УДК 512.542

ФОРМАЦИИ ГРУПП С МАКСИМАЛЬНОЙ L-КОМПОЗИЦИОННОЙ НИЛЬПОТЕНТНОЙ ПОДФОРМАЦИЕЙ

канд. физ.-мат. наук, доц. В.Г. САФОНОВ, П.А. ЖИЗНЕВСКИЙ
(Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины)

Изучение и классификация частично композиционных формаций конечных групп неразрывно связаны с исследованием их внутренней структуры. При этом важной особенностью исследуемой формации является не только наличие в ней подформаций того или иного вида, но и их взаимное расположение, а также структурные свойства решетки подформаций определенного вида. Представлено полученное описание L-композиционных ненильпотентных формаций с максимальной L-композиционной нильпотентной подформацией.

1. Введение. В работе рассматриваются только конечные группы. Мы используем терминологию, принятую в [1 – 3]. В работах Л.А. Шеметкова, А.Н. Скибы, В.В. Аниськова, В.Г. Сафонова, Д. Джехада, В.М. Селькина и др. изучались формации различных типов, имеющие заданные ограничения на системы или решетки их подформаций. В 2000 году в работе А.Н. Скибы и Л.А. Шеметкова [3] был разработан и представлен идейный материал теории частично композиционных формаций, позволяющий использовать методы и конструкции теории насыщенных формаций, а также методы общей теории решеток при исследовании частично композиционных формаций. В дальнейшем, в работах [4, 5] были описаны минимальные ω-композиционные не H-формации, где H – формация классического типа.

В данной статье, основываясь на результатах работ [3 – 5], мы даем описание L-композиционных ненильпотентных формаций, имеющих максимальную L-композиционную нильпотентную подформацию.

2. Определения и обозначения. Напомним некоторые определения и обозначения.

Класс всех простых групп обозначают I. Для произвольного класса простых групп T через T' обозначают множество $\mathsf{I}\setminus\mathsf{T}$. Пусть L – произвольный непустой класс простых групп. Тогда любую функцию вида:

$$f:\mathsf{L}\cup\{\mathsf{L}'\}\to\{\text{формации групп}\},$$

принимающую одинаковые значения на изоморфных группах называют L-композиционным спутником.

Символом L^{+} обозначают совокупность всех абелевых групп из L, а через L^{-} – совокупность всех простых неабелевых групп из L. Для произвольного класса простых групп T символ $E\mathsf{T}$ обозначает класс всех таких групп, у которых все композиционные факторы принадлежат T. По определению, единичные группы принадлежат $E\mathsf{T}$.

Символом $\mathrm{K}(\mathsf{X})$ обозначают совокупность всех таких простых групп A, что $A;\ H/K$ для некоторого композиционного фактора H/K группы $G\in\mathsf{X}$.

Символом $C^{A}(G)$ обозначается пересечение всех централизаторов таких главных факторов H/K группы G, что $A\in\mathrm{K}(H/K)$ ($C^{A}(G)=G$, если группа G таковых главных факторов не имеет). Наряду с записью $C^{Z_p}(G)$ применяется более короткая запись $C^{p}(G)$. Если A – простая неабелева группа, то $C^{A}(G)=G_{E(A)'}$. Если $A=Z_p$, то $C^{p}(G)=G_{\mathsf{G}_{cp}}$, где G_{cp} – класс всех таких групп, все главные p-факторы которых центральны, т.е. $H/K\le Z(G/K)$ для всех главных p-факторов группы G [3]. Если F – формация, то через G^{F} обозначают F-корадикал группы G, т.е. пересечение всех тех нормальных подгрупп M из G, для которых $G/M\in\mathsf{F}$. Если F – радикальный класс, то символом G_{F} обозначают произведение всех нормальных F-подгрупп группы G. В частности, $G_{E\mathsf{L}}$ есть произведение всех нормальных $E\mathsf{L}$-подгрупп группы G, т.е. всех нормальных подгрупп, у которых композиционные факторы из L. Через $\mathrm{H}\mathsf{X}$ обозначают класс всех гомоморфных образов групп из X.

Для произвольного L-композиционного спутника f полагают:

$$CF_{\mathsf{L}}(f)=\{G\mid G/G_{E\mathsf{L}}\in f(\mathsf{L}')\ \text{и}\ G/C^{A}(G)\in f(A)\ \text{для всех}\ A\in\mathrm{K}(G)\cap\mathsf{L}\}.$$

Если формация F такова, что $\mathsf{F}=CF_{\mathsf{L}}(f)$ для некоторого L-композиционного спутника f, то говорят, что она L-композиционна, а f – L-композиционный спутник этой формации.

Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольная совокупность групп, A – простая группа. Тогда полагают:

$$\mathfrak{X}(C^A) = \begin{cases} \mathrm{form}(G/C^A(G) \mid G \in \mathfrak{X}), & \text{если } A \in \mathrm{K}(\mathfrak{X}); \\ \varnothing, & \text{если } A \notin \mathrm{K}(\mathfrak{X}). \end{cases}$$

Для произвольного набора $\{f_i \mid i \in I\}$ $\mathfrak{L}$-композиционных спутников f_i через $\bigcap_{i\in I} f_i$ обозначается такой спутник, что $(\bigcap_{i\in I} f_i)(A) = \bigcap_{i\in I} f_i(A)$ для всех $A \in \mathfrak{L} \cup \{\mathfrak{L}'\}$.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ набор всех $\mathfrak{L}$-композиционных спутников формации $\mathfrak{F}$. Тогда спутник $\bigcap_{i\in I} f_i$ называется минимальным $\mathfrak{L}$-композиционным спутником $\mathfrak{F}$.

Вместо символа $\vee_{c^{\mathfrak{L}}}$ (объединение в решетке $c^{\mathfrak{L}}$) используют $\vee^{\mathfrak{L}}$. Для произвольной совокупности $\mathfrak{L}$-композиционных формаций $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ полагают $\vee^{\mathfrak{L}}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = c^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i)$, в частности, $\mathfrak{M} \vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{H} = c^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ – некоторая система $\mathfrak{L}$-композиционных спутников. Тогда через $\vee(f_i \mid i \in I)$ обозначают такой спутник f, что $f(A) = \mathrm{form}(\bigcup_{i\in I} f_i(A))$, в частности, $(f_1 \vee f_2)(A) = \mathrm{form}(f_1(A) \cup f_2(A))$, если по крайней мере одна из формаций $f_i(A) \neq \varnothing$. Если же $f_i(A) = \varnothing$ для всех $i \in I$, то полагают $f(A) = \varnothing$.

Пусть $\mathfrak{H}$ – произвольный класс групп. Тогда формация $\mathfrak{F}$ называется $\mathfrak{H}_{c^{\mathfrak{L}}}$-критической [6], или иначе, минимальной $\mathfrak{L}$-композиционной не $\mathfrak{H}$-формацией [7], если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{H}$ для каждой собственной $\mathfrak{L}$-композиционной подформации $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$. В частности, если $\mathfrak{L}$-композиционная формация $\mathfrak{F}$ ненильпотентна, но нильпотентна каждая ее собственная $\mathfrak{L}$-композиционная подформация, то $\mathfrak{F}$ называют минимальной $\mathfrak{L}$-композиционной ненильпотентной формацией.

Символом $c^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}\mathfrak{X}$ обозначается пересечение всех тех $\mathfrak{L}$-композиционных формаций, которые содержат класс групп $\mathfrak{X}$. Пересечение всех $\mathfrak{L}$-композиционных формаций, содержащих данную группу G, снова является $\mathfrak{L}$-композиционной формацией. Такую формацию называют однопорожденной $c^{\mathfrak{L}}$-формацией, или однопорожденной $\mathfrak{L}$-композиционной формацией, и обозначают $c^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}G$.

Максимальной $\mathfrak{L}$-композиционной подформацией $\mathfrak{L}$-композиционной формации $\mathfrak{F}$ называется всякая такая ее собственная $\mathfrak{L}$-композиционная подформация $\mathfrak{M}$, что для любой $\mathfrak{L}$-композиционной подформации $\mathfrak{H}$ из $\mathfrak{F}$ с условием $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ выполняется $\mathfrak{H} \in \{\mathfrak{M}, \mathfrak{F}\}$.

Напомним, что решетка называется модулярной, если для любых элементов x, y, z решетки из $x \le z \Rightarrow z \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая $\mathfrak{L}$-композиционная ненильпотентная формация. Тогда символом $\mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$ обозначается такая подрешетка решетки $c^{\mathfrak{L}}$, которая состоит из всех $\mathfrak{L}$-композиционных формаций, заключенных между $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{F}$.

3. Используемые результаты. Нам понадобится следующий частный случай леммы 5 из [3].

ЛЕММА 1. *Если* $\mathfrak{F} = c^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}\mathfrak{X}$ *и* f *– минимальный* $\mathfrak{L}$*-композиционный спутник формации* $\mathfrak{F}$*, то справедливы следующие утверждения:*

1) $f(\mathfrak{L}') = \mathrm{form}(G/G_{E\mathfrak{L}} \mid G \in \mathfrak{X})$;

2) $f(A) = \mathrm{form}(\mathfrak{X}(C^A))$ *для всех* $A \in \mathrm{K}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{L}$;

3) $f(A) = \varnothing$ *для всех* $A \in \mathfrak{L} \setminus \mathrm{K}(\mathfrak{F})$;

4) если $\mathfrak{F} = CF_{\mathfrak{L}}(h)$*, то для всех* $Z_p \in \mathrm{K}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{L}^+$

$$f(Z_p) = \mathrm{form}(G \mid G \in h(Z_p) \cap \mathfrak{F}, O_p(G) = 1),$$

для всех $A \in \mathrm{K}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{L}^-$

$$f(A) = \mathrm{form}(G \mid G \in h(A) \cap \mathfrak{F} \text{ и } \mathrm{Soc}(G) \in E(A))$$

и

$$f(\mathfrak{L}') = \mathrm{form}(G \mid G \in h(\mathfrak{L}') \cap \mathfrak{F} \text{ и } G_{E\mathfrak{L}} = 1);$$

5) $\mathrm{K}(\mathfrak{X}) = \mathrm{K}(\mathfrak{F})$.

