МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ $Chev\,(p)$, $p > 2$, С ХОЛЛОВЫМИ $\{2, r\}$-ПОДГРУППАМИ

д-р физ.-мат. наук, проф. Э.М. ПАЛЬЧИК
(Полоцкий государственный университет)

В некоторых задачах теории конечных групп возникает необходимость знать простые неабелевы группы, которые имеют холловы $\{2, r\}$-подгруппы, где r нечетный простой делитель порядка группы. В этой работе предполагается, что r пробегает все нечетные простые делители порядка группы, отличные от s и t. С использованием результатов Е.П. Вдовина и Д.О. Ревина [6, 10] в работе получено описание простых неабелевых групп из множеств $Chev(p)$, $p > 2$, $Spor$. Кроме того, описаны такие группы из множества $\{A_n / n \geq 5\}$ с использованием известного результата Ф. Холла из [8]. Конечные простые группы с таким свойством из множества $Chev(2)$ описаны в работе [7].

1. Введение

В работе используются стандартные обозначения и терминология из теории конечных групп, которые можно найти в [1 – 4]. Кроме [4] для групп лиевского типа используется терминология из [5] и [6].

2. Обозначения и терминология

Для удобства чтения приведем основные обозначения:

- π – множество некоторых простых чисел;
- π' – множество простых чисел, такое, что $\pi' \cap \pi = \varnothing$;
- $\pi(n)$ – множество различных простых делителей натурального числа *n*;
- $|X|$ – порядок конечной группы *X*;
- $\pi(X) = \pi(|X|)$;
- S_π-подгруппа – холлова π-подгруппа *A* группы *X* такая, что $\pi(A) \subseteq \pi$ и индекс $|X : A|$ее в *X* есть π'-число;
- $Syl_p(X)$ – множество S_p-подгрупп группы *X*.

Следуя [7], будем говорить, что группа *X* удовлетворяет свойству (или обладает свойством):

- E_π, если она обладает холловой π-подгруппой;
- C_π, если она удовлетворяет свойству E_π и любые две ее холловы π-подгруппы сопряжены в *X*;

D_π, если она удовлетворяет свойству C_π и любая ее π-подгруппа лежит в некоторой холловой π-подгруппе.

- $[n]$ – целая часть рационального числа *n*;
- (m, n) – наибольший общий делитель чисел *m* и *n*;
- a / b – *a* делит *b* ($a \nmid b$ – *a* не делит *b*);
- $AwrB$ – сплетение группы *A* с помощью группы *B*;
- Z_n, D_n, E_n – соответственно циклическая, диэдральная, элементарная абелева группа порядка *n*;
- $GF(q)$ – поле Галуа порядка $q = p^n$, где *p* – характеристика поля;
- под группой Шевалле понимается любая фактор-группа универсальной группы Шевалле;
- любая группа Шевалле *X* рассматривается над конечным полем *K* характеристики *p* и с *X* ассоциируется система корней *Ф*, обозначения типов систем корней стандартны [4, 5];
- поле *K* считается равным полю $GF(q^2)$, если *Ф* имеет тип ${}^2A_l$, ${}^2D_l$, ${}^2E_6$; полю $GF(q^3)$, если *Ф* имеет тип ${}^3D_4$; полю $GF(q)$ – в остальных случаях. *Во всех случаях* поле $GF(q)$ называют *полем определения* группы *X*;
- всякая группа Шевалле *X* обладает двумя характерными подгруппами *B* и *N* такими, что $X = BNB$, $B = N_X(P)$, где $P \in Syl_p(X)$; $H = B \cap N$ – абелева p'-группа, $B = P\lambda H$, $H \lhd N$, $N / H = W$ – группа Вейля системы корней *Ф* для *X* и ассоциируется далее с *X*. *H* называют подгруппой Картана; *B* – подгруппой Бореля; *N* – мономиальной подгруппой группы *X*.

Группа *W* порождается *s* инволюциями w_i, $1 \le i \le s$, с полным множеством определяющих соотношений $(w_i \cdot w_j)^{k_{ij}} = 1$, $1 \le i, j \le s$. Число *s* называется рангом группы *W* и лиевым рангом группы *X*;

- параболической подгруппой группы *X* называется любая подгруппа, содержащая $N_X(P) = B$;

- все конечные группы Шевалле с полем определения $GF(p^n) = GF(q)$ (нормальные и скрученные типы) мы обозначаем символом $Chev(p)$. Если мы желаем подчеркнуть, что речь идет о присоединенной версии группы $X \in Chev$ (с $Z(X) = 1$), то условимся писать $X \in Chev^a$ (или $X \in Chev^a(p)$);

- S_n – симметрическая группа перестановок и символов;

- A_n – знакопеременная группа перестановок и символов;

- X' – коммутант группы *X*.

3. Используемые результаты

В дальнейшем нам понадобятся сведения об универсальных группах из множества $Chev(p)$, $p > 2$, которые приведены в лемме 3.11 в работе [6]. Мы приведем эти сведения в удобной для дальнейшего использования форме.

3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть *X* – конечная универсальная группа лиева типа с полем определения $GF(q)$ характеристики $p > 2$, $q = p^n$. Пусть *S* – силовская 2-подгруппа из *X*, *T* – максимальный тор в *X* такой, что $S \subseteq N_X(T)$. (По лемме 3.11 в [6] в качестве *T* можно взять подгруппу Картана *H*, если $q \equiv 1 \pmod 4$, либо тор *T* известного порядка, если $q \equiv -1 \pmod 4$).

