЕНЛЕВЕ В СИММЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

А.А. ГРИГОРЬЕВ
(Белорусский государственный университет, г. Минск)

Изучается система обыкновенных дифференциальных уравнений, которая может быть рассмотрена как аналог третьего и пятого уравнений Пенлеве в симметрической форме более высокого порядка. Рассмотрены различные формы записи этой системы и приведены соответствующие им преобразования Бэклунда. Для данной системы указаны случаи значений параметров, в которых удается найти общее решение или некоторые первые интегралы. Найдены стационарные решения и условия их существования. Показано, что решения аналогов пятого уравнения Пенлеве в окрестности нуля и бесконечности могут иметь полюса любого порядка, а решения аналогов модифицированного пятого уравнения Пенлеве не могут иметь полюсов порядка выше первого. Изучена структура рациональных решений и найдены необходимые и достаточные условия их существования.

Введение. В данной статье рассматриваются свойства иерархии систем уравнений, являющихся обобщениями высших порядков третьего и пятого уравнений Пенлеве. Третье

$$w'' = \frac{(w')^2}{2w} - \frac{w'}{z} + \frac{1}{z}(\alpha w^2 + \beta) + \gamma w^3 + \frac{\delta}{w} \tag{1}$$

и пятое уравнение Пенлеве [1]:

$$w'' = \left(\frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1}\right)(w')^2 - \frac{w'}{z} + \frac{(w-1)^2}{z^2}\left(\alpha w + \frac{\beta}{w}\right) + \frac{\gamma w}{z} + \frac{\delta w(w+1)}{w-1}, \tag{2}$$

где α, β, γ и δ – произвольные комплексные постоянные, были найдены в начале XX века как уравнения с решениями без критических подвижных особых точек, решения которых не могли быть выражены через элементарные и известные специальные функции. В настоящее время известно, что к данным уравнениям можно прийти при рассмотрении задач распространения волн на мелкой воде [2], уравнений типа синуса Гордона [3], некоторых случаев уравнений типа Эйнштейна [4], уравнений Максвелла – Блоха взаимодействия когерентного излучения с веществом [5] и других нелинейных задач. Более подробное рассмотрение свойств данных уравнений, а также их решений приведено, например, в [6].

Отметим, однако, что данные уравнения допускают решения с критическими особыми точками, которые являются неподвижными, т.е. их положение не зависит от произвольных постоянных интегрирования. В связи с этим рассматривается также модифицированное третье уравнение Пенлеве:

$$w'' = \frac{(w')^2}{2w} + e^z(\alpha w^2 + \beta) + e^{2z}\left(\gamma w^3 + \frac{\delta}{w}\right), \tag{3}$$

и модифицированное пятое уравнение Пенлеве:

$$w'' = \left(\frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1}\right)(w')^2 + (w-1)^2\left(\alpha w + \frac{\beta}{w}\right) + \gamma e^t w + \frac{\delta e^{2t} w(w+1)}{w-1}, \tag{4}$$

которые получаются при замене $z = e^t$ соответственно в уравнениях (1) и (2). Для данных уравнений показано в [7, 8], что все его решения являются мероморфными функциями в комплексной плоскости или могут быть продолжены до них.

М. Ноуми в работах [9, 10] предложил следующую систему уравнений в качестве симметрической формы записи пятого уравнения Пенлеве:

$$\begin{cases} f_0' = f_0(f_1 f_2 - f_2 f_3) + (h/2 - \alpha_2) f_0 + \alpha_0 f_2, & f_1' = f_1(f_2 f_3 - f_3 f_0) + (h/2 - \alpha_3) f_1 + \alpha_1 f_3, \\ f_2' = f_2(f_3 f_0 - f_0 f_1) + (h/2 - \alpha_0) f_2 + \alpha_2 f_0, & f_3' = f_3(f_0 f_1 - f_1 f_2) + (h/2 - \alpha_1) f_3 + \alpha_3 f_1. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь $f_i = f_i(t)$, а постоянные комплексные параметры таковы, что $\sum_{i=0}^{3} \alpha_i = h \neq 0$.

М. Ноуми в [10] рассматривает лишь случай $\delta = -1/2$ в уравнении (2). Мы покажем, как система (5) приводится к более общему случаю пятого уравнения Пенлеве (2), а также в двух случаях – к третьему уравнению Пенлеве (1).

Отметим предварительно, что при замене переменных $\tilde{t} = ht, \tilde{f} = \sqrt{h} f$ в системе (5) мы вновь получим систему вида (5), но для $h = 1$. Поэтому с самого начала, не ограничивая общности, можно рассматривать лишь случай $h = 1$. Введём замену $z = e^t$. Получим

$$\begin{cases} zf_0' = f_0(f_1 f_2 - f_2 f_3) + (1/2 - \alpha_2) f_0 + \alpha_0 f_2, & zf_1' = f_1(f_2 f_3 - f_3 f_0) + (1/2 - \alpha_3) f_1 + \alpha_1 f_3, \\ zf_2' = f_2(f_3 f_0 - f_0 f_1) + (1/2 - \alpha_0) f_2 + \alpha_2 f_0, & zf_3' = f_3(f_0 f_1 - f_1 f_2) + (1/2 - \alpha_1) f_3 + \alpha_3 f_1, \end{cases} \tag{6}$$

где $f_i = f_i(z)$. Данная система имеет два первых интеграла: $f_0 + f_2 = C_0\sqrt{z}$ и $f_1 + f_3 = C_1\sqrt{z}$. С помощью этих соотношений исключим f_2 и f_3. Имеем

$$\begin{cases} zf_0' = f_0(C_0\sqrt{z} - f_0)(2f_1 - C_1\sqrt{z}) + (1/2 - \alpha_2) f_0 + \alpha_0(C_0\sqrt{z} - f_0); \\ zf_1' = f_1(C_1\sqrt{z} - f_1)(C_0\sqrt{z} - 2f_0) + (1/2 - \alpha_3) f_1 + \alpha_1(C_1\sqrt{z} - f_1). \end{cases} \tag{7}$$

Первое из уравнений линейно по f_1, поэтому можно выразить f_1 и подставить его во второе уравнение. Если $C_0 \neq 0$, то после замены $f_0 = \dfrac{C_0\sqrt{z}}{1-w}$ придём в точности к (2) с параметрами:

$$\alpha = \alpha_0^2/2,\ \beta = -\alpha_2^2/2,\ \gamma = C_0 C_1(-\alpha_1 + \alpha_3),\ \delta = -C_0^2 C_1^2/2. \tag{8}$$

В случае же когда $C_0 = 0$, приходим к (1) относительно $f_0(z)$ с параметрами:

$$\alpha = -C_1(\alpha_1 - \alpha_3);\quad \beta = 0;\quad \gamma = C_1^2;\quad \delta = 0. \tag{9}$$

Таким образом, имеем три случая: 1) при ненулевых постоянных C_0 и C_1 все решения f_i системы (5) выражаются через решения пятого уравнения Пенлеве; 2) при $C_0 = 0$ и $C_1 \neq 0$ все f_i с четными индексами выражаются через решения третьего уравнения Пенлеве, а с нечетными – через решения пятого уравнения Пенлеве; 3) при $C_0 = C_1 = 0$ все решения f_i системы (5) выражаются через решения третьего уравнения Пенлеве.

