УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С МАКСИМАЛЬНЫМИ *m*-ПОЛУНОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

А.В. ШНЫПАРКОВ
(Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины)

Подгруппа H группы G называется m-полунормальной в G, если существует такая подгруппа K из G, что HK=G и HK_1 – собственная подгруппа группы G для каждой максимальной подгруппы K_1 из K. Исследуются конечные группы с максимальными m-полунормальными подгруппами. Доказано, что максимальная подгруппа в точности тогда m-полунормальна, когда она имеет простой индекс. Используя этот результат, установлено, что π-отделимая группа тогда и только тогда π-сверхразрешима, когда m-полунормальной является каждая ее максимальная подгруппа, индекс которой есть π-число. Отсюда, в частности, следует, что конечная группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда все ее максимальные подгруппы m-полунормальны. Кроме того, установлено, что пересечение максимальных не m-полунормальных подгрупп в произвольной конечной группе является сверхразрешимой группой. При доказательстве отдельных утверждений используются теоремы, основанные на классификации конечных простых групп.

1. Введение

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Подгруппа H группы G называется полунормальной в G, если существует такая подгруппа K из G, что $HK = G$ и HK_1 – собственная подгруппа группы G для каждой подгруппы K_1 из K, отличной от K. Подгруппу K в этом случае называют супердобавлением к H в группе G.

Отдельные свойства полунормальных подгрупп рассматривались в работах [1 – 3]. В частности, в [1] замечена сверхразрешимость группы с полунормальными силовскими подгруппами. В [2] установлено, что если в группе G каждая нециклическая силовская подгруппа полунормальна, то группа G разрешима и ее третий коммутант нильпотентен. В [3] получены признаки нильпотентности группы с некоторыми полунормальными примарными подгруппами.

Обобщением полунормальности является понятие m-полунормальности. Здесь, в отличие от полунормальности требуется перестановочность не со всеми подгруппами из супердобавления, а лишь с максимальными. Более точно, подгруппа H группы G называется m-полунормальной в G, если существует такая подгруппа K из G, что $HK=G$ и HK_1 – собственная подгруппа группы G для каждой максимальной подгруппы K_1 из K. Понятно, что каждая полунормальная подгруппа будет m-полунормальной.

В настоящей заметке исследуются m-полунормальные максимальные подгруппы конечных групп. Доказывается, что что π-отделимая группа тогда и только тогда π-сверхразрешима, когда m-полунормальной является каждая ее максимальная подгруппа, индекс которой есть π-число. Отсюда, в частности, следует, что конечная группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда все ее максимальные подгруппы m-полунормальны. Кроме того, установлено, что пересечение максимальных не m-полунормальных подгрупп в произвольной конечной группе является сверхразрешимой группой. При доказательстве отдельных утверждений используются теоремы, основанные на классификации конечных простых групп.

2. Основные используемые понятия и предварительные результаты

Используются следующие обозначения:
- p – простое число;
- π – некоторое множество простых чисел;
- π' – дополнение к π во множестве всех простых чисел;
- π-число – число, делящееся только на простые числа из множества π;
- $H \leq G$ – H – подгруппа группы G;
- $H < G$ – H – собственная подгруппа группы G;
- $|G|$ – порядок группы G;
- $|G : H|$ – индекс подгруппы H в группе G;
- $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G;
- 1, E – единичная подгруппа группы G;
- $M <\cdot G$ – M – максимальная подгруппа в группе G;
- $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G, т.е. пересечение всех максимальных подгрупп группы G;
- $S(G)$ – наибольшая нормальная разрешимая подгруппа группы G;
- $<x>$ – циклическая группа, порожденная элементом x;
- $[A]B$ – полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B;

- $A \cong B$ – A и B изоморфны;
- $PSL(n, p)$ – проективная специальная линейная группа степени n над полем из p элементов;

Подгруппа H группы G называется m-полунормальной в G, если существует такая подгруппа K из G, что $HK=G$ и HK_1 – собственная подгруппа группы G для каждой максимальной подгруппы K_1 из K.

Пусть G – группа; π – некоторое множество простых чисел, содержащееся в $\pi(G)$.

Подгруппа H группы G называется π-подгруппой, если $\pi(H) \subseteq \pi$. Если же $\pi(H) \subseteq \pi'$, то будем говорить, что H – π'-подгруппа.