Пусть $P \in Syl_p(X)$, $B = P \lambda H$ – подгруппа Бореля в *X*, *N* – мономиальная подгруппа в *X* (так что $X = BNB$, $W = N / H$ – группа Вейля, ассоциированная с *X*).

3.2. ЗАМЕЧАНИЕ. В дальнейшем запись $X \in 3.1$ означает, что имеют место обозначения, указанные в определении 3.1.

3.3. ЛЕММА. ([6], лемма 3.11). Пусть $X \in 3.1$, $X \not\cong {}^2G_2(3^{2k+1})$. Тогда для *H* и *T* имеют место следующие утверждения:

(1) $X = A_l(q)$, $|H| = (q-1)^l$, $N(H)/H \cong S_{l+1}$, $|T| = (q+1)^k (q-1)^{l-k}$, $N(T)/T \cong Z_2 \, wr \, S_k$, где $k = \left[\dfrac{l+1}{2}\right]$;

(2) $X = {}^2A_l(q^2)$, $|H| = (q-1)^k (q+1)^{l-k}$, $N(H)/H \cong Z_2 \, wr \, S_k$, $k = \left[\dfrac{l+1}{2}\right]$;

$|T| = (q+1)^l$, $N(T)/T \cong S_{l+1}$;

(3), (4) $X = B_l(q)$, $C_l(q)$, $l \ge 2$, $|H| = (q-1)^l$, $N(H)/H \cong Z_2 \, wr \, S_l$,

$|T| = (q+1)^l$, $N(T)/T \cong Z_2 \, wr \, S_l$;

(5) $X = D_l(q)$, $l > 3$, $|H| = (q-1)^l$, $N(H)/H \cong E_{2^{l-1}} \lambda S_l$;

если *l* – четное, $|T| = (q+1)^l$ и $N(T)/T \cong E_{2^{l-1}} \lambda S_l$,

если *l* – нечетное, $|T| = (q+1)^{l-1}(q-1)$, $N(T)/T \cong Z_2 \, wr \, S_{l-1}$;

(6) $X = {}^2D_l(q^2)$, $l > 3$, $|H| = (q-1)^{l-1}(q+1)$, $N(H)/H \cong Z_2 \, wr \, S_{l-1}$;

если *l* – нечетное, $|T| = (q+1)^l$, $N(T)/T \cong E_{2^{l-1}} \lambda S_l$;

если *l* – четное, $|T| = (q+1)^{l-1}(q-1)$, $N(T)/T \cong Z_2 \, wr \, S_{l-1}$;

(7) $X = G_2(q)$, $|H| = (q-1)^2$, $N(H)/H \cong D_{12}$; $|T| = (q+1)^2$, $N(T)/T \cong D_{12}$;

(8) $X = F_4(q)$, $|H| = (q-1)^4$, $|N(H)/H| = 2^7 \cdot 3^2$, $O^2(N(H)/H) \cong SL_2(3) * SL_2(3)$, $N(H)/H/O^2(N(H)/H) \cong E_4$; $|T| = (q+1)^4$, $N(T)/T \cong N(H)/H$;

(9) $X = E_6(q)$, $|H| = (q-1)^6$, $|N(H)/H| = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$, ($N(H)/H \cong PSp_4(3)$ имеет порядок $2^6 \cdot 3^4 \cdot 5$); $|T| = (q+1)^4(q-1)^2$, $N(T)/T$ содержит S_2-подгруппу из $N(H)/H$;

(10) $X = {}^2E_6(q^2)$, $|H| = (q-1)^4(q+1)^2$, $|N(H)/H| = 2^7 \cdot 3^2$, $N(H)/H$ изоморфна $N(H)/H$ в (8); $|T| = (q+1)^6$, $N(T)/T \cong N(H)/H$ в (9);

(11) $X = E_7(q)$, $|H| = (q-1)^7$, $|N(H)/H| = 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$; если $W = N(H)/H$, то $W/Z(W) \cong O_7(2) \cong Sp_6(2)$ имеет порядок $2^9 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$; $|T| = (q+1)^7$, $N(T)/T \cong W$;

(12) $X = E_8(q)$, $|H| = (q-1)^8$, $N(H)/H = W$ имеет порядок $2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$, $W/Z(W) \cong O_8^+(2)$; $|T| = (q+1)^8$, $N(T)/T \cong W$;

(13) $X = {}^3D_4(q^3)$, $|H| = (q-1)(q^3-1)$, $N(H)/H \cong D_{12}$; $|T| = (q+1)(q^3+1)$, $N(T)/T \cong D_{12}$, (лемма 6.10 в [6]).

3.4. ЛЕММА. Пусть $X \in 3.1$, $X \neq {}^2G_2(3^{2k+1})$. Пусть t – нечетный простой делитель порядка группы, $\sigma = \pi(X) - \{p, t, 2\}$, $p \neq t$. Предположим, что в *X* есть холловы $\{2, r\}$-подгруппы для всех $r \in \sigma$. Тогда силовские r-подгруппы *R* в *X* $r \neq 3$ можно выбрать так, что они удовлетворяют следующим условиям:

(1) $R \subseteq H$ при $q \equiv 1 \pmod 4$; $R \subseteq T$ при $q \equiv -1 \pmod 4$;

(2) силовские $(\sigma - \{3\})$-подгруппы порождают абелеву холлову $(\sigma - \{3\})$-подгруппу *K*;

(3) $N(H) \subseteq N(R)$ (при $q \equiv 1 \pmod 4$) и $N_X(T) \subseteq N(R)$ (при $q \equiv -1 \pmod 4$);

