УДК 512.542

С-КВАЗИНОРМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Н.В. ГУЦКО
(Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины)

Пусть G – конечная группа. Будем говорить, что подгруппа H группы G c-квазинормальна в G, если G имеет квазинормальную подгруппу T такую, что $G=HT$ *и* $T\cap H$ *квазинормальна в G. Строение конечной группы тесно связано с условиями, налагаемыми на максимальные подгруппы силовских подгрупп самой группы или силовских подгрупп некоторых выделенных подгрупп этой группы. В работе проводится дальнейший анализ некоторых результатов данного направления, используя понятие c-квазинормальной подгруппы, которое одновременно обобщает как условие квазинормальности, так и условие c-нормальности для подгрупп. В частности, доказано, что группа G принадлежит насыщенной формации* $\mathfrak{F}$*, содержащей класс всех сверхразрешимых групп, тогда и только тогда, когда существует нормальная подгруппа H в G такая, что* $G/H\in\mathfrak{F}$ *и максимальные подгруппы силовских подгрупп из H c-квазинормальны в G.*

1. Введение. Все рассматриваемые в данной работе группы конечны. Строение конечной группы тесно связано с условиями, налагаемыми на максимальные подгруппы силовских подгрупп самой группы или силовских подгрупп некоторых выделенных подгрупп этой группы. Впервые это было замечено в работе Хупперта [1], где, в частности, было доказано, что разрешимая группа *G* является сверхразрешимой, если все максимальные подгруппы всех силовских подгрупп из *G* перестановочны со всеми членами некоторой силовской системы группы *G*. Несколько позднее Сринивазан доказал [2], что группа *G* является сверхразрешимой при условии, что в *G* имеется такая нормальная подгруппа *N* со сверхразрешимой факторгруппой *G*/*N*, что все максимальные подгруппы всех силовских подгрупп из *N* нормальны в *G*. Эти два результата получили развитие в исследованиях многих авторов [3 – 7].

Целью данной работы является дальнейший анализ некоторых результатов данного направления на основе вводимого ниже понятия *c*-квазинормальной подгруппы.

Напомним, что подгруппа *A* группы *G* перестановочна с подгруппой *B*, если *AB* = *BA*. Подгруппа *H* группы *G* называется перестановочной [8] или квазинормальной [9] в *G*, если она перестановочна со всеми подгруппами из *G*.

Подгруппа *H* группы *G* называется *c*-нормальной в *G*, если существует нормальная подгруппа *T* из *G* такая, что $G=HT$ и $T\cap H$ – нормальная подгруппа в *G*. Понятие *c*-нормальности было введено в работе [3], где была построена содержательная теория *c*-нормальных подгрупп и даны некоторые ее приложения в вопросах классификации непростых подгрупп.

В данной работе мы анализируем следующее понятие, которое одновременно обобщает как условие квазинормальности, так и условие *c*-нормальности для подгрупп.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть *H* – подгруппа группы *G*. Тогда будем говорить, следуя [10], что *H* *c*-квазинормальна в *G*, если в *G* имеется такая квазинормальная подгруппа *T*, что $G=HT$ и $T\cap H$ квазинормальна в *G*.

Основной целью данной работы является изучение строения группы при условии, что некоторые максимальные или минимальные подгруппы силовских подгрупп этой группы *c*-квазинормальны.

2. Предварительные результаты. В наших доказательствах мы будем использовать следующие общие свойства *c*-квазинормальных подгрупп.

ЛЕММА 2.1. *Пусть G – группа и* $H\le K\le G$*. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *Если H квазинормальна в G, то H c-квазинормальна в G.*

(2) *Если H c-квазинормальна в G, то H c-квазинормальна в K.*

(3) *Пусть H – нормальная в G подгруппа. Тогда* K/H *– c-квазинормальная подгруппа в группе* G/H *тогда и только тогда, когда K – c-квазинормальная подгруппа в группе G.*

(4) *Пусть H – нормальная в G подгруппа. Тогда для всех c-квазинормальных в G подгрупп E таких, что* $(|H|,|E|)=1$*,* HE/H *– c-квазинормальная подгруппа в группе* G/H.

(5) *Пусть H – p-группа, для некоторого простого числа* p*, и H – c-квазинормальная в G подгруппа, которая не квазинормальна в G. Тогда в группе G существует такая нормальная подгруппа M, что* $|G:M|=p$ *и* $G=HM$.

Доказательство. Утверждение (1) очевидно.

(2) Пусть T – такая подгруппа группы G, что $G=HT$ и $T\cap H$ и T – квазинормальные в G подгруппы. Тогда $K=K\cap HT=H(K\cap T)$, где, очевидно, $K\cap T$ и $(K\cap T)\cap H=T\cap H$ – квазинормальные в K подгруппы. Значит, H c-квазинормальна в K.