ЛЕММА 2 [2]. *Пусть* A – *монолитическая группа с неабелевым монолитом;* $\mathfrak{M}$ – *некоторая τ-замкнутая полуформация и* $A \in l_n^\tau \mathrm{form}\mathfrak{M}$. *Тогда* $A \in \mathfrak{M}$.

Частным случаем теоремы 1 работы [4] является

ЛЕММА 3. *Пусть* f – *минимальный* $\mathfrak{L}$ *-композиционный спутник формации* $\mathfrak{F}$ *и* H – *канонический* $\mathfrak{L}$ *-композиционный спутник формации* $\mathfrak{H}$. *Тогда в том и только том случае* $\mathfrak{F}$ *является* $\mathfrak{H}_{c^{\mathfrak{L}}}$ *-критической формацией, когда*

$$\mathfrak{F} = c^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}G,$$

где G – *такая монолитическая группа с монолитом* R, *что либо* $\mathrm{K}(R) \cap \mathfrak{L} = \varnothing$ *и* $f(\mathfrak{L}') - (H(\mathfrak{L}'))_{c^{\mathfrak{L}}}$ *-критическая формация, либо* $\mathrm{K}(R) \cap \mathfrak{L} \neq \varnothing$, $C_G(R) \subseteq R \vee \Phi(G)$ *и* $f(A) - (H(A))_{c^{\mathfrak{L}}}$ *-критическая формация, где* $A \in \mathrm{K}(R)$.

ЛЕММА 4 [2]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ – *произвольная непустая формация и пусть у каждой группы* $G \in \mathfrak{X}$ $\mathfrak{F}$ *-корадикал* $G^{\mathfrak{F}}$ *не имеет фраттиниевых* G *-главных факторов. Тогда если* A – *монолитическая группа из* $\mathrm{form}\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{F}$, *то* $A \in \mathrm{H}\mathfrak{X}$.

ЛЕММА 5 [1]. *Пусть* $A \in \mathrm{sform}G$, *где* G – *конечная группа. Тогда имеют место следующие утверждения:*

1) экспонента группы A не превосходит экспоненту группы G *;*

2) каждый главный фактор группы A *изоморфен некоторому главному фактору группы* G ;

3) каждый композиционный фактор группы A *изоморфен некоторому композиционному фактору группы* G ;

4) ступень любого нильпотентного фактора группы A *не превосходит наибольшую из ступеней нильпотентных факторов группы* G .

ЛЕММА 6. [2] *Если* $\mathfrak{F} = CF_{\mathfrak{L}}(f)$ *и* $G/O_p(G) \in \mathfrak{F} \cap f(Z_p)$ *для некоторой группы* $Z_p \in \mathfrak{L}^+$, *то* $G \in \mathfrak{F}$.

ЛЕММА 7. [5] *Пусть* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ – ω *-композиционные формации и одна из формаций* $\mathfrak{F}$ *или* $\mathfrak{H}$ *разрешима. Тогда если* $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$, *то в* $\mathfrak{F}$ *имеется по крайней мере одна минимальная* ω *-композиционная не* $\mathfrak{H}$ *-подформация.*

ЛЕММА 8. [3] *Для любого непустого множества простых групп* $\mathfrak{L}$ *и любого целого неотрицательного* n *решетка* $c_n^{\mathfrak{L}}$ *алгебраична и модулярна.*

ЛЕММА 9. [8] *Пусть* A – *модулярная решетка. Тогда отображение* $\varphi : [a, a \vee b] \to [a \wedge b, b]$, *где* $x \to x \wedge b$, *является изоморфизмом.*