(4) если $p \neq 3 \neq t$ и $K \subseteq H$ $(K \subseteq T)$, то $\dfrac{|X|}{|H|}\left(\dfrac{|X|}{|T|}\right)\Big/ 2^a \cdot 3^b \cdot q^d \cdot t^c$ для подходящих натуральных чисел *a*, *b*, *c*, *d*, где $q^d = p^{nd}$ – порядок силовской *p*-подгруппы группы *X*; а $\dfrac{p'(X)}{|H|}\left(\dfrac{p'(X)}{|T|}\right)\Big/ 2^a \cdot 3^b \cdot t^c$;

(5) если $p \neq 3 \neq t$ в *X* есть холлова $\{2, 3\}$-подгруппа *L*, то или $L \subseteq N(H)$ $(L \subseteq N(T))$ для некоторой подгруппы Картана *H* (некоторого тора *T*) и $\dfrac{p'(X)}{|HL|}\left(\dfrac{p'(X)}{|TL|}\right)\Big/ t^c$, $\dfrac{p'(X)}{|H|}\left(\dfrac{p'(X)}{|T|}\right)\Big/ \left|{}^{HL}\!/_{H}\right| \cdot t^c \left(\left|{}^{TL}\!/_{T}\right| \cdot t^c\right)$, или $X_1 = A_1(q)$ с $|X|_{\{2,3\}} = 48$ *или 24* и $|X|_{\{2,\ 3,\ 5\}} = 120$;

(6) если $p = 3$ или $t = 3$, то *K* есть σ-группа и $\dfrac{p'(X)}{|H|}\left(\dfrac{p'(X)}{|T|}\right)\Big/ 2^a \cdot t^c$;

Доказательство. Пусть $R \in Syl_r(X)$, $Q \in Syl_s(X)$, где $\{r, s\} \subseteq \sigma$. Пусть SR и S^xQ – холловы $\{2, r\}$- и $\{2, s\}$-подгруппы из *X*. По теореме 5.2 из [6] при $q \equiv 1 \pmod 4$ R и Q лежат в некоторых подгруппах Картана H и H^y, $y \in X$, так как любые две подгруппы Картана сопряжены в *X*. Тогда $Q^{y^{-1}} \subseteq H$. $(S^xQ)^{y^{-1}} = yS^xy^{-1} \cdot yQy^{-1}$. Так как *H* – абелева группа, то $R \cdot yQy^{-1}$ также является абелевой группой. Поэтому *K* – абелева $(\sigma - \{3\})$-подгруппа. Так как *R* – силовская подгруппа в *H*, то она является характеристической подгруппой в *H*. Поэтому $R \lhd N_X(H)$. Из условия леммы следует, что $\pi(|X : H|) \subseteq \{2, 3, p, t\}$. Предположим, что в *X* имеется холлова $\{2, 3\}$-подгруппа *L*. Из теоремы 5.5 в [6] следует, что *L* лежит в нормализаторе некоторой подгруппы Картана либо в нормализаторе некоторого максимального тора известного порядка, и по лемме 3.11 в [6] все эти торы сопряжены в *X*, либо является холловой $\{2, 3\}$-подгруппой в группе $A_1(q)$ с $|A_1(q)|_{\{2,\ 3\}} = 48$ или 24, или $|A_1(q)|_{\{2,\ 3,\ 5\}} = 120$. Этими рассуждениями утверждения (1) – (5) доказаны для $q \equiv 1 \pmod 4$. Если же $q \equiv -1 \pmod 4$, то в приведенных рассуждениях можно заменить *H* на *T*, так как *T* также является абелевой группой, которую нормализует некоторая силовская 2-подгруппа из *X* (по теореме 5.2 (2) в [6]), а все такие торы сопряжены в *X* по лемме 3.11 (2) в [6]. Утверждение (6) есть следствие из предыдущих рассуждений, теоремы 4.2 (далее в разделе 4) и теоремы 5.2 в [6]. Этим лемма полностью доказана.

3.5. ЛЕММА. Пусть x – натуральное число. Тогда

(1) $(x \pm 1,\ x^2 + 1) \in \{1, 2\}$;

(2) $(x^2 \pm x + 1,\ x^2 + 1) = 1$;

(3) $(x - 1,\ x^2 + x + 1) \in \{1, 3\}$, $(x + 1,\ x^2 - x + 1) \in \{1, 3\}$;

(4) $(x^2 + x + 1,\ x^2 - x + 1) = 1$;

(5) числа $(x+1)$, $x^2 + x + 1$, $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, …, $x^{2n} + x^{2n-1} + \ldots + x + 1$ попарно взаимно просты;

(6) числа (x^2+1), $x^2 + x + 1$, $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, …, $x^{2n} + x^{2n-1} + \ldots + x + 1$ попарно взаимно просты;

(7) числа $(x-1)$, (x^2+1), $x^2 - x + 1$, $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$, …, $x^{2n} - x^{2n-1} + \ldots - x + 1$ попарно взаимно просты, исключая $(x - 1,\ x^2 + 1) \in \{1, 2\}$;

(8) $(x \pm 1,\ x^8 + x^4 + 1) \in \{1, 3\}$.

Доказательство. Эти утверждения элементарны. Докажем, например, (5), (6) и (8).