(3) Пусть для некоторой квазинормальной в G подгруппы T мы имеем $KT = G$ и $T\cap K$ квазинормальна в G. Тогда $(HT/H)(K/H) = G/H$ и поскольку $(HT/H)\cap(K/H) = (HT\cap K)/H = H(T\cap K)/H$, то $(HT/H)\cap(K/H)$ и HT/H – квазинормальные в G/H подгруппы. Следовательно, K/H – c-квазинормальная в G/H подгруппа. Аналогично проверяется, что если K/H – c-квазинормальная в G/H подгруппа, то K c-квазинормальна в G.

(4) Пусть T – такая квазинормальная в G подгруппа, что $ET = G$ и $T\cap E$ квазинормальна в G. Ясно, что $H\le T$ и $T\cap HE = H(T\cap E)$ – квазинормальная в G подгруппа. Значит, HE c-квазинормальна в G и поэтому ввиду (3), HE/H – c-квазинормальная в G/H подгруппа.

(5) Поскольку согласно условию в группе G существует подгруппа T такая, что $G=HT$ и $T\cap H$ и T – квазинормальные в G подгруппы, то T субнормальна в G и поэтому $T\le K$, где K – собственная нормальная в G подгруппа. Значит, G/K – p-группа, и в G существует нормальная максимальная подгруппа M такая, что $HM=G$.

ЛЕММА 2.2 [9]. *Пусть G – группа и $H\le G$. Тогда, если H квазинормальна в G, то H субнормальна в G.*

ЛЕММА 2.3 (см. [11; II, следствие 7.7.2]). *Пусть G – группа и $A\le G$. Тогда*

(1) *Если A – субнормальная холлова подгруппа группы G, то A нормальна в G.*

(2) *Если A субнормальна в G и A – π-подгруппа группы G, то $A\le O_\pi(G)$.*

(3) *Если A – субнормальная разрешимая подгруппа группы G, то A содержится в некоторой разрешимой нормальной в G подгруппе.*

Следующая лемма хорошо известна [12, лемма А].

ЛЕММА 2.4. *Если H квазинормальна в G и H – p-группа для некоторого простого p, то $O^p(G)\le N_G(H)$.*

Напомним, что класс групп $\mathfrak{I}$ называется формацией, если он замкнут относительно факторгрупп и подпрямых произведений. Таким образом, для формации выполняются требования:

(1) если $G\in\mathfrak{I}$ и N нормальна в G, то $G/N\in\mathfrak{I}$;

(2) если $G/N_1\in\mathfrak{I}$ и $G/N_2\in\mathfrak{I}$, то $G/N_1\cap N_2\in\mathfrak{I}$.

Формация называется насыщенной, если она является насыщенным классом, т.е. для нее выполняется требование: если $G/N\in\mathfrak{I}$, $N\le\Phi(G)$, то $G\in\mathfrak{I}$.

Пусть p – простое число. Обозначим через U_p – класс всех групп G таких, что каждый p-главный фактор группы G является циклическим (G – p-сверхразрешимая группа), и через U обозначим класс всех сверхразрешимых групп. Ясно, что U_p и U являются насыщенными формациями.

ЛЕММА 2.5. *Пусть $\mathfrak{I}$ – насыщенная формация, содержащая U_p и G – группа с нормальной подгруппой E такой, что $G/E\in\mathfrak{I}$. Если E – циклическая подгруппа, то $G\in\mathfrak{I}$.*

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно рассмотреть случай, когда E – минимальная нормальная подгруппа в G. Ясно, что $E\notin\Phi(G)$. Пусть M – такая максимальная подгруппа группы G, что $G=[E]M$, и пусть $C=C_G(E)$. Тогда $M_G=C\cap M$ и поэтому $G/M_G=[EM_G/M_G](M/M_G)$ сверхразрешима, поскольку $M/M_G\cong G/C$ – абелева группа. Следовательно, $G\cong G/E\cap M_G\in\mathfrak{I}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.6. *Пусть N – элементарная абелева нормальная p-подгруппа группы G. Предположим, что в группе N имеется такая подгруппа D, что $1<|D|<|N|$ и каждая подгруппа H группы N, порядок которой равен порядку подгруппы D, c-квазинормальна в G. Тогда некоторая максимальная подгруппа из N нормальна в G.*

Доказательство. Прежде предположим, что некоторая подгруппа H из N с $|H|=|D|$ не является квазинормальной в G. Поскольку по условию H – c-квазинормальная в G подгруппа, то согласно лемме 2.1(5) в группе G имеется нормальная подгруппа T такая, что $|G:T|=p$ и $HT = G$. Тогда $NT = G$ и поэтому $T\cap N$ – максимальная подгруппа группы N, которая, очевидно, нормальна в G. Следовательно, мы можем считать, что каждая подгруппа H группы N с $|H|=|D|$ квазинормальна в G.