Вернёмся к системе (5). Известно, что данная система допускает преобразования Бэклунда, составляющие расширенную аффинную группу Вейля порядка 3, состоящую из операторов s_i:

$$\begin{aligned} &s_i(\alpha_i) = -\alpha_i;\quad s_i(\alpha_j) = \alpha_j + \alpha_i, (j = i \pm 1);\quad s_i(\alpha_j) = \alpha_j, (j \neq i \pm 1); \\ &s_i(f_i) = f_i;\quad s_i(f_j) = f_j \pm \frac{\alpha_i}{f_i}, (j = i \pm 1);\quad s_i(f_j) = f_j, (j \neq i \pm 1), \end{aligned} \tag{10}$$

где $i \in Z/4Z$, и оператора циклической перестановки индексов π, действующего также в группе $Z/4Z$.

Рассматривая все нечетные порядки, которые больше трех, в [9] вводится иерархия аналогов (5) высших порядков:

$$f_i' = f_i\Big(\sum_{1\le r\le s\le n} f_{i+2r-1} f_{i+2s} - \sum_{1\le r\le s\le n} f_{i+2r} f_{i+2s+1}\Big) + \Big(\frac{h}{2} - \sum_{1\le r\le n} \alpha_{i+2r}\Big) f_i + \alpha_i\Big(\sum_{1\le r\le n} f_{i+2r}\Big),\ i = \overline{0, 2n+1}, \tag{11}$$

где $f_i = f_i(t)$.

В такой записи системы предполагается, что все индексы выбираются из группы $Z/(2n+2)Z$. К примеру, при $n = 1$ получим систему (5), а при $n = 2$ первое уравнение данной системы будет иметь вид:

$$f_0' = f_0(f_1 f_2 - f_2 f_3 + f_3 f_4 - f_4 f_5 + f_1 f_4 - f_2 f_5) + \left(\frac{h}{2} - \alpha_2 - \alpha_4\right) f_0 + \alpha_0(f_2 + f_4). \tag{12}$$

Кроме того, из условия получения системы (11) следует, что $\sum \alpha_i = h \neq 0$. Отметим вновь также, что система (11) является инвариантной относительно преобразования:

$$\tilde{t} = tc^2;\ \ \tilde{f}_i = \frac{f_i}{c};\ \ \tilde{\alpha}_i = \frac{\alpha_i}{c^2}. \tag{13}$$

Таким образом, как и ранее, без ограничения общности можно рассматривать лишь случай $h = 1$. И, наконец, для данной системы очевидны два первых интеграла:

$$\sum_{0\le r\le n} f_{2r} = C_0 e^{t/2};\ \ \sum_{0\le r\le n} f_{1+2r} = C_1 e^{t/2}. \tag{14}$$

Для данной иерархии систем уравнений в [9] рассмотрена структура Пуассона, найден гамильтониан, найдено представление в билинейной форме через τ-функции. В [10] предложен алгоритм построения пары Лакса. В этой работе мы изучаем структуру и свойства решений данной системы при $n = 2$, с целью проверить, сохраняются ли аналогии в аналитических свойствах решений. В случае положительного результата можно будет пытаться обобщить это исследование на произвольное натуральное n.

Прежде чем приступить к рассмотрению решений, введем в систему (11) две замены переменных. После замены зависимых переменных $\tilde{f}_i(t) = \mathrm{e}^{-t/2} f_i(t)$, убирая тильды, имеем

$$f_i' = \mathrm{e}^t f_i\Big(\sum_{1\le r\le s\le 2} f_{i+2r-1} f_{i+2s} - \sum_{1\le r\le s\le 2} f_{i+2r} f_{i+2s+1}\Big) - \Big(\sum_{1\le r\le 2}\alpha_{i+2r}\Big) f_i + \alpha_i\Big(\sum_{1\le r\le 2} f_{i+2r}\Big),\ i = \overline{0,5}, \tag{15}$$

и далее при замене независимой переменной $z = \mathrm{e}^t$ в (15) система примет вид:

$$z f_i' = z f_i\Big(\sum_{1\le r\le s\le 2} f_{i+2r-1} f_{i+2s} - \sum_{1\le r\le s\le 2} f_{i+2r} f_{i+2s+1}\Big) - \Big(\sum_{1\le r\le 2}\alpha_{i+2r}\Big) f_i + \alpha_i\Big(\sum_{1\le r\le 2} f_{i+2r}\Big),\ i = \overline{0,5}. \tag{16}$$

После данных замен мы потеряли стационарность систем и их преобразований Бэклунда. С другой стороны, в уравнениях пропало слагаемое $f_i/2$, и первые интегралы приняли наиболее выгодный вид

$$f_0 + f_2 + f_4 = C_0;\quad f_1 + f_3 + f_5 = C_1 \tag{17}$$

для обеих систем (15) и (16).

Введем следующие обозначения:

$$\Phi_i = \sum_{1\le r\le s\le 2} f_{i+2r-1} f_{i+2s} - \sum_{1\le r\le s\le 2} f_{i+2r} f_{i+2s+1},\quad A_0 = \alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_4,\ A_1 = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5. \tag{18}$$

Это существенно упростит запись: с учетом известных интегралов (17) системы (15) и (16) можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} f_i' = \mathrm{e}^t f_i\Phi_i - A_{(i \bmod 2)} f_0 + \alpha_i C_{(i \bmod 2)},\ i = \overline{0,5}; \\ f_0 + f_2 + f_4 = C_0,\ f_1 + f_3 + f_5 = C_1 \end{cases} \tag{19}$$

и

$$\begin{cases} z f_i' = z f_i\Phi_i - A_{(i \bmod 2)} f_0 + \alpha_i C_{(i \bmod 2)},\ i = \overline{0,5}; \\ f_0 + f_2 + f_4 = C_0,\ f_1 + f_3 + f_5 = C_1. \end{cases} \tag{20}$$

Такая запись является оптимальной в следующем смысле: при аналогичных заменах в исходной иерархии (11) при $n = 1$ получаются системы уравнений, решения которых *алгебраически* выражаются через решения соответствующих случаев уравнений Пенлеве. А сами эти случаи определены явно заданием констант C_0 и C_1 в самих уравнениях. Действие преобразований Бэклунда (10) на переменные f_i в данном случае примет вид:

- для системы (19):

$$s_i(f_i) = f_i;\quad s_i(f_j) = f_j \pm \frac{\alpha_i}{\mathrm{e}^t f_i},(j = i\pm 1);\quad s_i(f_j) = f_j,(j \ne i\pm 1); \tag{21}$$

- для системы (20):

$$s_i(f_i) = f_i;\quad s_i(f_j) = f_j \pm \frac{\alpha_i}{z f_i},(j = i\pm 1);\quad s_i(f_j) = f_j,(j \ne i\pm 1). \tag{22}$$

Обратим особое внимание, что величины C_0 и C_1 инвариантны относительно s_i.

Теперь приступим к изучению свойств решений.