(5). То, что $(x+1,\ x^2 + x + 1) = 1$ очевидно. По предположению индукции $(x+1,\ x^{2n} + x^{2n-1} + \ldots + x + 1) = 1$. Предположим, что $1 \neq d = (x+1,\ x^{2n+2} + x^{2n+1} + \ldots + x + 1)$. Тогда $d/(x^{2n+2} + \ldots + x^2) = x^2(x^{2n} + \ldots + x + 1)$, т.е. $d/(x^{2n} + \ldots + x + 1)$, что противоречит предположению индукции.

Аналогично доказывается, что $(x^2 + x + 1,\ x^{2n} + \ldots + x^2 + x + 1) = 1$ и $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1,\ x^{2n} + \ldots + x + 1) = 1$, и так далее.

(6). Идея доказательства по индукции из (5) используется и здесь для доказательства, что $(x^2 + 1,\ x^{2n} + \ldots + x^2 + x + 1) = 1$.

(8). Предположим, что $1 \neq d = (x+1,\ x^8 + x^4 + 1)$. Тогда d делит разность этих чисел.

Получаем последовательно: $d/(x^8 + x^4 - x) = x(x^7 + x^3 - 1)$; $d/(x^7 + x^3 - 1 + x + 1) = x(x^6 + x^2 + 1)$; $d/(x^6 + x^2 - x) = x(x^5 + x - 1)$; $d/(x^5 + x - 1 + x + 1) = x(x^4 + 2)$; $d/(x^4 + 2)$.

Кроме того, $d/(x+1)/(x^2-1)/(x^4-1)$. Поэтому $d/(x^4 + 2 - x^4 + 1) = 3$.

Аналогично, если $1 \neq d = (x-1,\ x^8 + x^4 + 1)$, то $d/(x^8 + x^4 + x) = x(x^7 + x^3 + 1)$; $d/(x^7 + x^3 + x) = x(x^6 + x^2 + 1)$; $d/(x^6 + x^2 + x) = x(x^5 + x + 1)$; $d/(x^5 + x + x) = x(x^4 + 2)$.

Кроме того, $d/(x-1)/(x^8-1) = (x^4-1)(x^4+1)$; $d \nmid (x^4+1)$, иначе d/x^8. Поэтому $d/(x^4-1)$. Но тогда $d/(x^4 + 2 - x^4 + 1) = 3$. Лемма доказана.

3.6. ЛЕММА. ([9]). Пусть p, r – простые числа, m и n – натуральные числа. Если $p^m - r^n = 1$, то $(p^m, r^n) \in \{\ (3^2, 2^3), (3, 2), (p, 2^{2^l}), (2^m, r)$, где m – простое, l – натуральное число или $0\}$.

3.7. ЛЕММА. Пусть p, r, m, n – как в лемме 3.6. Тогда для $q = p^k$ $q^2 + 1 \neq 2^a; 3^b$, где k, a, b – натуральные числа.

Доказательство. Предположим противное, тогда $(2^a, p^{2k})$ или $(3^b, p^{2k})$ не удовлетворяют заключению леммы 3.6. Лемма доказана.

3.8. ТЕОРЕМА. [11]. Пусть X – простая неабелева группа с абелевой S_2-подгруппой. Тогда $X \in \{L_2(q),\ q \equiv \pm 3 \pmod 8;\ L_2(2^n),\ {}^2G_2(3^{2k+1}),\ J_1\}$.

4. Основной результат

4.1. ТЕОРЕМА. Пусть $X \in 3.1$, $X \not\cong {}^2G_2(3^{2k+1})$. Пусть t – нечетный простой делитель числа $|X|$; $\sigma = \pi(X) - \{2, p, t\}$. Предположим, что в X имеются холловы $\{2, r\}$-подгруппы для всех $3 \neq r \in \sigma$ и холлова $\{2, 3\}$-подгруппа при $p \neq 3 \neq t$. Тогда

(1) $X \cong A_1(q)$, $q+1 = 2 \cdot t^m$ или $q-1 = 2 \cdot t^m$;

(2) $X \cong A_1(q)$, $q+1$ делит $2^4 \cdot 3 \cdot t^c$, если $(q+1)/2^3 \cdot 3 \cdot t^c$, то $q \equiv \pm 3 \pmod 8$;

(3) $X \cong A_1(q)$, $q-1$ делит $2^4 \cdot 3 \cdot t^c$; если $(q-1)/2^3 \cdot 3 \cdot t^c$, то $q \equiv \pm 3 \pmod 8$;

(4) $X \cong A_1(q)$, $(q+1)/2^3 \cdot 3 \cdot t^c$, $p = 5$ или $q^2 - 1 \equiv 0 \pmod 5$ и $q \equiv \pm 3 \pmod 8$, или

$(q-1)/2^3 \cdot 3 \cdot t^c$, $p = 5$ или $q^2 - 1 \equiv 0 \pmod 5$ и $q \equiv \pm 3 \pmod 8$.

(5) $X \cong A_2(5)$, ${}^2A_2(7)$;

(6) $X \cong A_1(5^2)$, $A_1(11)$, $A_1(13)$, $A_1(23)$.

Доказательство. По условию теоремы $p \notin \{2, 3\}$, поэтому рассмотрим отдельно 13 возможностей.

1) $X = A_l(q)$. Пусть сначала $p \neq 3 \neq t$. Пусть $\sigma \neq \varnothing$. Из лемм 3.4 (6), 3.4 (4) и 3.3 (1) тогда следует, что

$$\frac{\prod_{i=1}^{l}(q^{i+1}-1)}{(q-1)^l} = 2^a \cdot 3^b \cdot t^c \tag{4.1}$$

или

$$\frac{\prod_{i=1}^{l}(q^{i+1}-1)}{(q+1)^k (q-1)^{l-k}} = 2^a \cdot 3^b \cdot t^c, \tag{4.2}$$

где $k = \left[\dfrac{l+1}{2}\right]$.