Предположим, что ни одна из максимальных подгрупп M группы N не является нормальной в G. Поскольку M является произведением некоторых квазинормальных в G подгрупп группы N, то M квазинормальна в G. Ввиду леммы 2.4, $O^p(G)\le N_G(M)$ и поэтому $|G:N_G(M)|=p^a$, для некоторого $a\in \mathbb{N}$. Значит, если $M_1, \ldots, M_t$ – множество всех максимальных подгрупп группы N, то p делит t, что противоречит [13, гл. III, лемма 8.5(d)].

ЛЕММА 2.7. *Пусть $\mathfrak{I}$ – насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы и пусть G – группа с разрешимым $\mathfrak{I}$-корадикалом $P=G^{\mathfrak{I}}$. Предположим, что каждая максимальная подгруппа группы G, не содержащая P, принадлежит $\mathfrak{I}$. Тогда $P=G^{\mathfrak{I}}$ – p-группа для некоторого простого числа p, и если каждая циклическая подгруппа группы P простого порядка и порядка 4 (если $p=2$ и P – неабелевая группа), не имеющая сверхразрешимого добавления в G, c-квазинормальна в G, то $|P/\Phi(P)|=p$.*

Доказательство. Согласно [11, теорема 24.2] $P=G^{\mathfrak{I}}$ – p-группа для некоторого простого числа p и справедливы следующие утверждения:

(1) $P/\Phi(P)$ – главный фактор группы G;

(2) P имеет экспоненту p или экспоненту 4 (если $p=2$ и P – неабелевая группа).

Предположим, что каждая циклическая подгруппа группы P простого порядка и порядка 4 (если $p = 2$ и P – неабелевая группа), не имеющая сверхразрешимого добавления в G, c-квазинормальна в G.

Пусть $\Phi = \Phi(P)$, X/Φ – подгруппа простого порядка в P/Φ, $x\in X/\Phi$ и $L = \langle x\rangle$. Тогда либо $|L|=p$, либо $|L|=4$ и поэтому по условию либо L имеет сверхразрешимое добавление T в G, либо подгруппа L c-квазинормальна в G. В первом случае мы можем предполагать, что $T\neq G$ и поэтому поскольку $\Phi \le \Phi(G)$, то $T\Phi \neq G$. Так как $LT = G$, то $(T\Phi/\Phi)(L\Phi/\Phi) = (T\Phi/\Phi)(X/\Phi) = G/\Phi$. Значит, $|G/\Phi:T\Phi/\Phi| = p$ и поскольку $G/\Phi = (P/\Phi)(T\Phi/\Phi)$, то $|P/\Phi(P)| = p$.

Таким образом, мы можем предполагать, что все подгруппы простого порядка группы P/Φ являются c-квазинормальными в G/Φ. В силу леммы 2.9 и утверждения (1) это влечет $|P/\Phi(P)| = p$.

ЛЕММА 2.8. *Пусть G – группа с нормальной подгруппой N такой, что $G=QN$ для некоторой подгруппы Q в G. Если M – максимальная подгруппа группы G такая, что $N\le M$, то $M\cap Q$ – максимальная подгруппа в Q.*

Доказательство. Поскольку $G/N \cong Q/(Q\cap N)$, то $(M\cap Q)/(Q\cap N)$– максимальная подгруппа в $Q/(Q\cap N)$, и более того, $M\cap Q$ – максимальная подгруппа в Q. Лемма доказана.

Напомним, что разрешимая нормальная подгруппа N группы G называется $\mathfrak{I}$-гиперцентральной подгруппой в G, если N обладает субнормальным рядом $1\lhd N_0 \lhd N_1 \lhd \ldots \lhd N_r = N$ таким, что

(1) каждый фактор N_{i+1}/N_i является главным фактором группы G;

(2) если порядок фактора N_{i+1}/N_i есть степень простого числа p_i, то $G/C_G(N_{i+1}/N_i)\in\mathfrak{I}(p_i)$.

$\mathfrak{I}$-гиперцентром группы G называется произведение всех $\mathfrak{I}$-гиперцентральных подгрупп группы G.

Мы используем символ $Z_{\mathfrak{I}}(G)$ для обозначения $\mathfrak{I}$-гиперцентра группы G.

Для группы P мы обозначаем $\Omega(P)=\Omega_1(P)$, если $p>2$, и $\Omega(P)=\langle\Omega_1(P),\Omega_2(P)\rangle$, если $p = 2$, где $\Omega_i(P)=\left\langle x\in P \middle| o(x)=p^i\right\rangle$.