Аналоги разрешимых в элементарных функциях случаев третьего и пятого уравнений Пенлеве. Как мы видели в (9), в случае $C_0 = C_1 = 0$ все решения первого члена иерархии аналогов можно выразить через решения третьего уравнения Пенлеве (1) с параметрами $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. В этом случае общее решение третьего уравнения Пенлеве может быть выражено в элементарных функциях [6]. Покажем, что при $C_0 = C_1 = 0$ общее решение систем-аналогов также выражается в элементарных функциях.

При подстановке $f_5 = -f_1 - f_3$ и $f_4 = -f_0 - f_2$ в члены Φ_i обнаруживается, что все они равны:

$$\Phi_i = \Phi = 2\big(f_2 f_3 + f_0(f_1 + f_3)\big).$$

Система (19) примет вид:

$$\begin{cases} f_0' = f_0(-A_0 - \Phi), \quad f_2' = f_2(-A_0 - \Phi), \quad f_4' = f_4(-A_0 - \Phi), \\ f_1' = f_1(-A_1 + \Phi), \quad f_3' = f_3(-A_1 + \Phi), \quad f_5' = f_5(-A_1 + \Phi). \end{cases} \tag{23}$$

Из этих уравнений имеем

$$\frac{f_{0'}}{f_0} = \frac{f_{2'}}{f_2} = \frac{f_{4'}}{f_4}, \frac{f_{1'}}{f_1} = \frac{f_{3'}}{f_3} = \frac{f_{5'}}{f_5}, A_0 + \frac{f_{0'}}{f_0} = -A_1 - \frac{f_{1'}}{f_1}. \tag{24}$$

Следовательно, $f_2 = k_2 f_0$, $f_4 = k_4 f_0$, $f_3 = k_3 f_1$, $f_5 = k_5 f_1$, где k_i – произвольные постоянные интегрирования такие, что $1 + k_2 + k_4 = 1 + k_3 + k_5 = 0$, и учитывая равенство: $A_0 + A_1 = \sum_{i=0}^{5} \alpha_i = 1$, имеем также $f_0 f_1 = Ke^{-t}$. Подставив в первое уравнение (23), получим линейное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$f_0' = f_0\left(-A_0 - 2K\left(\left(k_2 + 1\right)k_3 + 1\right)\right). \tag{25}$$

Его общее решение: $f_0 = k_0 e^{t\left(-2k_2k_3K - 2k_3K - 2K - A_0\right)}$, где k_0 произвольная постоянная интегрирования. Таким образом доказана

ТЕОРЕМА 1. Все решения системы (19) при $C_0 = C_1 = 0$ имеют вид: $f_i(t) = ae^{bt}$, где $a, b \in \mathrm{X}$.

В случае $C_0 = 0$ и $C_1 \neq 0$ решения системы (5) f_0 и f_2 выражаются через решения третьего уравнения Пенлеве (1) с параметрами $\alpha = -C_1(\alpha_1 - \alpha_3), \beta = 0, \gamma = C_1^2, \delta = 0$, а решения f_1 и f_3 – через решения пятого уравнения Пенлеве (2) с параметрами $\alpha = \alpha_0^2/2, \beta = -\alpha_2^2/2, \gamma = 0, \delta = 0$.

Значит, при рассмотрении аналогов высших порядков в ситуации $C_0 = 0$ и $C_1 \neq 0$ мы имеем дело со смешанным случаем. И для третьего, и для пятого уравнений Пенлеве с этими наборами параметров найдены общие решения [6]. Ожидаемо, что в данном случае уже не получается выразить общее решение в элементарных функциях в общем случае, однако удается найти несколько интегралов.

Система (19) имеет вид:

$$\begin{cases} f_0' = e^t f_0\left(f_1 f_2 + f_1 f_4 + f_3 f_4 - f_3 f_2 - f_5 f_2 - f_4 f_5\right) - A_0 f_0; \\ f_1' = e^t f_1\left(f_2 f_3 + f_2 f_5 + f_4 f_5 - f_0 f_3 - f_4 f_3 - f_0 f_5\right) - A_1 f_1 + C_1\alpha_1; \\ f_2' = e^t f_2\left(f_0 f_3 + f_3 f_4 + f_0 f_5 - f_0 f_1 - f_4 f_1 - f_4 f_5\right) - A_0 f_2; \\ f_3' = e^t f_3\left(f_0 f_1 + f_4 f_1 + f_4 f_5 - f_2 f_1 - f_0 f_5 - f_2 f_5\right) - A_1 f_3 + C_1\alpha_3; \\ f_4' = e^t f_4\left(f_2 f_1 + f_0 f_5 + f_2 f_5 - f_0 f_1 - f_0 f_3 - f_2 f_3\right) - A_0 f_4; \\ f_5' = e^t f_5\left(f_0 f_1 + f_0 f_3 + f_2 f_3 - f_2 f_1 - f_4 f_1 - f_3 f_4\right) - A_1 f_5 + C_1\alpha_5. \end{cases} \tag{26}$$

ТЕОРЕМА 2. Система (26) имеет следующие стационарные решения:

- при $A_0 \neq 0$ и $A_1 \neq 0$ $f_0 = f_2 = f_4 = 0, \ f_1 = \dfrac{C_1\alpha_1}{A_1}, \ f_3 = \dfrac{C_1\alpha_3}{A_1}, \ f_5 = \dfrac{C_1\alpha_5}{A_1};$ (27)
- при $A_0 = 0$ и $A_1 = 1$ $f_0 = f_2 = f_4 = 0, \ f_1 = C_1\alpha_1, \ f_3 = C_1\alpha_3, \ f_5 = C_1\alpha_5;$ (28)
- при $A_0 = 1$ и $A_1 = 0$ стационарное решение существует только в случае $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = 0$ и имеет вид:

$$f_0 = f_2 = f_4 = 0, \ f_1, f_3, f_5 \in \mathrm{X}. \tag{29}$$

Других стационарных решений нет.

Доказательство. Поскольку решения стационарны, то $f_i' = 0$. Коэффициенты при e^t в каждом уравнении также равны нулю. Поэтому имеем из каждого из уравнений

$$-A_0 f_0 = C_1\alpha_1 - A_1 f_1 = -A_0 f_2 = C_1\alpha_3 - A_1 f_3 = -A_0 f_4 = C_1\alpha_5 - A_1 f_5 = 0. \tag{30}$$

Учитывая, что $f_0 = f_2 = f_4 = 0$ обращает в ноль коэффициенты при e^t в каждом уравнении, это доказывает формулы (27) и (29). В случае же $A_0 = 0$ и $A_1 = 1$ при произвольных f_0, f_2, f_4 получаем

$f_1 = C_1\alpha_1$, $f_3 = C_1\alpha_3$, $f_5 = C_1\alpha_5$. Подставим эти значения, а также $f_4 = -f_0 - f_2$ в систему (26). Тогда из суммы первого и второго уравнений следует $f_0 = 0$, а из разности второго и четвертого $-f_2 = 0$, что автоматически влечет и $f_4 = 0$. Теорема доказана.