В правой части (4.1) и (4.2) имеется два нечетных взаимно простых множителя 3 и *t*. В левой части выражений (4.1) и (4.2) имеются множители $\dfrac{q^3-1}{q-1} \cdot \dfrac{q^4-1}{q-1} \cdot \dfrac{q^5-1}{q-1} \cdot \ldots$ и соответственно $\dfrac{q^3-1}{q-1} \cdot \dfrac{q^4-1}{q+1} \cdot \dfrac{q^5-1}{q-1} \cdot \ldots$, которые имеют делители $(q^2+q+1)(q^2+1)(q^4+q^3+q^2+q+1)$, попарно взаимно простые по лемме 3.5 (6), причем q^2+1 – четное число, поэтому q^2+1 есть степень числа 2, что невозможно по лемме 3.7. Поэтому $i+1 < 5$, $l \leq 3$.

Пусть $l = 3$. Из лемм 3.4 (5, 6) и 3.3 (1) следует, что $\dfrac{q^2-1}{q-1} \cdot \dfrac{q^3-1}{q-1} \cdot \dfrac{q^4-1}{q-1} \cdot \dfrac{1}{4!} \Big/ t^c$ или $\dfrac{q^2-1}{q+1} \cdot \dfrac{q^3-1}{q-1} \cdot \dfrac{q^4-1}{q+1} \cdot \dfrac{1}{2^2 \cdot 2} \Big/ t^c$ ввиду $k = 2$. То есть

$$(q+1)^2 \cdot (q^2+q+1) \cdot (q^2+1) \cdot \frac{1}{2^3 \cdot 3} \Big/ t^c, \tag{4.3}$$

или

$$(q-1)^2 \cdot (q^2+q+1) \cdot (q^2+1) \cdot \frac{1}{2^3} \Big/ t^c. \tag{4.4}$$

В левых частях выражений (4.3) и (4.4) есть три четных множителя $(q \pm 1)^2 (q^2+1)$. Поэтому $\dfrac{(q \pm 1)^2}{4}$ и $\dfrac{q^2+1}{2}$ – нечетные числа.

Из леммы 3.5 (6) теперь следует: либо $q^2+q+1 = t^\gamma$, $\gamma \leq c$ и $\dfrac{q^2+1}{6} = 1$, либо $\dfrac{q^2+q+1}{3} = 1$ и $\dfrac{q^2+1}{2} = t^m$, $m \leq c$. Очевидно, что ни одна из этих возможностей не может иметь места.

Пусть $l=2$, $k=1$. Тогда из лемм 3.4 (5) и 3.3 (1) следует, что $\frac{q^2-1}{q-1}\cdot\frac{q^3-1}{q-1}\cdot\frac{1}{3!}\Big/ t^c$ или $\frac{q^2-1}{q+1}\cdot\frac{q^3-1}{q-1}\cdot\frac{1}{2}\Big/ t^c$. То есть

$$(q+1)\cdot(q^2-q+1)\cdot\frac{1}{6}\Big/ t^c, \tag{4.5}$$

или

$$(q-1)\cdot(q^2+q+1)\cdot\frac{1}{2}\Big/ t^c. \tag{4.6}$$

Из (4.5) и (4.6) следует, что $\frac{(q+1)}{2}$ и $\frac{(q-1)}{2}$ – нечетные числа. Из леммы 3.5 (5) следует, что либо $\frac{q+1}{2\cdot 3}=1$ и $q^2+q+1=t^\gamma$, $\gamma\le c$, либо $\frac{q+1}{2\cdot t^m}=1$ и $q^2+q+1=3$. Это возможно лишь при $q=p=5$.

Группа $A_2(5)$ есть в заключении теоремы. Она имеет холлову $\{2, 3\}$-подгруппу.

Из леммы 3.5 (3) следует, что $\left(\frac{q-1}{2},\ q^2+q+1\right)\in\{1, 3\}$. Так как $t\ne 3$, то $q^2+q+1=t^\gamma$, $\gamma\le c$, а $q-1=2$, $q=3$. Это противоречит условию, что $q\ne 3$.

Наконец, пусть $l=1$, $k=1$. Тогда из лемм 3.4 (5) и 3.3 (1) следует, что $\frac{q^2-1}{q-1}\cdot\frac{1}{2}\Big/ t^c$ или $\frac{q^2-1}{q+1}\cdot\frac{1}{2}\Big/ t^c$. Тогда $q+1=2\cdot t^\gamma$, $\gamma\le c$ и $q-1=2\cdot t^m$, $m\le c$. Эти группы есть в заключении теоремы.

Кроме того, из теоремы 5.5 (c, d) в [6] следует, что в группах $A_1(q)$ с $|A_1(q)|_{\{2,3\}}=48$ или 24 и с $|A_1(q)|_{\{2,3,5\}}$ есть холлова $\{2, 3\}$-подгруппа. Если $|\pi(X)|=4$, то из [13] следует, что это группы $A_1(q)$ с $q\in\{5^2, 11, 13, 23\}$. Эти группы имеются в заключении теоремы.