ЛЕММА 2.9. *Пусть K – нормальная подгруппа группы G такая, что $G/K\in\mathfrak{I}$, где $\mathfrak{I}$ – насыщенная формация. Если $\Omega(P)=Z_{\mathfrak{I}}(G)$, где P – силовская p-подгруппа в K, то $G/O_p(K)\in\mathfrak{I}$.*

Доказательство. Не нарушая общности, можем предполагать, что $O_{p'}(K)=1$. Допустим, что $O_{p'}(G)\neq 1$ и пусть $K^* = KO_{p'}(G)/O_{p'}(G)$ и $G^* = G/O_{p'}(G)$. Так как K^* и G^* удовлетворяют условию теоремы, то по индукции имеем $G^*\in\mathfrak{I}$. Поскольку $K\cap O_{p'}(G)\subseteq O_{p'}(K) = 1$, то $G = G/K\cap O_{p'}(G)\in\mathfrak{I}$. Теперь мы можем предположить, что $O_{p'}(G) = 1$. Пусть $L/K = O_{p'}(G/K)$. Тогда $G/L\in\mathfrak{I}(p)$, где $\mathfrak{I}$ – локальная формация, определенная $\mathfrak{I}(q)$. Мы также имеем $\Omega_p(L)=\Omega_p(K)\subseteq Z_{\mathfrak{I}}(G)$ и $O_{p'}(L) = 1$. Таким образом, $G/K\in\mathfrak{I}(p)$.

Пусть $M = K\cap Z_{\mathfrak{I}}(G)$, $P = O_p(M)$ и $C=C_G(P)$. Так как P – нормальная подгруппа в G и $P\subseteq Z_{\mathfrak{I}}(G)$, то P – $\mathfrak{I}$-гиперцентральная подгруппа группы G. Согласно [14, теорема 1.3] $G/C\in\mathfrak{I}(p)$. Следовательно, $G/K\cap C\in\mathfrak{I}(p)$. Покажем, что $K\cap C$ – p-группа.

Поскольку мы предположили, что $O_{p'}(K) = 1$, очевидно, что и $O_{p'}(M) = 1$. Значит, $P = O_p(M) = F(M)$ и $C_M(P) \subseteq P$, так как M – разрешимая группа. Теперь рассмотрим элемент $x\in\Omega_p(K\cap C)$. Поскольку $\Omega_p(K\cap C) \subseteq Z_{\mathfrak{I}}(G)$, то $x\in M$. Таким образом, $x\in C_M(P) \subseteq P$, тогда $\Omega_p(K\cap C) \subseteq Z(C)$. Согласно [13, с. 435], $K\cap C$ – p-нильпотентная группа. Так как $O_{p'}(K)=1$, то $K\cap C$ – p-группа. Теорема доказана.

3. Основные результаты. Многими авторами изучалось строение групп, у которых максимальные подгруппы силовских подгрупп некоторых подгрупп основной группы c-квазинормальны. В данной работе мы прежде изучаем группу G, у которой каждая максимальная подгруппа силовской p-подгруппы c-квазинормальна.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть p – простое число, G – p-разрешимая группа и H – нормальная подгруппа группы G такая, что $G/H \in \mathfrak{U}_p$. Если каждая максимальная подгруппа силовской подгруппы из H c-квазинормальна в G, то $G \in \mathfrak{U}_p$.*

Доказательство. Предположим, что теорема не верна, и пусть G – контрпример минимального порядка.

(1) *Если N – минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в H, то $G/N \in \mathfrak{U}_p$.*

Действительно, $(G/N)/(H/N) \cong G/H \in \mathfrak{U}_p$. Пусть H^*/N – силовская p-подгруппа в H/N и M/N – произвольная максимальная в H^*/N подгруппа. Покажем, что подгруппа M/N c-квазинормальна в G/N. Если H_p – силовская p-подгруппа в H^*, то $H^*=H_p N$ и H_p является силовской p-подгруппой в G. Тогда $M = M \cap H^* = M \cap H_p N = N(M \cap H_p)$. И ввиду леммы 2.8 $M \cap H_p$ – максимальная подгруппа из H_p. Согласно условию теоремы $M \cap H_p$ c-квазинормальна в G. По лемме 2.1 (3) подгруппа $(M \cap H_p)N/N$ c-квазинормальна в G/N. Но $(M \cap H_p)N/N = M/N$ и поэтому мы заключаем, что максимальная подгруппа M/N из H^*/N c-квазинормальна в G/N.

Итак, G/N удовлетворяет гипотезе нашей теоремы. В силу минимальности G, мы видим, что $G/N \in \mathfrak{U}_p$.