4. Основной результат

ЛЕММА 10. *Пусть* f_i – *минимальный* $\mathfrak{L}$ *-композиционный спутник формации* $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$. *Тогда* $f = \vee(f_i \mid i \in I)$ – *минимальный* $\mathfrak{L}$ *-композиционный спутник формации* $\mathfrak{F} = \vee^{\mathfrak{L}}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация из условия леммы и пусть $\mathfrak{X} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, $\mathfrak{M} = E(\mathrm{K}(\mathfrak{X}))$. Из леммы 1 имеем $\mathrm{K}(\mathfrak{X}) = \mathrm{K}(\mathfrak{F})$. Пусть h – минимальный $\mathfrak{L}$ -композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. Покажем, что $f(A) = h(A)$ для всех $A \in \mathfrak{L} \cup \{\mathfrak{L}'\}$. Если $A \in \mathfrak{L} \setminus \mathrm{K}(\mathfrak{X})$, то по лемме 1 $f_i(A) = \varnothing$ для любого $i \in I$. Значит, $f(A) = \varnothing$. С другой стороны, из того, что h – минимальный $\mathfrak{L}$ -композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$, снова применяя лемму 1 имеем $h(A) = \varnothing$. Значит, $f(A) = h(A) = \varnothing$ для всех $A \in \mathfrak{L} \setminus \mathrm{K}(\mathfrak{X})$.

Пусть $A \in \mathrm{K}(\mathfrak{X}) \cap \mathfrak{L}$. По лемме 1 имеем:

$$h(A) = \mathrm{form}(\mathfrak{X}(C^A)) = \mathrm{form}(G/C^A(G) \mid G \in \mathfrak{X} = \textstyle\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i) =$$

$$= \mathrm{form}(\textstyle\bigcup_{i \in I} \mathrm{form}(G/C^A(G) \mid G \in \mathfrak{F}_i)) = \mathrm{form}(\bigcup_{i \in I} f_i(A)) = \vee(f_i(A) \mid i \in I) = f(A).$$

Аналогично,

$$h(\mathfrak{L}') = \mathrm{form}(G/G_{E\mathfrak{L}} \mid G \in \mathfrak{X} = \textstyle\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i) = \mathrm{form}(\bigcup_{i \in I} \mathrm{form}(G/G_{E\mathfrak{L}} \mid G \in \mathfrak{F}_i)) =$$
$$= \mathrm{form}(\textstyle\bigcup_{i \in I} f_i(\mathfrak{L}')) = \vee(f_i(\mathfrak{L}') \mid i \in I) = f(\mathfrak{L}').$$

Значит, $f = \vee(f_i \mid i \in I)$ – минимальный $\mathfrak{L}$ -композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 11. *Пусть* M – L *-композиционная нильпотентная формация и* m – *её минимальный* L *-композиционный спутник,* $\omega = \pi(\mathsf{L}^+)$. *Тогда*

$$m(S) = \begin{cases} (1), \textit{ если } S = A \in \mathrm{K}(\mathsf{M}) \cap \mathsf{L}; \\ \mathsf{M} \cap \mathsf{N}_{\omega'}, \textit{ если } S = \mathsf{L}'; \\ \varnothing, \textit{ если } S = A \in \mathsf{L} \setminus \mathrm{K}(\mathsf{M}). \end{cases}$$

Доказательство. Из леммы 1 имеем

$$m(S) = \begin{cases} \mathrm{form}(G/C^A(G) \mid G \in \mathsf{M}), \textit{ если } S = A \in \mathrm{K}(\mathsf{M}) \cap \mathsf{L}; \\ \mathrm{form}(G/G_{E\mathsf{L}} \mid G \in \mathsf{M}), \textit{ если } S = \mathsf{L}'; \\ \varnothing, \textit{ если } S = A \in \mathsf{L} \setminus \mathrm{K}(\mathsf{M}), \end{cases}$$

Пусть $S = A \in \mathrm{K}(\mathsf{M}) \cap \mathsf{L}$. Заметим прежде, что так как M – нильпотентная формация, то $\mathrm{K}(\mathsf{M}) \subseteq \mathsf{L}^+$ и $\mathrm{K}(\mathsf{M}) \cap \mathsf{L} = \mathrm{K}(\mathsf{M}) \cap \mathsf{L}^+$. Тогда, если $G \in \mathsf{M}$, то $C^A(G) = G$ и

$$m(S) = \mathrm{form}(G/C^A(G)) = \mathrm{form}(G/G) = (1).$$

Пусть теперь $S = \mathsf{L}'$ и $G \in \mathsf{M}$. Покажем, что $m(\mathsf{L}') \subseteq \mathsf{M} \cap \mathsf{N}_{\omega'}$. Так как $G_{E\mathsf{L}}$ холлова подгруппа группы G, то $G/G_{E\mathsf{L}} \in \mathsf{N}_{\omega'}$. Так как $G \in \mathsf{M}$, то $G/G_{E\mathsf{L}} \in \mathsf{M}$. Значит, $G/G_{E\mathsf{L}} \in \mathsf{M} \cap \mathsf{N}_{\omega'}$. Следовательно,

$$m(\mathsf{L}') = \mathrm{form}(G/G_{E\mathsf{L}} \mid G \in \mathsf{M}) \subseteq \mathsf{M} \cap \mathsf{N}_{\omega'}.$$

Пусть $G \in \mathsf{M} \cap \mathsf{N}_{\omega'}$. Тогда $G_{E\mathsf{L}} = 1$ и G; $G/1 = G/G_{E\mathsf{L}} \in m(\mathsf{L}')$. Значит, $\mathsf{M} \cap \mathsf{N}_{\omega'} \subseteq m(\mathsf{L}')$. Итак, $m(\mathsf{L}') = \mathsf{M} \cap \mathsf{N}_{\omega'}$. Если $S = A \in \mathsf{L} \setminus \mathrm{K}(\mathsf{M})$, то из описания спутника m имеем $m(A) = \varnothing$. Лемма доказана.