Замечание. Теорема 2 справедлива и для соответствующего случая ($C_0 = 0$ и $C_1 \neq 0$) системы (20).

Следствие. Система (26) не имеет рациональных решений, отличных от констант. Система (20) при $C_0 = 0$ и $C_1 \neq 0$ может иметь рациональные решения при любом наборе параметров α_i таком, что либо $A_1 \neq 0$, либо $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = 0$. Эти решения могут быть получены с помощью преобразований Бэклунда (22).

ТЕОРЕМА 3. Система (26) имеет следующие интегралы:

- для $r = 0$, $r = 1$ и $r = 2$:

$$(\alpha_{2r-1} + \mathrm{e}^t f_{2r-1} f_{2r})(\alpha_{2r+1} - \mathrm{e}^t f_{2r} f_{2r+1}) = K_{2r}; \tag{31}$$

- для любого из $s = 0$, $s = 1$ или $s = 2$, при условии, что $\alpha_{2s+1} \neq 0$:

$$f_{2s+2}(\alpha_{2s+1} - \mathrm{e}^t f_{2s} f_{2s+1}) = K_{2s+1} f_{2s}(\alpha_{2s+1} + \mathrm{e}^t f_{2s+1} f_{2s+2}); \tag{32}$$

- для любого из $s = 0$, $s = 1$ или $s = 2$, при условии, что: $\alpha_{2s+1} = 0$:

$$(f_{2s} + f_{2s+2}) = K_{2s+1}\mathrm{e}^t f_{2s} f_{2s+1} f_{2s+2}, \tag{33}$$

где K_i – произвольные постоянные интегрирования.

Доказательство. Докажем сначала существование интеграла (31). Поскольку при зафиксированных $C_0 = 0$ и $C_1 \neq 0$ система (26) становится инвариантной относительно увеличения каждого индекса f_i и α_i на два, то достаточно провести доказательство только для одного r.

Пусть $r = 1$. Сложим третье уравнение (26), умноженное на f_3, с четвертым, умноженным на f_2, а также сложим третье уравнение, умноженное на f_1, со вторым, умноженным на f_2. Упрощая, имеем:

$$\begin{cases} f_3 f_2' + f_2 f_3' = -A_0 f_2 f_3 - A_1 f_2 f_3 + C_1 f_2(\alpha_3 - e^t f_2 f_3); \\ f_1 f_2' + f_1' f_2 = -A_0 f_1 f_2 - A_1 f_1 f_2 + C_1 f_2(\alpha_1 + e^t f_1 f_2). \end{cases} \tag{34}$$

Произведем замену переменных $u = f_1 f_2$ и $v = f_2 f_3$. Учитывая $A_0 + A_1 = 1$, имеем

$$v' = C_1\alpha_3 f_2 - ve^t C_1 f_2 - v,\ \ u' = C_1\alpha_1 f_2 + ue^t C_1 f_2 - u. \tag{35}$$

Теперь выразим из обоих равенств f_2 и приравняем. Получим

$$\frac{v + v'}{\alpha_3 - e^t v} = \frac{u + u'}{\alpha_1 + e^t u}. \tag{36}$$

Это уравнение легко интегрируется при замене переменных $u_1 = \mathrm{e}^t u$, $v_1 = \mathrm{e}^t v$. В результате имеем

$$(\alpha_1 + \mathrm{e}^t u)(\alpha_3 - \mathrm{e}^t v) = \mathrm{e}^{K_2}. \tag{37}$$

Возвращаясь к переменным f_i, имеем интеграл (31). Первая часть теоремы доказана.

Перейдем к доказательству второй части. Не ограничивая общности, зафиксируем $s = 0$. Сложим первое уравнение (26), умноженное на f_1, со вторым, умноженным на f_0. Сложим второе уравнение, умноженное на f_2, с третьим, умноженным на f_1. И, наконец, из первого уравнения, деленного на f_0, вычтем третье, деленное на f_2:

$$\begin{cases} f_1 f_0' + f_0 f_1' = -A_0 f_0 f_1 - A_1 f_0 f_1 + C_1 f_0(\alpha_1 - e^t f_0 f_1); \\ f_2 f_1' + f_1 f_2' = -A_0 f_1 f_2 - A_1 f_1 f_2 + C_1 f_2(\alpha_1 + e^t f_1 f_2); \\ \quad f_0'/ f_0 - f_2'/ f_2 = -e^t C_1(f_0 + f_2). \end{cases} \tag{38}$$

Введем замену переменных $u = f_0 f_1$ и $v = f_1 f_2$. Из первых двух уравнений имеем

$$u' = C_1\alpha_1 f_0 - ue^t C_1 f_0 - u,\ \ v' = C_1\alpha_1 f_2 + ve^t C_1 f_2 - v. \tag{39}$$

Выразим отсюда f_0 и f_2 и подставим в правую часть третьего уравнения (38). Получим

$$-e^t\left(\frac{u+u'}{\alpha_1-e^t u}+\frac{v+v'}{\alpha_1+e^t v}\right)-\frac{f_{0'}}{f_0}+\frac{f_{2'}}{f_2}=0. \tag{40}$$

Вновь используя замену $u_1 = \mathrm{e}^t u$, $v_1 = \mathrm{e}^t v$, интегрируем это уравнение. Имеем равенство

$$\ln\left(\alpha_1-\mathrm{e}^t u\right)-\ln\left(\alpha_1+\mathrm{e}^t v\right)-\ln(f_0)+\ln(f_2)=K_1, \tag{41}$$

потенцируя которое и возвращаясь к переменным f_i, получим интеграл (32). Этот интеграл выведен в предположении, что $\alpha_1 \neq 0$. Если же $\alpha_1 = 0$, то имеем

$$(-\mathrm{e}^t f_0 f_1) f_2 = K_1 f_0(\mathrm{e}^t f_1 f_2) \;\Rightarrow\; K_1 \equiv -1. \tag{42}$$

Поэтому при $\alpha_1 = 0$ поступим следующим образом: сложим первое и второе уравнения (38) и введем замену $w = f_1(f_0+f_2)$. С учетом $A_0 + A_1 = 1$ и $\alpha_1 = 0$ получим

$$w(1-e^t C_1(f_2-f_0))+w'=0. \tag{43}$$

Подставив в это равенство f_0 и f_2 из (40), получим

$$-\frac{u'(t)}{u(t)}-\frac{v'(t)}{v(t)}+\frac{w'(t)}{w(t)}-1=0. \tag{44}$$

При интегрировании этого равенства получаем интеграл (33). Теорема доказана.

Замечание. Теорема 3 не даёт общего интеграла системы (26), поскольку константы K_i могут зависеть друг от друга. Так, например, в случае $A_1 = \alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = 0$ для интегралов (31) и (33) имеется взаимосвязи вида: $K_2 = -\dfrac{1}{K_1K_3}$; $K_4 = -\dfrac{1}{K_3K_5}$; $K_0 = -\dfrac{1}{K_5K_1}$.

Аналог общего случая пятого уравнения Пенлеве. Здесь мы рассмотрим системы (19) и (20) в случае $C_0 \neq 0$ и $C_1 \neq 0$.