(2) *N – единственная минимальная нормальная подгруппа в G, содержащаяся в H, и N – p-группа.*

Так как $\mathfrak{U}_p$ является насыщенной формацией, то N – единственная минимальная нормальная подгруппа в G, содержащаяся в H, и $\Phi(N) = 1$. Так как G – p-разрешимая группа, то либо N – p-группа, либо N является p'-группой. Если N – p'-группа, то $G \in \mathfrak{U}_p$, что противоречит выбору группы G. Следовательно, N – p-группа.

Заключительное противоречие. Если N содержится во всех максимальных подгруппах из G, то $N \leq \Phi(G)$. Поскольку $\mathfrak{U}_p$ является насыщенной формацией, то $G \in \mathfrak{U}_p$, что противоречит выбору группы G. Следовательно, существует максимальная подгруппа L из G такая, что $G = NL$ и $N \cap L = 1$. Таким образом, $H_p = H_p \cap NL = N(H_p \cap L)$, где H_p – силовская p-подгруппа из H. Пусть K – произвольная максимальная подгруппа из H_p, содержащаяся в $H_p \cap L$. По условию теоремы K c-квазинормальна в G. Значит, существует квазинормальная подгруппа T в G такая, что $G = KT$ и $K \cap T$ квазинормальна в G. Заметим, что $K \cap T = 1$. Действительно, пусть $K \cap T \neq 1$. Так как $K \cap T$ – квазинормальная подгруппа в G, то по лемме 2.2 видим, что $K \cap T$ – субнормальная в G p-подгруппа. По лемме 2.3 (2) имеем $K \cap T \leq O_p(G)$.

Покажем, что $N = O_p(G)$. Действительно, $O_p(G) = O_p(G) \cap NL = N(O_p(G) \cap L)$. Поскольку $O_p(G) \leq F(G) \leq C_G(N)$, то $O_p(G) \cap L$ нормальна в G, поэтому $O_p(G) \cap L = 1$. Значит, $N = O_p(G)$.

Таким образом, $K \cap T \leq N$. Тогда либо $K \cap T = N$, либо $K \cap T < N$. Если $K \cap T = N$, то $N \leq K$ и поэтому $G = KL$. Значит, $KL = NL$, что не возможно. Следовательно, $K \cap T < N$. Так как $K \cap T$ – квазинормальная подгруппа в G, то $(K \cap T)L = L(K \cap T)$ и поэтому $L(K \cap T) \leq G$. Но L – максимальная подгруппа в G. Значит, $L(K \cap T) = G$. Тогда $N = N \cap L(K \cap T) = K \cap T$, что противоречит $K \cap T < N$. Итак, $K \cap T = 1$.

Так как $H_p = H_p \cap KT = K(H_p \cap T)$ и $K \leq H_p = N(H_p \cap L)$, то $|H_p \cap T| = |H_p:K| = p = |N:N \cap K|$. Поскольку $G/T \cong K \in \mathfrak{U}_p$ и $G/N \in \mathfrak{U}_p$, то $G/(T \cap N) \in \mathfrak{U}_p$. Значит, $N \leq T$, так как G не принадлежит классу $\mathfrak{U}_p$ и N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. Следовательно, $N \cap K \leq T \cap K = 1$. Значит, $p=|N:N \cap K|=|N|$. Следовательно, $G \in \mathfrak{U}_p$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

ТЕОРЕМА 3.2. *Пусть p – наименьшее простое число, делящее порядок группы G, и P – силовская p-подгруппа в G. Если каждая максимальная подгруппа в P является c-квазинормальной в G, то G – p-нильпотентная группа.*

Доказательство. Предположим, что теорема не верна и пусть G – контрпример минимального порядка.

(1) *Факторгруппа G/N p-нильпотентна для любой минимальной нормальной подгруппы N из G.*

Применяя лемму 2.1 и лемму 2.8, видим, что условие теоремы наследуется факторгруппой G/N. Но $|G/N|<|G|$ и поэтому в силу выбора группы G имеем (1).

(2) *В группе G имеется лишь одна минимальная нормальная подгруппа N и $N \not\subset \Phi(G)$.*

Это прямо вытекает из (1) и того факта, что класс всех p-нильпотентных групп замкнут относительно образования подпрямых произведений [11, с. 35] и всегда из p-нильпотентности факторгруппы $G/\Phi(G)$ следует p-нильпотентность самой группы G.

(3) *Подгруппа P не является циклической.*

Поскольку p является наименьшим простым делителем порядка группы G, то (3) следует из [15, теорема 10.1.9].

(4) $O_{p'}(G)=1$.

Действительно, предположим, что $O_{p'}(G) \neq 1$ и рассмотрим факторгруппу $G/O_{p'}(G)$. Покажем, что $G/O_{p'}(G)$ удовлетворяет гипотезе нашей теоремы. По условию теоремы p делит порядок группы G, значит, p делит порядок группы $G/O_{p'}(G)$.