Из леммы 3 с учетом замечания 3 работы [3] вытекает

ЛЕММА 12. *Формация* F *в том и только том случае является минимальной* L *-композиционной ненильпотентной формацией, когда* $\mathsf{F} = c^{\mathsf{L}}\mathrm{form}\, G$, *где* G – *такая монолитическая группа с нефраттиниевым монолитом* $P = G^{\mathsf{N}}$, *что либо* $\mathrm{K}(P) \cap \mathsf{L} = \varnothing$, *либо* $\mathrm{K}(P) \cap \mathsf{L} \neq \varnothing$ *и выполняется одно из следующих условий:*

1) $G = [P]Q$ – *группа Шмидта с* $\Phi(G) = 1$, *где* $P = C_G(P)$ – *абелева* p*-группа,* $p \in \pi(\mathsf{L}^+)$ *и* $|Q| = q$ – *простое число;*

2) P – *неабелева группа.*

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $\Omega = \{\mathsf{H}_i \mid i \in I\}$ – *некоторый набор минимальных* L *-композиционных ненильпотентных формаций,* M – L *-композиционная нильпотентная формация. Тогда, если* H – *некоторая минимальная* L *-композиционная ненильпотентная подформация из* $\mathsf{M} \vee^{\mathsf{L}} (\vee^{\mathsf{L}} \mathsf{H}_i \mid i \in I)$, *то* $\mathsf{H} \in \Omega$.

Доказательство. Пусть $\mathsf{F} = \mathsf{M} \vee^{\mathsf{L}} (\vee^{\mathsf{L}} \mathsf{H}_i \mid i \in I)$ и f, m – минимальные L -композиционные спутники формаций F, M соответственно, и для каждого $i \in I$ пусть h_i – минимальный L -композиционный спутник формации H_i.

По лемме 10 $f(A) = \mathrm{form}(m(A) \cup \mathrm{form}(\bigcup_{i\in I} h_i(A))) = \mathrm{form}(m(A) \cup (\bigcup_{i\in I} h_i(A)))$ для всех $A \in \mathsf{L} \cup \{\mathsf{L}'\}$.

Ввиду леммы 11 имеем:

$$m(S) = \begin{cases} (1), \textit{ если } S = A \in \mathrm{K}(\mathsf{M}) \cap \mathsf{L}; \\ \varnothing, \textit{ если } S = A \in \mathsf{L} \setminus \mathrm{K}(\mathsf{M}); \\ \mathsf{M} \cap \mathsf{N}_{\omega'}, \textit{ если } S = \mathsf{L}', \end{cases}$$

где $\omega = \pi(\mathsf{L}^+)$. Заметим, что так как M – нильпотентная формация, то $\mathrm{K}(\mathsf{M}) \cap \mathsf{L} = \mathrm{K}(\mathsf{M}) \cap \mathsf{L}^+$. Следовательно, L -композиционный спутник f допускает следующее описание:

$$f(A) = \mathrm{form}((1) \cup (\textstyle\bigcup_{i\in I} h_i(A))), \textit{ если } A \in \mathrm{K}(\mathsf{F}) \cap \mathsf{L},$$

$$f(A) = \mathrm{form}(\varnothing \cup \textstyle\bigcup_{i\in I} h_i(A)) = \mathrm{form}(\bigcup_{i\in I} h_i(A)), \textit{ если } A \in \mathsf{L} \setminus \mathrm{K}(\mathsf{F})$$

и

$$f(\mathsf{L}') = \mathrm{form}((\mathsf{M} \cap \mathsf{N}_{\omega'}) \cup (\textstyle\bigcup_{i\in I} h_i(\mathsf{L}'))).$$

Так как $\mathfrak{H}$ – минимальная $\mathfrak{L}$-композиционная ненильпотентная формация, то по лемме 12 $\mathfrak{H} = c^{\mathfrak{L}}\text{form}H$, где H – такая монолитическая группа с нефраттиниевым монолитом $P = H^{\mathfrak{N}}$, что либо $\mathrm{K}(P) \cap \mathfrak{L} = \varnothing$, либо $\mathrm{K}(P) \cap \mathfrak{L} \neq \varnothing$ и выполняется одно из следующих условий:

1) $H = [P]Q$ – группа Шмидта с $\Phi(H) = 1$, где $P = C_H(P)$ – абелева p-группа, $p \in \pi(\mathfrak{L}^+)$ и $|Q| = q$ – простое число;

2) P – неабелева группа.