Если предположить, что в этих группах $|\pi(X)|>4$, то в H или T по условию и лемме 3.4 (2) есть холлова σ-подгруппа и из леммы 3.4 (4) следует, что $(q+1)/2^a\cdot 3\cdot t^c$, $a=3$ или 4, или $(q-1)/2^a\cdot 3\cdot t^c$ с $a=3$ или 4. Кроме того, если $|A_1(q)|_{\{2,3,5\}}=120$, то из теоремы Диксона [1, теорема 2.8.27] следует, что тогда $p=5$ или $q^2-1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\, 5)$, а из теоремы 3.8 [11] следует, что $q\equiv\pm 3\ (\mathrm{mod}\, 8)$ в случаях с $|A_1(q)|_{\{2,3\}}=24$ и $|A_1(q)|_{\{2,3,5\}}=120$.

Пусть теперь $p=3$ или $t=3$. Из предыдущих рассуждений и леммы 3.4 (6) следует, что достаточно рассмотреть случаи с $l=2$, $k=1$ и $l=1$, $k=1$. Из теоремы 5.2 в [6] следует, что холлова $(\{2\}\cup\sigma)$-подгруппа M лежит в $N(H)$ или в $N(T)$, а холлова σ-подгруппа K лежит в H или T. Поэтому $p'(X)/|N(H)|$ или $p'(X)/|N(T)|$ делит t^c. По лемме 3.3 (1) при $l=2$, $k=1$ $N(T)/T\cong Z_2$, а $N(H)/H\cong S_3$. Поэтому $p'(X)/|H|$ или $p'(X)/|T|$ делит $|N(H)/H|\cdot t^c$ и $|N(T)/T|\cdot t^c$ соответственно. То есть в силу леммы 3.4 (6) $\frac{(q^2-1)(q^3-1)}{(q-1)^2}\Big/ 2\cdot t^c$ или $\frac{(q^2-1)(q^3-1)}{(q+1)(q-1)}\Big/ 2\cdot t^c$.

Тогда $(q+1)(q^2+q+1)\big/ 2\cdot t^c$ или $(q-1)(q^2+q+1)\big/ 2\cdot t^c$. Так как q^2+q+1 есть число нечетное, то в первом случае $q+1=2$, что невозможно, а во втором $(q-1)\in\{2, 6\}$ в силу леммы 3.5 (3). Это дает $q\in\{3, 7\}$. При этом $p=3$ влечет $q\in\{3, 9\}$, а $t=3$ влечет $q\in\{7\}$. Но при $q=7$ $q^2+q+1=57=3\cdot 19$ и $t\ne 3$. При $q=9$ $q^2+q+1=91=7\cdot 13\ne t^a$. Группа $A_2(3)$ не удовлетворяет условию, так как $|\pi(A_2(3))|=3$.

Если же $l=1$, $k=1$, то по лемме 3.3 (1) $N(T)/T\cong Z_2$, $N(H)/H\cong S_2\cong Z_2$, и $\frac{q^2-1}{q-1}\Big/ 2\cdot t^c$ или $\frac{q^2-1}{q+1}\Big/ 2\cdot t^c$. Эти группы есть в заключении (1) теоремы.

2) $X = {}^2A_l(q)$, $l > 1$. Пусть сначала $p \neq 3 \neq t$. Предположим, что $(\sigma - \{3\}) \neq \varnothing$. Из лемм 3.4 (4), 3.4 (6) и 3.3 (2) тогда следует:

что
$$\frac{\prod_{i=1}^{l}(q^{i+1} - (-1)^{i+1})}{(q-1)^k (q+1)^{l-k}} \Big/ 2^a \cdot 3^b \cdot t^c, \tag{4.7}$$

или
$$\frac{\prod_{i=1}^{l}(q^{i+1} - (-1)^{i+1})}{(q+1)^l} \Big/ 2^a \cdot 3^b \cdot t^c, \tag{4.8}$$

где $k = \left[\dfrac{l+1}{2}\right]$.

Из леммы 3.5 (7) следует, что в левых частях выражений (4.7) и (4.8) имеются нечетные попарно взаимно простые делители $\dfrac{q^3+1}{q+1} \cdot \dfrac{q^5+1}{q+1} \cdot \ldots$. В правых частях выражений (4.7) и (4.8) есть только два нечетных простых делителя: 3 и *t*. Поэтому $l \le 5$. Кроме того, в левых частях (4.7) и (4.8) есть множитель q^2+1 $\left(в\ \dfrac{q^4-1}{q \pm 1}\right)$ взаимно простой по лемме 3.5 (7) с $\dfrac{q^m+1}{q+1}$, $m = 3; 5$. По лемме 3.7 q^2+1 не может быть степенью числа 2. Поэтому $m \neq 5$ и $l < 4$ в (4.7) и (4.8).

Пусть $l = 3$, $k = 2$. Тогда (4.7) и (4.8) принимают вид:

$$\frac{q^2-1}{q-1} \cdot \frac{q^3+1}{q+1} \cdot \frac{q^4-1}{q-1} \Big/ 2^2 \cdot 2! \cdot t^c, \tag{4.9}$$

или
$$\frac{q^2-1}{q+1} \cdot \frac{q^3+1}{q+1} \cdot \frac{q^4-1}{q+1} \Big/ 4! \cdot t^c. \tag{4.10}$$

По лемме 3.7 $q^2+1 \neq 2^\alpha$. По лемме 3.5 (2) $(q^2-q+1,\ q^2+1) = 1$. Поэтому (4.9) не может иметь места. $q^2-q+1 \neq 3$. Поэтому $q^2-q+1 = t^c$, $q^2+1 = 3 \cdot 2^\alpha$, $\alpha \le 3$ в (4.10). Из леммы 3.5 (1) следует, что $\alpha = 1$ в (4.10). Но и это невозможно.