Пусть $P/O_{p'}(G)$ – силовская p-подгруппа в $G/O_{p'}(G)$ и $P_1/O_{p'}(G)$ – произвольная максимальная в $P/O_{p'}(G)$ подгруппа. Покажем, что подгруппа $P_1/O_{p'}(G)$ c-квазинормальна в $G/O_{p'}(G)$. Если P_0 – силовская p-подгруппа в P, то $P = P_0O_{p'}(G)$ и P_0 является силовской p-подгруппой в G. Покажем, что $P_1\cap P_0$ – максимальная в P_0 подгруппа. Заметим, что $P_1\cap P_0 \neq P_0$. Действительно, если $P_1\cap P_0 = P_0$, то $P_0 \subseteq P_1$, а значит, $P_1/O_{p'}(G) = P_0O_{p'}(G)/O_{p'}(G) = P/O_{p'}(G)$, что противоречит выбору подгруппы $P_1/O_{p'}(G)$.

Допустим, что в группе G имеется такая подгруппа T, что $P_1\cap P_0\subset T\subset P_0$. Тогда $P_1=O_{p'}(G)(P_1\cap P_0)\subseteq TO_{p'}(G)\subseteq P_0O_{p'}(G)=P$. Но P_1 – максимальная в P подгруппа и поэтому либо $P_1=TO_{p'}(G)$, либо $TO_{p'}(G)=O_{p'}(G)P_0$. Если $P_1=TO_{p'}(G)$, то $T\subseteq P_1\cap P_0\subset T$, что не возможно.

Итак, $TO_{p'}(G)=O_{p'}(G)P_0$ и поэтому $P_0=P_0\cap TO_{p'}(G)=T(P_0\cap O_{p'}(G))\subseteq T(P_1\cap P_0)=T$. Полученное противоречие показывает, что $P_1\cap P_0$ – максимальная в P_0 подгруппа. Согласно условию теоремы $P_1\cap P_0$ – c-квазинормальная подгруппа в G. Тогда по лемме 2.1(3) подгруппа $(P_1\cap P_0)O_{p'}(G)/O_{p'}(G)$ c-квазинормальна в $G/O_{p'}(G)$. Но $(P_1\cap P_0)O_{p'}(G)/O_{p'}(G)=P_1/O_{p'}(G)$ и поэтому мы заключаем, что максимальная подгруппа $P_1/O_{p'}(G)$ из $P/O_{p'}(G)$ c-квазинормальна в $G/O_{p'}(G)$. Итак, каждая максимальная подгруппа из $P/O_{p'}(G)$ c-квазинормальна в $G/O_{p'}(G)$.

Таким образом, $G/O_{p'}(G)$ удовлетворяет гипотезе нашей теоремы. В силу минимальности G мы видим, что $G/O_{p'}(G)$ p-нильпотентна и поэтому G – p-нильпотентная группа, что противоречит выбору группы G.

Пусть P_1 произвольная максимальная подгруппа в P. Тогда по условию теоремы G имеет такую квазинормальную подгруппу T, что $G=P_1T$ и $D=P_1\cap T$ – квазинормальная подгруппа в G.

(5) $D \neq 1$.

Пусть $D = 1$. Тогда T является p-нильпотентной подгруппой в G. Так как T – квазинормальная подгруппа в G, то по лемме 2.2 T субнормальна в G. Тогда $T_{p'}$ – субнормальная подгруппа в G. Но $T_{p'} = G_{p'}$ – холловская p'-подгруппа группы G и поэтому по лемме 2.3(1) эта подгруппа нормальна в G. Следовательно, G – p-нильпотентная группа. Это противоречит выбору группы G. Итак, $D\neq 1$.

Заключительное противоречие. Так как $P_1\cap T$ – квазинормальная в G подгруппа, то по лемме 2.2 видим, что $P_1\cap T$ – субнормальная p-подгруппа в G. По лемме 2.3 (2) имеем $P_1\cap T\leq O_p(G)$. Ввиду (2) существует максимальная подгруппа L из G такая, что $G=[N]L$ и $N\cap L=1$, причем $N=C_G(N)=O_p(G)$ (см. доказательство теоремы 3.1). Тогда либо $P_1\cap T = N$, либо $P_1\cap T < N$. Если $P_1\cap T = N$, то $N \leq P_1$ и поэтому $G = P_1L$, что приводит к противоречию (см. доказательство теоремы 3.1). Значит, $P_1\cap T < N$. Так как $P_1\cap T$ – квазинормальная подгруппа в G, то $(P_1\cap T)L = L(P_1\cap T)$ и поэтому $L(P_1\cap T) \leq G$. Но L – максимальная подгруппа в G, следовательно, $L(P_1\cap T) = G$. Тогда $N = N\cap L(P_1\cap T) =P_1\cap T$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

ТЕОРЕМА 3.3. *Пусть $\mathfrak{J}$ – насыщенная формация, содержащая U класс всех сверхразрешимых групп, и G – группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(a) $G\in\mathfrak{J}$.