Пусть $\mathrm{K}(P) \cap \mathfrak{L} = \varnothing$. Так как $H \in \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, то $H/H_{E\mathfrak{L}} \in f(\mathfrak{L}') = \text{form}((\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_{\omega'}) \cup (\bigcup_{i\in I} h_i(\mathfrak{L}')))$. Но, в этом случае $H_{E\mathfrak{L}} = 1$. Значит, $H \in \text{form}((\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_{\omega'}) \cup (\bigcup_{i\in I} h_i(\mathfrak{L}')))$.

Если P – неабелева группа, то по лемме 2 $H \in (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_{\omega'}) \cup (\bigcup_{i\in I} h_i(\mathfrak{L}'))$. Так как $H \notin \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_{\omega'}$, то найдется такое $i_0 \in I$, что $H \in h_{i_0}(\mathfrak{L}') \subseteq \mathfrak{H}_{i_0}$, т.е. $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}_{i_0}$.

Поскольку $\mathfrak{H}_{i_0}$ – минимальная $\mathfrak{L}$-композиционная ненильпотентная подформация и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}_{i_0}$, то $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_{i_0}$, т.е. $\mathfrak{H} \in \Omega$.

Пусть теперь P – абелев монолит. Так как для любого $i \in I$ $\mathfrak{H}_i$ – минимальная $\mathfrak{L}$-композиционная ненильпотентная формация, то по лемме 12 $\mathfrak{H}_i = c^{\mathfrak{L}}\text{form}H_i$, где H_i – монолитическая группа с нефраттиниевым монолитом $P_i = H_i^{\mathfrak{N}}$. По лемме 1

$$h_i(\mathfrak{L}') = \text{form}(H_i/(H_i)_{E\mathfrak{L}}) = \text{form}A_i,\ \textit{где}\ A_i = H_i/(H_i)_{E\mathfrak{L}}.$$

Ввиду того, что $H \notin \mathfrak{N}$, имеем

$$H \in \text{form}((\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_{\omega'}) \cup (\textstyle\bigcup_{i\in I} h_i(\mathfrak{L}'))) \setminus \mathfrak{N} =$$
$$= \text{form}((\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_{\omega'}) \cup (\textstyle\bigcup_{i\in I} \text{form}A_i)) \setminus \mathfrak{N} = \text{form}((\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_{\omega'}) \cup \{A_i \mid i \in I\}) \setminus \mathfrak{N},$$

где $A_i = \begin{cases} H_i,\ \textit{если}\ (H_i)_{E\mathfrak{L}} = 1, \\ H_i/(H_i)_{E\mathfrak{L}} \in \mathfrak{N},\ \textit{если}\ (H_i)_{E\mathfrak{L}} \neq 1. \end{cases}$

Заметим, что для любой группы $T \in (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_{\omega'}) \cup \{A_i \mid i \in I\}$ её $\mathfrak{N}$-корадикал $T^{\mathfrak{N}}$ не содержит фраттиниевых T-главных факторов. Следовательно, используя лемму 4, а также учитывая, что $H \notin \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_{\omega'}$, получаем, что H является гомоморфным образом некоторой группы из $\{A_i \mid i \in I\}$.

Пусть H является гомоморфным образом группы $A_{j_0} = H_{j_0}/(H_{j_0})_{E\mathfrak{L}}$. Если $(H_{j_0})_{E\mathfrak{L}} \neq 1$, то A_{j_0} нильпотентна. Значит, любой гомоморфный образ группы A_{j_0} также нильпотентен. Получили противоречие с тем, что H ненильпотентна. Следовательно, $(H_{j_0})_{E\mathfrak{L}} = 1$ и $A_{j_0} = H_{j_0}$. Значит, $H;\ H_{j_0} \in \mathfrak{H}_{j_0}$, т.е. $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}_{j_0}$. Так как $\mathfrak{H}_{j_0}$ – минимальная $\mathfrak{L}$-композиционная ненильпотентная подформация и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}_{j_0}$, то $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_{j_0}$, т.е. $\mathfrak{H} \in \Omega$.

Пусть теперь $\mathrm{K}(P) \cap \mathfrak{L} \neq \varnothing$ и относительно группы H выполняется условие 1). Понятно, что $P = C^p(H)$. Тогда

$$Q;\ H/P;\ H/C^p(H) \in f(Z_p) = \text{form}((1) \cup (\textstyle\bigcup_{i\in I} h_i(Z_p))).$$

Так как $\text{form}((1) \cup (\bigcup_{i\in I} h_i(Z_p))) \subseteq \mathfrak{N}$, то $\text{form}((1) \cup (\bigcup_{i\in I} h_i(Z_p))) = s\text{form}((1) \cup (\bigcup_{i\in I} h_i(Z_p)))$. Значит, по лемме 5 Q изоморфна некоторому главному фактору некоторой группы $G \in (1) \cup (\bigcup_{i\in I} h_i(Z_p))$.