Наконец, пусть $l = 2$, $k = 1$. Тогда (4.7) и (4.8) принимают вид:

$$\frac{q^2-1}{q-1} \cdot \frac{q^3+1}{q+1} \Big/ 2 \cdot t^c, \tag{4.11}$$

или
$$\frac{q^2-1}{q+1} \cdot \frac{q^3+1}{q+1} \Big/ 3! \cdot t^c. \tag{4.12}$$

Из (4.11) следует, что $q+1 = 2$, $q = 3$, что противоречит условию, что $p \neq 3$. Из (4.12) и $(q-1,\ q^2-q+1) = 1$ следует, что $q^2-q+1 = t^c$, $q-1 = 6$. Откуда $q = 7 = p$, $X \cong {}^2A_2(7)$, $|X| = 7^3 \cdot 48 \cdot (7^3+1) = 2^7 \cdot 3 \cdot 7^3 \cdot 43$. В *X* есть холлова $\{2, 3\}$-подгруппа, лежащая в $N(T)$, где $|T| = 2^6$. Она есть в заключении теоремы.

Пусть теперь $p = 3$ или $t = 3$. Из предыдущих рассуждений и леммы 3.4 (6) следует, что достаточно рассмотреть случай с $l = 2$, $k = 1$. Тогда, как и в случае 1), на основании теоремы 5.2 в [6] и леммы 3.3 (2) получаем, что $\dfrac{(q^2-1)(q^3+1)}{(q-1)(q+1)} \Big/ 2 \cdot t^c$ или $\dfrac{(q^2-1)(q^3+1)}{(q+1)^2} \Big/ 2 \cdot t^c$ (по лемме 3.4 (6)). Откуда $(q+1)(q^2-q+1) \big/ 2 \cdot t^c$ или $(q-1)(q^2-q+1) \big/ 2 \cdot t^c$ и эта ситуация исключается как и ситуация с $l = 2$, $k = 1$ в случае 1).

3); 4) $X \neq B_l(q)$, $C_l(q)$, $l > 1$.

Пусть сначала $p \neq 3 \neq t$. Из лемм 3.4 (4), 3.4 (6) и 3.3 (3, 4) следует, что

$$\frac{\prod_{i=1}^{l}(q^{2i} - 1)}{(q \pm 1)^l} \Big/ 2^a \cdot 3^b \cdot t^c. \tag{4.13}$$

Анализ выражения (4.13) делаем отдельно для $(q+1)^l$ и $(q-1)^l$. В левой части (4.13) имеются множители:

$$\frac{q^2-1}{q\pm1}\cdot\frac{q^4-1}{q\pm1}\cdot\frac{q^6-1}{q\pm1}=\begin{cases}(q+1)^3(q^2+1)(q^2+q+1)(q^2-q+1) \text{ для } (q-1)^l,\ l\geq3;\\(q-1)^3(q^2+1)(q^2+1+1)(q^2-q+1) \text{ для } (q+1)^l,\ l\geq3.\end{cases} \tag{4.14}$$

Из лемм 3.5 (2), 3.5 (4) и 3.7 следует, что эти множители не могут делить число $2^a\cdot3^b\cdot t^c$. Поэтому пусть $l=2$. Тогда (4.13) принимает вид:

$$\left.\begin{matrix}(q+1)^2(q^2+1)\big/2^2\cdot2!\cdot t^c \text{ для } (q-1)^2\\(q-1)^2(q^2+1)\big/2^2\cdot2!\cdot t^c \text{ для } (q+1)^2\end{matrix}\right\} \tag{4.15}$$

Из леммы 3.5 (1) следует тогда, что $q^2+1=2\cdot t^c$, $q\pm1=2^2$ или $q^2+1=2^2\cdot t^c$, $q\pm1=2$, или $q^2+1=t^c$, $q\pm1=2^3$. По условию теоремы $q\neq3^m$. Поэтому либо $q=5$, либо $q=7$. Если $q=7$, то $q^2+1\neq t^c$. Поэтому $q=5$. Но тогда $q+1\neq6$ в (4.15) для $(q-1)^2$. То есть может иметь место лишь вторая строка в (4.15), когда $|T|=(q+1)^2$, то есть когда $q\equiv-1\,(\mathrm{mod}\,4)$. Но для $q=5$ это невозможно.

Кроме того, по теорема 5.5 (e, g) из [6] в группах $B_3(q)$ и $B_4(q)$ имеются холловские $\{2,3,5,7\}$-подгруппы, изоморфные соответственно $\Omega_7(2)$ и $2.\Omega_8^+(2)$. Но в них нет холловых $\{2,3\}$-подгрупп по теореме 1.2 в [10]. Этим случаи 3) и 4) исключаются из рассмотрения.

Пусть теперь $p=3$ или $t=3$. Из предыдущих рассуждений и леммы 3.4 (6) следует, что достаточно рассмотреть случай с $l=2$. Как и в случаях 1) и 2) получаем на основании леммы 3.3 (3), что $(q+1)^2(q^2+1)\big/2^3\cdot t^c$ или $(q-1)^2(q^2+1)\big/2^3\cdot t^c$. Из леммы 3.6 (2) в [7] и 3.6 (3) в [7] получаем соответственно:

$$q=p,\ q+1=2^b,\ q^2+1=2\cdot t^a \text{ или}$$

$$q\in\{3,9\} \text{ или } q=p \text{ и } q-1=2^b,\ q^2+1=2\cdot t^a.$$

Из леммы 3.5 (1) следует, что $q+1=2$ или $q-1=2$, $q\in\{3,9\}$ (так как $(q\pm1)^2\big/2^3$. Поэтому $q=3$ или 9. Группа $B_2(3)$ не удовлетворяет условию теоремы, так как $|\pi(B_2(3))|=3$. Если же $q=9$, то $(q-1)^2(q^2+1)=8^2\cdot2\cdot41\not|\,2^3\cdot t^c$. Этим случаи 3) и 4) исключаются из рассмотрения.