Рассмотрим подробно систему (19):

$$\begin{cases} f_0' = e^t f_0(f_1f_2+f_1f_4+f_3f_4-f_3f_2-f_5f_2-f_4f_5)-A_0f_0+C_0\alpha_0; \\ f_1' = e^t f_1(f_2f_3+f_2f_5+f_4f_5-f_0f_3-f_4f_3-f_0f_5)-A_1f_1+C_1\alpha_1; \\ f_2' = e^t f_2(f_0f_3+f_3f_4+f_0f_5-f_0f_1-f_4f_1-f_4f_5)-A_0f_2+C_0\alpha_2; \\ f_3' = e^t f_3(f_0f_1+f_4f_1+f_4f_5-f_2f_1-f_0f_5-f_2f_5)-A_1f_3+C_1\alpha_3; \\ f_4' = e^t f_4(f_2f_1+f_0f_5+f_2f_5-f_0f_1-f_0f_3-f_2f_3)-A_0f_4+C_0\alpha_4; \\ f_5' = e^t f_5(f_0f_1+f_0f_3+f_2f_3-f_2f_1-f_4f_1-f_3f_4)-A_1f_5+C_1\alpha_5. \end{cases} \tag{45}$$

ТЕОРЕМА 4. Для любого набора параметров α_i, допустимого (18), система (45) при $C_0 \neq 0$ и $C_1 \neq 0$ имеет следующие стационарные решения:

- при $A_0 \neq 0$ и $A_1 \neq 0$ стационарное решение существует для следующих значений параметров α_i, определенных с точностью до циклической перестановки индексов:

$$\begin{array}{lllllll} (\alpha_0, & \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4, & \alpha_5 &) \\ \hline (\alpha_0, & 1-\alpha_0, & 0, & 0, & 0, & 0 &) \\ (\alpha_0, & 0, & 0, & 1-\alpha_0, & 0, & 0 &) \\ (\alpha_0, & (1-2\alpha_0)/2, & \alpha_0, & (1-2\alpha_0)/2, & 0, & 0 &) \\ (\alpha_0, & (1-3\alpha_0)/3, & \alpha_0, & (1-3\alpha_0)/3, & \alpha_0, & (1-3\alpha_0)/3 &) \\ (-\alpha_0, & 0, & \alpha_0, & 1-\alpha_0, & \alpha_0, & 0 &) \end{array} \tag{46}$$

и решение имеет вид:

$$f_{2r}=\frac{C_0\alpha_{2r}}{A_0};\;\; f_{2s+1}=\frac{C_1\alpha_{2s+1}}{A_1};\; r,s=\overline{0,2}; \tag{47}$$

- при $A_0 = 1$ и $A_1 = 0$ стационарное решение существует только в случае $\alpha_{2s+1} = 0$ для всех $s = \overline{0,2}$.

Допустимые значения параметров и соответствующие им решения, определенные с точностью до циклической перестановки индексов, имеют вид:

$$f_{2r} = \frac{C_0\alpha_{2r}}{A_0}, r = \overline{0,2}, \tag{48}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
(\alpha_0, & \alpha_2, & \alpha_4); & (f_1, & f_3, & f_5) \\
\hline
(1, & 0, & 0) & (C_1, & 0, & 0) \\
(1, & 0, & 0) & (0, & C_1, & 0) \\
(1, & 0, & 0) & (0, & 0, & C_1) \\
(1, & 0, & 0) & (C_1, & -C_1, & C_1) \\
(1/2, & 1/2, & 0) & (C_1/2, & C_1/2, & 0) \\
(1, & 1, & -1) & (C_1, & 0, & 0) \\
(1/3, & 1/3, & 1/3) & (C_1/3, & C_1/3, & C_1/3)
\end{array} \tag{49}$$

- при $A_0 = 0$ и $A_1 = 1$ стационарные решения определяются пунктом 2 данной теоремы при увеличении всех индексов на 1.

Других стационарных решений нет.

Доказательство. Поскольку $f_i = Const$, из системы (45) сразу имеем

$$C_0\alpha_{2r} - f_{2r}A_0 = 0;\ C_1\alpha_{2s+1} - f_{2s+1}A_1 = 0;\ r,s = \overline{0,2}. \tag{50}$$

Отсюда сразу получаются выражения для решений (47) и (48). Предположим $A_0 \neq 0$ и $A_1 \neq 0$ и подставим решения (47) в систему (45). Имеем

$$\begin{cases}
\alpha_0\left(\alpha_1\left(\alpha_2+\alpha_4\right)+\alpha_4\left(\alpha_3-\alpha_5\right)-\alpha_2\left(\alpha_3+\alpha_5\right)\right)=0, \quad \alpha_1\left(\alpha_4\left(\alpha_3-\alpha_5\right)+\alpha_0\left(\alpha_3+\alpha_5\right)-\alpha_2\left(\alpha_3+\alpha_5\right)\right)=0, \\
\alpha_2\left(\alpha_0\left(\alpha_1-\alpha_3-\alpha_5\right)+\alpha_4\left(\alpha_1-\alpha_3+\alpha_5\right)\right)=0, \qquad \alpha_3\left(\alpha_0\left(\alpha_1-\alpha_5\right)-\left(\alpha_2-\alpha_4\right)\left(\alpha_1+\alpha_5\right)\right)=0. \\
\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5-1=0.
\end{cases} \tag{51}$$

Поскольку $\sum_{i=0}^{5}\alpha_i = 1$, не ограничивая общности предположим, что $\alpha_0 \neq 0$. Возможны три случая:

(а) $\alpha_4 = \alpha_2 = 0$;

(б) $\alpha_4 = 0$ и $\alpha_2 \neq 0$;

(в) $\alpha_4 \neq 0$ и $\alpha_2 \neq 0$.

При $\alpha_4 = \alpha_2 = 0$ из (51) следует $\alpha_1\left(\alpha_3+\alpha_5\right)=0$ и $\alpha_3\left(\alpha_1-\alpha_5\right)=0$, для чего необходимо, чтобы два из трех α_i с нечетными индексами были равны нулю. Это доказывает первую и вторую строки (46). При $\alpha_4 = 0$ и $\alpha_2 \neq 0$ сложим второе уравнение (51), умноженное на $\alpha_5(\alpha_3+\alpha_1)$, с четвертым, умноженным на $\alpha_1(\alpha_5-\alpha_3)$, получим $\alpha_1\alpha_3\alpha_5(\alpha_0(\alpha_1+\alpha_3)-\alpha_2(\alpha_1+\alpha_5)=0$.

Непосредственной подстановкой в (51) проверяется, что это возможно лишь либо при $\alpha_3 = 0$, либо при $\alpha_5 = 0$, что доказывает третью строку (46).