Так как $Q \neq 1$, то найдется такое $k_0 \in I$, что $Q \in h_{k_0}(Z_p) \subseteq \mathfrak{H}_{k_0}$, т.е.

$$H/C^p(H);\ Q \in \mathfrak{H}_{k_0} \cap h_{k_0}(Z_p).$$

Поскольку $C^p(H) \subseteq O_p(H)$, то $H/O_p(H) \in \mathsf{H}_{k_0} \cap h_{k_0}(Z_p)$. Следовательно, по лемме 6 $H \in \mathsf{H}_{k_0}$, т.е. $\mathsf{H} \subseteq \mathsf{H}_{k_0}$. Ввиду того, что H_{k_0} – минимальная L-композиционная ненильпотентная подформация и $\mathsf{H} \subseteq \mathsf{H}_{k_0}$ получаем, что $\mathsf{H} = \mathsf{H}_{k_0}$, т.е. $\mathsf{H} \in \Omega$.

Пусть, наконец, относительно группы H выполняется условие 2). Тогда $H/C^A(H) \in \mathrm{form}(\bigcup_{i \in I} h_i(A))$. Поскольку A – неабелева и $A \in \mathrm{K}(P)$, то $C^A(H) = 1$. Значит, $H \in \mathrm{form}(\bigcup_{i \in I} h_i(A))$. Следовательно, по лемме 2 $H \in \bigcup_{i \in I} h_i(A)$, а значит, найдется такое $l_0 \in I$, что $H \in h_{l_0}(A) \subseteq \mathsf{H}_{l_0}$, т.е. $\mathsf{H} \subseteq \mathsf{H}_{l_0}$. Поскольку H_{l_0} – минимальная L-композиционная ненильпотентная подформация и $\mathsf{H} \subseteq \mathsf{H}_{l_0}$, то $\mathsf{H} = \mathsf{H}_{l_0}$, т.е. $\mathsf{H} \in \Omega$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. *В том и только том случае* L*-композиционная ненильпотентная формация* F *имеет нильпотентную максимальную* L*-композиционную подформацию, когда* $\mathsf{F} = \mathsf{M} \vee^{\mathsf{L}} \mathsf{H}$, *где* M – L*-композиционная нильпотентная формация,* H – *минимальная* L*-композиционная ненильпотентная формация, при этом:*

1) всякая L*-композиционная нильпотентная подформация из* F *входит в* $\mathsf{M} \vee^{\mathsf{L}} (\mathsf{H} \cap \mathsf{N})$;

2) всякая L*-композиционная ненильпотентная подформация* F_1 *из* F *имеет вид* $\mathsf{H} \vee^{\mathsf{L}} (\mathsf{F}_1 \cap \mathsf{N})$.

Доказательство. Необходимость. Поскольку F – L-композиционная ненильпотентная формация, то по лемме 7 в формации F имеется по крайней мере одна минимальная L-композиционная ненильпотентная подформация H. Так как при этом $\mathsf{M} = \mathsf{N} \cap \mathsf{F}$ – максимальная нильпотентная L-композиционная подформация в F, то $\mathsf{F} = \mathsf{M} \vee^{\mathsf{L}} \mathsf{H}$.

Достаточность. Пусть $\mathsf{F} = \mathsf{M} \vee^{\mathsf{L}} \mathsf{H}$, где M – L-композиционная нильпотентная формация, H – минимальная L-композиционная ненильпотентная формация. И пусть $\mathsf{F}_0 = \mathsf{M} \vee^{\mathsf{L}} \mathsf{H}_0$, где H_0 – максимальная L-композиционная подформация в H. Тогда ввиду лемм 8 и 9 имеем:

$$\mathsf{M} \vee^{\mathsf{L}} \mathsf{H} /^{\mathsf{L}} \mathsf{M} \vee^{\mathsf{L}} \mathsf{H}_0 = (\mathsf{M} \vee^{\mathsf{L}} \mathsf{H}_0) \vee^{\mathsf{L}} \mathsf{H} /^{\mathsf{L}} \mathsf{M} \vee^{\mathsf{L}} \mathsf{H}_0;$$

$$; \ \mathsf{H} /^{\mathsf{L}} (\mathsf{M} \vee^{\mathsf{L}} \mathsf{H}_0) \cap \mathsf{H} = \mathsf{H} /^{\mathsf{L}} (\mathsf{M} \cap \mathsf{H}) \vee^{\mathsf{L}} \mathsf{H}_0 = \mathsf{H} /^{\mathsf{L}} \mathsf{H}_0.$$

Из того, что H_0 максимальна в H получаем, что $\mathsf{M} \vee^{\mathsf{L}} \mathsf{H}_0$ максимальна в $\mathsf{M} \vee^{\mathsf{L}} \mathsf{H}$. Следовательно, формация F_1 является максимальной L-композиционной подформацией в F. Так как H – минимальная L-композиционная ненильпотентная формация, то H_0 – максимальная L-композиционная нильпотентная подформация в H. Учитывая это и то, что M нильпотентна получаем, что формация F_0 нильпотентна.