Группа G называется π-отделимой, если каждый главный фактор группы G является либо π-группой, либо π'-группой. π-Отделимая группа, у которой каждый π-главный фактор разрешим, называется π-разрешимой. Если же порядок каждого главного фактора группы G есть простое число из π или π'-число, то в этом случае группу G называют π-сверхразрешимой.

Все остальные обозначения стандартны и соответствуют [4 – 6].

2.1. ЛЕММА [7]. Пусть G – π-разрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) каждая минимальная нормальная подгруппа группы G является либо π'-подгруппой, либо элементарной абелевой p-подгруппой для некоторого $p \in \pi$;

2) индекс каждой максимальной в G подгруппы либо π'-число, либо равно p^{α} для некоторого $p \in \pi$ и натурального α.

2.2. ЛЕММА. Пусть G – π-отделимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) каждая минимальная нормальная подгруппа группы G является либо π-подгруппой, либо π'-подгруппой;

2) индекс каждой максимальной в G подгруппы либо π-число, либо π'-число.

Доказательство. Первое утверждение непосредственно вытекает из определения π-отделимой группы и теоремы Жордано – Гельдера.

В силу теоремы Томпсона – Фейта о разрешимости групп нечетного порядка каждая π-отделимая группа либо π-разрешима, либо π'-разрешима в зависимости от того 2 принадлежит π' или π соответственно. Остается применить утверждение 2 предыдущей леммы.

2.3. ЛЕММА [8]. Если в группе G все максимальные подгруппы имеют примарные индексы, то $G/S(G) = 1$ или $G/S(G) \cong PSL(2, 7)$.

В доказательстве этого утверждения используется классификация конечных простых групп.

2.4. ЛЕММА. Пусть G – π-отделимая группа и индекс каждой максимальной в G подгруппы либо π'-число, либо равен некоторому простому числу из π. Тогда G π-сверхразрешима.

Доказательство. Пусть G – не π-сверхразрешимая группа минимального порядка, все условия леммы для которой выполнены. Так как множество всех π-сверхразрешимых групп образует насыщенную формацию [6, с. 35], то по индукции группа G примитивна и $O_{\pi'}(G)=1, \Phi(G) = 1$.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда N – π-группа и $|N| \neq p \in \pi(G)$.

Пусть $M <\cdot G$, причем N не содержится в M. Если $N \cap M = E$, то $|N| = |G : M| = p$ – противоречие.

Пусть $N \cap M \neq E$. Тогда N непримарна.

В силу теоремы Томпсона – Фейта о разрешимости групп нечетного порядка каждая π-отделимая группа либо π-разрешима, либо π'-разрешима. Так как N – непримарная минимальная нормальная подгруппа группы G и N является π-подгруппой, то группа G π'-разрешима по лемме 2.1. По этой же лемме π'-индексы максимальных подгрупп примарны. Теперь в группе G все максимальные подгруппы имеют примарные индексы.

Предположим, что в группе G существует разрешимая нормальная неединичная подгруппа K. Тогда минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в K, будет элементарной абелевой p-подгруппой, что невозможно. Поэтому $S(G) = 1$ и по лемме 2.3 группа $G \cong PSL(2, 7)$.

Из того, что группа G простая и π'-разрешима, следует, что $\pi = \{2, 3, 7\}$. Но теперь в группе G имеется максимальная подгруппа непростого π-индекса 8.

Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

3. Основные результаты

3.1. ТЕОРЕМА. Пусть H – максимальная подгруппа группы G. Подгруппа H m-полунормальна в группе G тогда и только тогда, когда индекс H в G есть простое число.

Доказательство

Необходимость. Пусть H – максимальная m-полунормальная подгруппа группы G. Тогда существует такая подгруппа K из G, что $HK = G$ и HK_1 есть собственная подгруппа в G для каждой максимальной подгруппы K_1 из K.