Как видим, если некоторое $\alpha_i = 0$, то по крайней мере одно из $\left\{\alpha_{i+1},\alpha_{i-1}\right\}$ тоже равно нулю. Поэтому в случае $\alpha_4 \neq 0$ и $\alpha_2 \neq 0$ получается, что все $\alpha_i \neq 0$. При сокращении уравнений (51) на α_i из первого и второго уравнений последовательно получаем:

$$\alpha_4 = \frac{-\alpha_1\alpha_2+\alpha_3\alpha_2+\alpha_5\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_3-\alpha_5};\ \alpha_0 = \frac{2\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{\left(\alpha_1+\alpha_3-\alpha_5\right)\left(\alpha_3+\alpha_5\right)}, \tag{52}$$

откуда следует, что $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5$ и $\alpha_0 = \alpha_2 = \alpha_4$, дказывая четвертую строку (46), либо два из нечетных α_i равны нулю, что доказывает пятую строку (46). Первая часть теоремы доказана.

Во второй части теоремы рассматривается случай $A_0 = 1$ и $A_1 = 0$.

Из (50) следует $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = 0.$

Тогда система (45) примет вид:

$$\begin{cases} \alpha_0\left(f_3(\alpha_4-\alpha_2)+f_1(\alpha_2+\alpha_4)-f_5(\alpha_2+\alpha_4)\right)=0, \quad \alpha_2\left(f_5(\alpha_4-\alpha_0)+f_1(\alpha_0+\alpha_4)-f_3(\alpha_0+\alpha_4)\right)=0, \quad \alpha_0+\alpha_2+\alpha_4=1 \\ f_1\left(f_5(\alpha_0-\alpha_2-\alpha_4)+f_3(\alpha_0-\alpha_2+\alpha_4)\right)=0, \quad f_3\left(f_1(\alpha_0-\alpha_2+\alpha_4)-f_5(\alpha_0+\alpha_2-\alpha_4)\right)=0, \quad f_1+f_3+f_5=C_1. \end{cases} \tag{53}$$

Мы вновь, не ограничивая общности, предположим α_0 и рассмотрим три варианта для α_2 и α_4.

Из $\alpha_4 = \alpha_2 = 0$ сразу следует $\alpha_0 = 1 \Rightarrow f_1(f_3+f_5) = f_3(f_1-f_5) = 0$, откуда получаются четыре первые строки (49).

При $\alpha_4 = 0$ и $\alpha_2 \neq 0$ имеем $\alpha_2 = 1-\alpha_0 \Rightarrow -f_1+f_3+f_5 = f_1(f_3+f_5)(1-2\alpha_0) = 0$, что дает пятую строку (49).

И, наконец, при $\alpha_4 \neq 0$ и $\alpha_2 \neq 0$, учитывая $\alpha_4 = 1-\alpha_0-\alpha_2$ и $f_5 = X_1 - f_1 - f_3$, получаем при $\alpha_0 \neq 1$

$$f_1 = \frac{C_1(\alpha_0-1)+2f_3(1-\alpha_0-\alpha_2)}{2(\alpha_0-1)} \Rightarrow f_3 = \frac{C_1(1-\alpha_0)}{2} \Rightarrow \alpha_0 = \alpha_2 = \alpha_4. \tag{54}$$

А при $\alpha_0 = 1$ имеем $f_3 = 0$ и либо $\alpha_4 = -1,\ f_1 = C_1$, либо $\alpha_2 = -1,\ f_5 = C_1$, что доказывает последние две строки таблицы (49) и завершает доказательство теоремы.

Замечание. В отличие от случая с $C_0 = 0$, рассмотренного в теореме 2, данная теорема сильно ограничивает набор параметров α_i. Это ставит вопрос об условиях существования рациональных решений системы (20), который будет более подробно рассмотрен в дальнейшем.

Перед этим, однако, необходимо разобраться с аналитическими свойствами решений системы (45), и в особенности с полярными степенными разложениями. Мы обращаем особое внимание, что в данном случае из-за высокой симметричности системы, а также свойств полиномов Φ_i не удается применить метод Пенлеве – Ковалевской (описание метода см., например, в [11]) для нахождения локального общего решения. Фактически он не позволяет определить даже возможные порядки полюсов решений. Поэтому для определения их мы вынуждены использовать непосредственную подстановку степенных разложений в систему (45). Из аналитических свойств решений модифицированного пятого уравнения Пенлеве (4), описанных в [6], известно, что решения (19) при $n = 1$ могут иметь лишь простые полюса. Оказывается, что это свойство справедливо и для (45).

ТЕОРЕМА 5. При $C_0 \neq 0$ и $C_1 \neq 0$ справедливы следующие утверждения:

- система (45) в окрестности $t = t_0$ может иметь степенные разложения решений с полюсами не более чем первого порядка;
- система (19) в окрестности точки $z = z_0 \neq 0$ может иметь степенные разложения решений с полюсами не более чем первого порядка;
- система (20) в окрестности точек $z = 0$ и $z = \infty$ может иметь степенные разложения решений с полюсами или нулями любого порядка.

Доказательство. Начнем доказательство с первого утверждения теоремы. Рассмотрим линейное уравнение первого порядка:

$$f'(t) = \mathrm{e}^t f(t)\Phi(t) - A f(t) + \alpha C, \qquad C \neq 0. \tag{55}$$

Обратим внимание, что при $\alpha \neq 0$ формальное решение в виде степенного ряда в окрестности точки $t = t_0$ может существовать только если $\Phi(t)$ может быть представлено в окрестности $t = t_0$ степенным рядом с полюсом не более чем первого порядка. Действительно, пусть младший член разложения f есть $k_p(t-t_0)^p$, а Φ имеет член в разложении с минимальной степенью $\phi_q(t-t_0)^q$, $q < 0$. Тогда минимальная степень $(t-t_0)$ в левой части (55) есть $(p-1)$, а в правой – $(p+q)$. Следовательно, для того чтобы существовало хотя бы какое-нибудь k_p, отличное от нуля, необходимо $q \geq -1$. С другой стороны, при $\alpha = 0$ возможно решение $f = 0$, для существования которого никаких ограничений на Φ не накладывается.

Каждое уравнение (45), рассмотренное в отдельности, является линейным уравнением первого порядка вида (55). Пусть все $\alpha_i \neq 0.$ Тогда ни для какого i невозможно решение $f_i = 0$. Следовательно, для того чтобы (45) имела решение в виде степенного разложения по целым степеням $(t-t_0)$, необходимо, чтобы для всех Φ_i, $i=\overline{0,5}$ точка $t=t_0$ была либо регулярной, либо полюсом первого порядка.

Таким образом, если у Φ_i не может быть полюсов порядка выше первого, то и у любой линейной комбинации Φ_i не может быть таких полюсов.

Рассмотрим линейную комбинацию:

$$\Phi_5-\Phi_3-2\Phi_2-3\Phi_1-\Phi_0=(2f_0-f_2-f_4)(f_1+f_3+f_5)=C_1(3f_0-C_0). \quad (56)$$

Очевидно, у f_0 не может быть полюса порядка выше первого. А в силу инвариантности системы (45) относительно циклической перестановки индексов это справедливо и для остальных $f_i, i=\overline{1,5}$.