(b) *существует нормальная подгруппа H в G такая, что $G/H\in\mathfrak{J}$ и максимальные подгруппы силовских подгрупп из H c-квазинормальны в G.*

Доказательство. (a) $\Rightarrow$ (b) Если $G\in\mathfrak{J}$, то утверждение (b) верно при $H = 1$; (b) $\Rightarrow$ (a) предположим, что утверждение не верно и пусть G – контрпример минимального порядка.

По лемме 2.1 (2) максимальные подгруппы силовских подгрупп из H c-квазинормальны в H. Пусть p – наибольший простой делитель порядка H и H_p – силовская p-подгруппа в H. Так как H_p является характеристической подгруппой в H и H – нормальная подгруппа в G, то H_p нормальна в G. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в H_p. Используя соответствующие рассуждения из теоремы 3.1, получаем, что $G/N\in\mathfrak{F}$ и N – циклическая группа порядка p. Значит, $N\leq Z_U(G)$. Поскольку $U\subseteq\mathfrak{F}$, то $Z_U(G)\subseteq Z_{\mathfrak{F}}(G)$. Следовательно, $N\leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$. Согласно лемме 2.12 группа $G\in\mathfrak{F}$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. *Пусть H – нормальная подгруппа группы G такая, что G/H сверхразрешима. Если максимальные подгруппы силовских подгрупп из H c-квазинормальны в G, то G – сверхразрешимая группа.*

СЛЕДСТВИЕ 3.5 (Wang). *Если максимальные подгруппы силовских подгрупп из G c-нормальны в G, то G – сверхразрешимая группа.*

ЛЕММА 3.6. *Пусть p – наименьший простой делитель порядка группы G и G_p – силовская p-подгруппа в G. Если подгруппы из G_p с порядком p или порядком 4, если p = 2, являются c-квазинормальными в G, то G – p-нильпотентная группа.*

Доказательство. Предположим, что теорема не верна и пусть G – контрпример минимального порядка.

Пусть все подгруппы из G_p с порядком p или порядком 4, если $p = 2$, являются квазинормальными в G. Так как G не является p-нильпотентной группой, то согласно [16, глава *IV*, теорема 5.4] G содержит p-замкнутую подгруппу Шмидта $H = [H_p]H_q$. Ввиду условия теоремы H имеет экспоненту p или экспоненту 4, если $p = 2$. Значит, согласно лемме 2.7 имеет место $|H_p/\Phi(H_p)| = p$, что не возможно, поскольку p – наименьший простой делитель порядка группы G.

Значит, существует подгруппа L в G_p простого порядка или порядка 4, если $p = 2$, не являющаяся квазинормальной в G. Тогда по лемме 2.1 (5) существует максимальная нормальная подгруппа M в G такая, что $G=LM$ и $|G:M|= p$. Так как M является нормальной подгруппой в G, то $M_p= G_p\cap M$ – силовская p-подгруппа в M. По лемме 2.1 (2) каждая подгруппа простого порядка или порядка 4, если $p = 2$, из M_p c-квазинормальна в M. Итак, условие теоремы наследуется подгруппой M и $|M|<|G|$. Поэтому M – p-нильпотентная группа. Тогда $M = [M_{p'}]M_p$. Так как $M_{p'}$ является характеристической подгруппой в M, которая нормальна в G и, очевидно, $M_{p'} = G_{p'}$ – холловская p'-подгруппа в G, то G – p-нильпотентная группа. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

ТЕОРЕМА 3.7. *Пусть p – простое число, и H – нормальная подгруппа группы G такая, что $G/H\in U_p$. Если подгруппы из H простого порядка или порядка 4, если p = 2, c-квазинормальны в G, то $G\in U_p$.*

Доказательство. Предположим, что теорема не верна и рассмотрим контрпример, для которого $|G||H|$ минимально.

(1) *Условие теоремы выполняется в любой холловой подгруппе X группы H (относительно X).*

Действительно, $X/X\in U_p$ и по лемме 2.1(2) подгруппы из X простого порядка или порядка 4, если $p=2$, c-квазинормальны в X. Итак, условие теоремы выполняется для группы X (относительно X).

(2) *Условие теоремы выполняется для каждой факторгруппы G/X (относительно H/X), где X – нормальная холлова подгруппа группы H.*

Действительно, $(G/H)/(H/X)\cong G/H\in U_p$ и ввиду леммы 2.1(3) условие теоремы выполняется для G/X (относительно H/X).