Пусть K_1 и K_2 – две различные максимальные подгруппы группы K. Тогда $HK_1 < G$ и $HK_2 < G$. Из максимальности H следует, что K_1 *и* K_2 являются подгруппами H. Но тогда $K = \langle K_1, K_2 \rangle \leq H$, противоречие с тем, что $HK = G$ и H – максимальная в G подгруппа. Следовательно, в K имеется единственная максимальная подгруппа K_1. Если $x \in K \backslash K_1$, то циклическая подгруппа, порожденная элементом x, не содержится в K_1, поэтому $K = \langle x \rangle$. Кроме того, K – примарная группа, т.е. $|K| = p^{\alpha}$. Если K_1 – максимальная подгруппа в K, то индекс K_1 в K есть простое число p и K_1 – подгруппа в H. Поэтому $|G:H| = |K:K_1| = p$.

Достаточность. Пусть H – максимальная подгруппа группы G и $|G:H| = p$.

Пусть силовская p-подгруппа группы G. Тогда P не содержится в H и существует элемент $x \in P \backslash H$. Пусть $|x| = p^{\alpha}$, $|\langle x \rangle \cap H| = p^{\alpha_1}$. Ясно, что $\alpha > \alpha_1$, поэтому

$$|\langle x \rangle H| = \frac{|\langle x \rangle|\,|H|}{|\langle x \rangle \cap H|} = \frac{p^{\alpha}\dfrac{|G|}{p}}{p^{\alpha_1}} \geq |G|$$

и $\langle x \rangle H = G$.

Теперь x^p принадлежит H, следовательно, если A – собственная подгруппа циклической группы $\langle x \rangle$, то A – подгруппа в H и H полунормальная, а значит и m-полунормальная подгруппа группы G. Теорема доказана.

3.2. ТЕОРЕМА. Пусть G – π-отделимая группа. Тогда и только тогда группа G π-сверхразрешима, когда m-полунормальной является каждая максимальная в G подгруппа, индекс которой есть π-число.

Доказательство

Необходимость. Пусть G – π-сверхразрешимая группа. Тогда индекс каждой максимальной в G подгруппы либо π'-число, либо простое π-число. По теореме 3.1 каждая максимальная подгруппа π-индекса m-полунормальна.

Достаточность. Пусть G – π-отделимая группа и каждая максимальная подгруппа, индекс которой есть π-число, m-полунормальна. По теореме 3.1 индекс каждой максимальной подгруппы из G либо π'-число, либо равен некоторому простому числу из π. По лемме 2.4 группа G π-сверхразрешима. Теорема доказана.

3.2.1. СЛЕДСТВИЕ. Конечная группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда все ее максимальные подгруппы m-полунормальны.

Доказательство. Если все максимальные подгруппы группы G m-полунормальны, то по теореме 3.1 все они имеют простые индексы. По теореме Хупперта [5, теорема VI.9.5] группа G сверхразрешима.

Обратно, если G – сверхразрешимая группа, то все ее максимальные подгруппы имеют простые индексы. По теореме 3.1 все максимальные подгруппы m-полунормальны.

3.2.2. СЛЕДСТВИЕ. В любой конечной группе пересечение не m-полунормальных максимальных подгрупп является сверхразрешимой подгруппой.

Доказательство. Данное пересечение совпадает с пересечением максимальных подгрупп непростых индексов. Поэтому по теореме Селькина [9, теорема 3.4.2 (1)] это пересечение сверхразрешимо.

ЛИТЕРАТУРА

1. Подгорная, В.В. Полунормальные подгруппы и сверхразрешимость конечных групп / В.В. Подгорная // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-матэм. навук. – 2000. – № 4. – С. 22 – 25.
2. Монахов, В.С. Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой / В.С. Монахов // Математические заметки. – 2006. – Т. 80, № 4. – С. 573 – 581.
3. Su Xiongying. On semi-normal subgroups of finite group // J. Math. (Wuhan). – 1988. – V. 8(1). – P. 7 – 9.
4. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Выш. шк. – 2006. – 207 с.
5. Huppert, B. Endliche Gruppen, I. / B. Huppert. – Berlin – Heidelberg – New York: Springer, 1967. – 793 c.
6. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп. – М.: Наука, 1978.
7. Чунихин, С.А. Подгруппы конечных групп / С.А. Чунихин. – Минск: Наука и техника, 1964. – 158 с.
8. Guralnick, R.M. Subgroups of prime power index in a simple group / R.M. Guralnick // J. Algebra. – 1983. – V. 81, № 2. – P. 304 – 311.
9. Селькин, М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Минск, 1997.

Поступила 24.04.2007