Теперь рассмотрим тот случай, когда существует $\alpha_i=0$ и соответствующее $f_i=0$. Пусть для определенности $\alpha_4=0$. Возможны два случая: существует еще $i\neq 4$ такое, что $\alpha_i=0$, или же все остальные α_i ненулевые. Пусть $\alpha_1=0$ и $f_1=0$. С учетом (17) имеем:

$$\begin{aligned}&\Phi_0=C_1(f_0-C_0);\quad \Phi_1=C_1(C_0-2f_0);\quad \Phi_2=C_1f_0;\\&\Phi_3=C_0(f_3-C_1);\quad \Phi_4=C_0(C_1-2f_3);\quad \Phi_5=C_0f_3.\end{aligned} \quad (57)$$

Откуда заключаем, что если среди f_2, f_3, f_5 и f_0 есть не нулевые, то они могут иметь только простые полюса. Случай $\alpha_1=0$ и $f_1=0$ рассмотрен. Пусть теперь $\alpha_2=0$ и $f_2=0$. Подставляя в Φ_i, имеем:

$$\begin{aligned}&\Phi_0=-(C_0-f_0)(C_1-2f_1);\quad \Phi_1=(C_0-2f_0)(C_1-f_1);\quad \Phi_2=f_0(C_1-2f_1);\\&\Phi_3=2f_0f_1+C_0(f_3-C_1);\quad \Phi_4=C_0(C_1-2f_3)-2f_0f_1;\quad \Phi_5=2f_0f_1+C_0(f_3-f_1).\end{aligned} \quad (58)$$

Откуда вновь заключаем, что если среди f_1, f_3, f_5 и f_0 есть не нулевые, то они могут иметь лишь простые полюса. Случай $\alpha_2=0$ и $f_2=0$ рассмотрен полностью. Пусть, наконец, $\alpha_3=0$ и $f_3=0$. В этом случае все функции f_1, f_2, f_5 и f_0 имеют вид: $f_i=C_{Mod(i,2)}/(w_i-1)$, где w_i решение модифицированного пятого уравнения Пенлеве с $\delta\neq 0$. В этом случае w_i-1 может иметь ноль не более чем первого порядка и, соответственно, f_i не может иметь полюс порядка выше первого. Случай $\alpha_3=0$ и $f_3=0$ рассмотрен полностью. Случаи $\alpha_5=0$ или $\alpha_0=0$ приводят к требуемому результату при циклической перестановке индексов в уже рассмотренных случаях. Наконец, если кроме $\alpha_4=0$ все остальные $\alpha_i\neq 0$, имеем:

$$\begin{aligned}&\Phi_0=-(C_0-f_0)(C_1-2f_1);\quad \Phi_1=(C_0-2f_0)(C_1-f_1);\quad \Phi_2=f_0(C_1-2f1);\\&\Phi_3=2f_0f_1+C_0(f_3-C_1);\quad \Phi_4=C_0(C_1-2f_3)-2f_0f_1;\quad \Phi_5=2f_0f_1+C_0(f_3-f_1).\end{aligned} \quad (59)$$

Кроме того, справедлива формула (56) поскольку она не зависит от Φ_4. Значит, если у f_0 есть полюс, то это простой полюс. Из интегралов (17) следует, что поскольку $f_4=0$, то и f_2 может иметь лишь простой полюс. Из выражения для Φ_0 в (59) заключаем, что и f_1, и f_0f_1 могут иметь лишь простой полюс. Тогда из выражения для Φ_4 в (59) следует, что и для f_3 возможен только полюс первого порядка. Первая часть теоремы доказана. Вторая часть теоремы непосредственно вытекает из первой. Действительно, поскольку система (20) получается из системы (19) заменой переменных $z=e^t$, то если бы для системы (20) был возможен полюс в точке $z=z_0$ порядка выше первого, то и система (45) имела бы полюс того же порядка в точке $t=Ln(z_0)$, что невозможно. Для доказательства третьей части теоремы достаточно заметить, что при $\alpha_5=\alpha_4=0$ и $f_5=f_4=0$ система (20) превращается в симметрическую форму пятого уравнения Пенлеве. В этом случае все функции f_1, f_2, f_5 и f_0 имеют вид: $f_i=C_{Mod(i,2)}/(w_i-1)$, где w_i – решения пятого уравнения Пенлеве.

Как известно [6] w_i может иметь полюс в точке $z=0$ любого порядка. Следовательно, f_i может иметь ноль любого порядка. Тогда из преобразований Бэклунда (22) вытекает, что и полюс также возможен любого порядка. Теорема доказана.

Следствие. На основании известных преобразований Бэклунда (21) и (22), а также доказанной теоремы заключаем, что решения системы (45), а также системы (20), полученные в виде степенных рядов в окрестности точек $t = t_0$ и $z = z_0 \neq 0$ соответственно, могут иметь нули не более чем первого порядка.

Теперь мы можем получить необходимые и достаточные условия существования рациональных решений системы (20). Мы будем искать эти условия только для таких наборов $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_5)$, где все $Re(\alpha_i) \geq 0$, поскольку орбита любого набора $\boldsymbol{\alpha} \in X^6$ такого, что $\sum_{i=0}^{5} \alpha_i = 1$, относительно преобразований Бэклунда (22) проходит через некоторое $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$, у которого все $Re(\tilde{\alpha}_i) \geq 0$. Доказательство этого факта приведено в [12], там же приведен алгоритм нахождения $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$ по известному $\boldsymbol{\alpha}$.

ТЕОРЕМА 6. Система (20) в случае $C_0 \neq 0$ и $C_1 \neq 0$ и набора параметров $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_5)$ такого, что $Re(\alpha_i) \geq 0$ имеет рациональные решения $\mathbf{f} = (f_0, f_1, ..., f_5)$ только при следующих $\boldsymbol{\alpha}$, определенных с точностью до циклической перестановки индексов:

$$\begin{array}{lllllll}
(\alpha_0, & \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4, & \alpha_5 \;) & \\
\hline
(\alpha_0, & 1-\alpha_0, & 0, & 0, & 0, & 0), & Re(\alpha_0) \in [0,\ 1]; \\
(\alpha_0, & 0, & 0, & 1-\alpha_0, & 0, & 0), & Re(\alpha_0) \in [0,\ 1]; \\
(\alpha_0, & (1-2\alpha_0)/2, & \alpha_0, & (1-2\alpha_0)/2, & 0, & 0), & Re(\alpha_0) \in [0,\ 1/2]; \\
(\alpha_0, & (1-3\alpha_0)/2, & \alpha_0, & (1-3\alpha_0)/2, & \alpha_0, & (1-3\alpha_0)/2), & Re(\alpha_0) \in [0,\ 1/3].
\end{array} \tag{60}$$

Доказательство. Уравнения (20) имеют вид:

$$z\, f_i\,' = z\, f_i \Phi_i - A_{(i \bmod 2)} f_0 + \alpha_i\, C_{(i \bmod 2)}; \quad i = \overline{0,5}, \tag{61}$$

а каждое их рациональное решение может быть представлено как

$$f_i = \left(\frac{r_{i,-q_i}}{z_i^q} + \frac{r_{i,-q_i+1}}{z^{q-1}} + ... + \frac{r_{i,-1}}{z} \right) + \left(r_{i,1} z + r_{i,2} z^2 + ... + r_{i,p_i} z_i^p \right) + r_{i,0} + \left(\frac{k_{i,1}}{z - z_1} + ... + \frac{k_{i,m}}{z - z_m} \right). \tag{62}$$

Сложим первое уравнение (61), умноженное на f_1, со вторым, умноженным на f_0. Упрощая с учетом $f_0 + f_2 + f_4 = C_0$, $f_1 + f_3 + f_5 = C_1$ и $A_0 + A_1 = 1$, имеем

$$z(f_0 f_1)' = z f_0 f_1 (C_0 f_1 - C_1 f_0) - f_0 f_1 + \alpha_0 C_0 f_1 + \alpha_1 C_1 f_0. \tag{63}$$

Если мы будем рассматривать, что происходит с полиномиальной частью f_i, то увидим, что максимальная степень z в левой части этого равенства составит $(p_0 + p_1)$, а в правой – $(1 + p_0 + p_1 + d)$, где d – максимальная степень z в разности $(C_0 f_1 - C_1 f_0)$.