Докажем теперь второе утверждение теоремы. Из теоремы 1 следует, что в F нет минимальных L-композиционных ненильпотентных подформаций, отличных от H. Понятно, что $\mathsf{N} \cap \mathsf{H}$ – максимальная L-композиционная подформация в H. Ввиду лемм 8 и 9 имеем:

$$\mathsf{F} /^{\mathsf{L}} (\mathsf{N} \cap \mathsf{H}) \vee^{\mathsf{L}} \mathsf{M} = \mathsf{M} \vee^{\mathsf{L}} \mathsf{H} /^{\mathsf{L}} (\mathsf{N} \cap \mathsf{H}) \vee^{\mathsf{L}} \mathsf{M} =$$

$$= ((\mathsf{N} \cap \mathsf{H}) \vee^{\mathsf{L}} \mathsf{M}) \vee^{\mathsf{L}} \mathsf{H} /^{\mathsf{L}} (\mathsf{N} \cap \mathsf{H}) \vee^{\mathsf{L}} \mathsf{M}; \ \mathsf{H} /^{\mathsf{L}} \mathsf{H} \cap ((\mathsf{H} \cap \mathsf{N}) \vee^{\mathsf{L}} \mathsf{M}) = \mathsf{H} /^{\mathsf{L}} \mathsf{H} \cap \mathsf{N}.$$

Тогда $(\mathsf{N} \cap \mathsf{H}) \vee^{\mathsf{L}} \mathsf{M}$ – максимальная L-композиционная подформация в F. Следовательно, поскольку $\mathsf{F} \not\subseteq \mathsf{N}$, то всякая нильпотентная подформация из F входит в $\mathsf{M} \vee^{\mathsf{L}} (\mathsf{H} \cap \mathsf{N})$.

Пусть теперь F_1 – произвольная L-композиционная ненильпотентная подформация из F. Тогда ввиду леммы 7 $\mathsf{H} \subseteq \mathsf{F}_1$. Следовательно, ввиду леммы 8 имеет место

$$\mathsf{F}_1 = \mathsf{F}_1 \cap \mathsf{F} = \mathsf{F}_1 \cap (\mathsf{H} \vee^{\mathsf{L}} \mathsf{M}) = \mathsf{H} \vee^{\mathsf{L}} (\mathsf{F}_1 \cap \mathsf{M}).$$

Теорема доказана.

В случае когда $L = I$, получаем

СЛЕДСТВИЕ 1 [9]. *В том и только том случае ненильпотентная с-формация F имеет максимальную нильпотентную с-подформацию, когда $F = M \vee^{c} H$, где $M \subseteq N$, H – N_{c} -критическая формация, при этом:*

1) всякая нильпотентная с-подформация из F входит в $M \vee^{c} (H \cap N)$;

2) всякая ненильпотентная с-подформация F_1 из F имеет вид $H \vee^{c} (F_1 \cap N)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука, 1989. – 253 с.
2. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 240 с.
3. Скиба, А.Н. Кратно L -композиционные формации конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Украинский математический журнал. – 2000. – Т. 52, № 6. – С. 783 – 797.
4. Близнец, И.В. О $H_{\Theta^{L}}$ -критических формациях / И.В. Близнец, А.Н. Скиба // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 1999. – № 1. – С. 140 – 144.
5. Близнец, И.В. Критические ω-композиционные формации / И.В. Близнец // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз-мат. навук. – 2002. – № 4. – С. 115 – 117.
6. Скиба, А.Н. О критических формациях / А.Н. Скиба // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. – 1980. – № 4. – С. 27 – 33.
7. Шеметков, Л.А. Экраны ступенчатых формаций / Л.А. Шеметков // Тр. VI Всесоюзный симпоз. по теории групп. – Киев, 1980. – С. 37 – 50.
8. Биркгоф, Г. Теория решеток / Г. Биркгоф. – М.: Наука, 1984. – 568 с.
9. Чиспияков, С.В. О композиционных формациях с заданными системами нильпотентных подформаций / С.В. Чиспияков // Брянск. гос. пед. ун-т. – Брянск, 1998. – 18 с. Библиогр.: 12 назв. – Деп. в ВИНИТИ 26.10.98, № 3098-В98 // РЖМат. – 1999, 5А119.

Поступила 27.06.2007