(3) *Если X – неединичная нормальная холлова подгруппа группы H, то $X=H$.*

Так как X – характеристическая подгруппа группы H, то она нормальна в G и поэтому ввиду (2), условие теоремы справедливо для G/X (относительно H/X). Значит, по выбору группы G и ее подгруппы H имеет место $G/X\in U_p$. Следовательно, условие теоремы справедливо для G (относительно X) и поэтому $X = H$.

(4) *Всякая подгруппа K простого порядка или порядка 4, если p=2, из группы H квазинормальна в G.*

Пусть K – подгруппа простого порядка или порядка 4. Согласно условию теоремы K c-квазинормальна в G. Допустим, что K не является квазинормальной в G подгруппой. Тогда ввиду леммы 2.1(5) G содержит такую нормальную подгруппу M, что $G = KM$ и $|G:M| = p$. Поскольку класс U_p является насыщенной формацией и замкнут относительно подпрямых произведений, то $G/H\cap M\in U_p$. Значит, ввиду леммы 2.1(2) условие теоремы выполняется для G относительно подгруппы $H\cap M$. Но поскольку M является собственной подгруппой группы G и $G = KM$, то $|H\cap M|<|N|$ и поэтому

$|G||H \cap M| < |G||H|$, что противоречит выбору группы G и ее нормальной подгруппы H. Следовательно, всякая подгруппа K простого порядка или порядка 4, если $p = 2$, из группы H квазинормальна в G.

Зафиксируем теперь некоторую силовскую p-подгруппу H_p группы H, где p – наименьший простой делитель порядка группы H.

(5) $H = H_p$.

Согласно лемме 3.6, подгруппа H p-нильпотентна. Значит, H имеет нормальную холлову p'-подгруппу E. Согласно (3), имеет место $E = H$. Следовательно, p не делит порядок группы H. Полученное противоречие доказывает утверждение (5).

Заключительное противоречие. Пусть $L = G^{U_p}$ и $\Phi = \Phi(L)$. Понятно, что $L \leq H$ и поэтому условие теоремы верно для G относительно L, что в силу выбора группы G и ее подгруппы H влечет $L = H$. Пусть M – максимальная подгруппа группы G, не содержащая H. Тогда $G/H \cong M/M \cap H \in U_p$, и поэтому согласно лемме 2.7 имеет место $|L/\Phi| = p$. Значит, по лемме 2.5 $G/\Phi \in U_p$. Но тогда $L \leq \Phi$, поэтому $L = \Phi$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Huppert, B. Zur Sylowstruktur auflosbarer Gruppen / B. Huppert // Arch. Math. – 1961. – XII. – P. 161 – 169.
2. Srinivasan, S. Two sufficient conditions for supersolubility of finite groups / S. Srinivasan // Israel J. Math. – 1980. – Vol. 35, № 3. – P. 210 – 214.
3. Wang, Y. c-normality of groups and its properties / Y. Wang // J. Algebra. – 1996. – Vol. 180. – P. 954 – 965.
4. Wei, H. On c-normal maximal and minimal subgroups of Sylow subgroups of finite groups / H. Wei // Comm. Algebra. – 2001. – Vol. 29, № 5. – P. 2193 – 2200.
5. Wei, H. On c-Normal Maximal and Minimal Subgroups of Sylow subgroups of finite groups / H. Wei, W. Yanming, Li. Yangming // Comm. Algebra. – 2003. – Vol. 31, № 10. – P. 4807 – 4816.
6. Asaad, M. On permutable subgroups of finite groups / M. Asaad and A.A. Heliel // Arch. Math. – 2002. – Vol. 80. – P. 113 – 118.
7. Ballester-Bolinches, A. On complemented subgroups of finite groups / A. Ballester-Bolinches, X. Guo // Arch.Math. – 1999. – № 72. – P. 161 – 166.
8. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992. – 889 p.
9. Ore, O. Contributions in the theory of groups of finite order / O. Ore // Duke Math. J. – 1939. – Vol. 5. – P. 431 – 460.
10. Скиба, А.Н. Конечные группы с *c*-квазинормальными подгруппами / А.Н. Скиба, О.В. Титов // Сибирский матем. Журнал. – 2007. – Т. 48.
11. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
12. Schmid, P. Subgroups Permutable with All Sylow Subgroups / P. Schmid // J. Algebra. 1998. – Vol. 207. – P. 285 – 293.
13. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin – Heidelberg – New York: Springer, 1967. – 793 p.
14. Huppert, B. Zur Theorie der Formationen / B. Huppert // Arck. Math. – 1968. – Vol. 19. – P. 561 – 574.
15. Robinson, D.J.S. A Courser in the Theory of Groups / D.J.S. Robinson. – New York – Berlin, 1993. – 486 p.
16. Gorenstein, D. Finite Groups / D. Gorenstein. – New York – Evanston – London, 1968. – 527 p.

Поступила 22.03.2007