Для того чтобы равенство было возможно, необходимо $d \leq -1$. Значит, полиномиальные части $C_0 f_1$ и $C_1 f_0$ равны.

Поскольку равенство (62) остается верным при циклической перестановке индексов, то получаем, что если существует $p_i > 0$, то $p_0 = p_1 = ... = p_5$ и $r_{0,p_0} C_1 = r_{1,p_1} C_0 = ... = r_{5,p_5} C_0$.

Учитывая, что $r_{0,p_0} + r_{2,p_2} + r_{4,p_4} = 0$ и $r_{1,p_1} + r_{3,p_3} + r_{5,p_5} = 0$, получаем, что все $r_{i,p_i} = 0$.

Аналогично можно получить и тот факт, что каждое q_i может быть равно либо нулю, либо единице. То есть все полюса у рациональных решений простые.

Таким образом, имеем, что точка $z = \infty$ является регулярной точкой для рациональных решений.

Представим f_i в виде

$$f_i = r_i + K_i, \;\; r_i = Const, \;\; K_i = \frac{k_{i,0}}{z} + \left(\frac{k_{i,1}}{z - z_1} + ... + \frac{k_{i,m}}{z - z_m} \right), \tag{64}$$

и подставим в первое уравнение (60). Имеем

$$zK_0\,' = z(K_0 + r_0)\Phi_0 - A_0(K_0 + r_0) + \alpha_0 C_0. \tag{65}$$

Будем писать $\Phi_0(\mathbf{K})$ или $\Phi_0(\mathbf{r})$ в качестве обозначения Φ_0, вычисленного не на наборе $\mathbf{f} = (f_0, f_1,..., f_5)$, а на наборах $\mathbf{K} = (K_0, K_1,..., K_5)$ или $\mathbf{r} = (r_0, r_1,..., r_5)$ соответственно. Тогда при непосредственной подстановке получаем соотношение:

$$\Phi_0 = \Phi_0(\mathbf{K}) + \Phi_0(\mathbf{r}) + \Psi_0,$$
$$\Psi_0 = (X_1 - 2r_1 - 2r_3)K_0(t) + (2X_0 - 2r_0)K_1(t) - 2r_3K_2(t) + (2X_0 - 2r_0 - 2r_2)K_3(t). \tag{66}$$

Подставив это в (65), получим

$$(-zK_0' + zK_0\Phi_0(\mathbf{K}) - A_0K_0) + (K_0\Phi_0(\mathbf{r}) + K_0\Psi_0 + r_0\Psi_0 + b_0\Phi_0(\mathbf{K})) + (zr_0\Phi_0\mathbf{r} - A_0r_0 + \alpha_0C_0) = 0. \tag{67}$$

Перейдем в этом уравнении к пределу при $z \to \infty$. Учитывая структуру K_0, Φ_0 и Ψ_0, имеем

$$(zr_0\Phi_0(\mathbf{r}) - A_0r_0 + \alpha_0C_0) = 0. \tag{68}$$

Аналогичным образом это равенство может быть получено для каждого r_i, следовательно, набор $\mathbf{f} = \mathbf{r}$ является стационарным решением системы (61). Тогда утверждение (60) нашей теоремы является непосредственным следствием условий существования стационарных решений (46) и (49). Теорема доказана.

Заключение. На основной вопрос исследования свойств решений системы (11) при $n = 2$ о том, имеются ли аналогии со свойствами третьего и пятого уравнений Пенлеве в симметрической форме, мы можем ответить утвердительно.

Теоремы 1 и 3 обобщают случаи, когда можно найти общее решение или интегралы; теорема 5 говорит об аналогичных аналитических свойствах решений; теоремы 2, 4 и 6 показывают аналогию в необходимых и достаточных условиях существования рциональных решений. Это говорит о том, что подобное исследование этих свойств для произвольного n возможно и представляет интерес.

ЛИТЕРАТУРА

1. Painleve, P. Memoire sur les equations differentieles don't l'integrale generale est uniforme / P. Painleve // France, Bull. Soc. Math. Phys. – 28 (1900). – P. 201 – 261.
2. Clarkson, P.A. On a shallow water wave equation / P.A. Clarkson and E.L. Mansfield // Nonlinearity. – 7 (1994). – P. 975 – 1000.
3. Gromak, V.I. Nonlinear two-dimensional field theory models and Painleve equations / V.I. Gromak and V.V. Tsegel'nik // Teoret. Mat. Fiz. – 55 (1983). P. 189 – 196; Teoret. and Math. Phys. – 55 (1983). – P. 440 – 445.
4. Leaute, B. A new transcendent solution of Einstein's equations / B. Leaute and G. Marcilhacy // Phys. Lett. A 87 – (1981/1982). – 159 – 161.
5. Schief, W.K. Backlund transformations for the (un)pumped Maxwell-Bloch system and the fifth Painleve equation / W.K. Schief // J. Phys. A: Math. – 27 (1994). – P. 547 – 557.
6. Gromak, V. Painleve differential equations in the complex plane / V. Gromak, I. Laine and S. Shimomura; Walter De Gruyter. – Berlin – New-York, 2002
7. Hinkkanen, A. I. Solutions of a modified third Painleve equation are meromorphic. / A. Hinkkanen and I. Laine // J. Analyse Math. – 85 (2001). – P. 323 – 337.
8. Hinkkanen, A. I. Solutions of a modified fifth Painleve equation are meromorphic. / A. Hinkkanen and I. Laine // Report. Univ. Jyvaskyla. – 83 (2001). – P. 133 – 146.
9. Noumi M. Higher order Painleve equations of type $A_l^{(1)}$ Funkcial / M. Noumi and Y. Yamada // Ekvac. – 1998 (41). – P. 483 – 503.
10. Noumi, M. Painleve equations through symmery / M. Noumi // Translations of Mathematical Monographs. – 2004. – Vol. 223. American Mathematical Society.
11. Кудряшов, Н.А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений / Н.А. Кудряшов. – Москва-Ижевск, 2004.
12. Григорьев, А.А. О решениях симметрических аналогов четвертого уравнения Пенлеве / А.А. Григорьев // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: тр. 4-й междунар. конф. Т. 3. – Минск: Ин-т математики НАН Беларуси, 2006. – С. 41 – 48.

Поступила 10.08.2007