5); 6) $X\neq D_l(q)$, ${}^2D_l(q^2)$, $l\geq4$. В этих случаях из лемм 3.4 (4), 3.4 (6) и 3.3 (5, 6) следует, что

$$\frac{(q^l-1)\prod_{i=1}^{l-1}(q^{2i}-1)}{(q\mp1)^l}\Bigg/2^a\cdot3^b\cdot t^c, \tag{4.16}$$

или

$$\frac{(q^l-1)\prod_{i=1}^{l-1}(q^{2i}-1)}{(q+1)^{l-1}(q-1)}\Bigg/2^a\cdot3^b\cdot t^c, \tag{4.17}$$

или

$$\frac{(q^l+1)\prod_{i=1}^{l-1}(q^{2i}-1)}{(q\mp1)^{l-1}(q\pm1)}\Bigg/2^a\cdot3^b\cdot t^c, \tag{4.18}$$

или

$$\frac{(q^l+1)\prod_{i=1}^{l-1}(q^{2i}-1)}{(q+1)^{l}}\Bigg/2^a\cdot3^b\cdot t^c. \tag{4.19}$$

Поскольку в (4.16) – (4.19) $l \geq 4$, то даже при $l = 4$ имеем то, что левая часть выражений (4.16) – (4.19) не может делить правую.

В самом деле,

$$\frac{(q^4-1)(q^2-1)(q^4-1)(q^6-1)}{(q-1)^4} = (q+1)^3(q^2+1)^2(q^3+1)(q^2+q+1) = (q+1)^4(q^2+1)^2(q^2-q+1)(q^2+q+1)$$

в силу лемм 3.5 (4), 3.5 (2) и 3.7 не может делить число вида $2^a \cdot 3^b \cdot t^c$. Точно так числа

$$\frac{(q^4-1)(q^2-1)(q^4-1)(q^6-1)}{(q+1)^4} = (q-1)^4(q^2+1)^2(q^2+q+1)(q^2-q+1);$$

$$\frac{(q^4-1)(q^2-1)(q^4-1)(q^6-1)}{(q+1)^3(q-1)} = (q+1)(q-1)^3(q^2+1)^2(q^2-q+1)(q^2+q+1);$$

$$\frac{(q^4+1)(q^2-1)(q^4-1)(q^6-1)}{(q-1)^3(q+1)} = (q^4+1)(q^2+1)(q+1)^2(q^2-q+1)(q^2+q+1);$$

$$\frac{(q^4+1)(q^2-1)(q^4-1)(q^6-1)}{(q+1)^3(q-1)} = (q^4+1)(q^2+1)(q-1)^2(q^2-q+1)(q^2+q+1)$$

не могут делить число $2^a \cdot 3^b \cdot t^c$.

Число
$$\frac{(q^4+1)(q^2-1)(q^4-1)(q^6-1)}{(q+1)^4} = \frac{(q^4+1)(q-1)^2(q^2+1)(q^3-1)(q^2-q+1)}{q+1} =$$
$$= \frac{(q^4+1)(q-1)^3(q^2+1)(q^2+q+1)(q^2-q+1)}{q+1}$$

является целым как индекс подгруппы в группе. Так как $(q+1,\ q^2+q+1)=1$, $(q+1,\ q^2-q+1)\in\{1, 3\}$ по лемме 3.5 (3), то $q+1 \in \{\, 2\cdot 3,\ 2^2\cdot 3,\ 2^3\cdot 3,\ 2^4\cdot 3,\ 2^5\cdot 3,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5 \,\}$, $q \in \{5, 11, 23, 47, 7, 31\}$.

Если $q = 5$, то $q^2+q+1 = 31$ и $t = 31$. Но тогда $q^2+1 = 26 = 2\cdot 13 \nmid 2^a \cdot 3^b \cdot 31^c$.

Если $q = 11$, то $q^2+q+1 = 133 = 7\cdot 19 \nmid 2^a \cdot 3^b \cdot t^c$.

Если $q = 23$, то $q^2+q+1 = 553 = 7\cdot 79 \nmid 2^a \cdot 3^b \cdot t^c$.

Если $q = 47$, то $q^2+q+1 = 2257 = 37\cdot 61 \nmid 2^a \cdot 3^b \cdot t^c$.

Если $q = 31$, то $q^2+q+1 = 331\cdot 3$, $q^2+1 = 2\cdot 481 = 2\cdot 13\cdot 37 \nmid 2^a \cdot 3^b \cdot 331$.

Если $q = 7$, то $q^2+q+1 = 57 = 3\cdot 19$, $q^2+1 = 50 = 2\cdot 5^2 \nmid 2^a \cdot 3^b \cdot 19$.

Поэтому и (4.19) не может иметь места.

7) $X \neq G_2(q)$. Из лемм 3.4 (4), 3.4 (6) и 3.3 (7) следует, что $\dfrac{(q^6-1)(q^2-1)}{(q\mp 1)^2\cdot 2^2\cdot 3} \Big/ t^c$. То есть

$$(q^3\pm 1)(q^2\pm q+1)(q\pm 1) \Big/ 2^2\cdot 3\cdot t^c. \tag{4.20}$$

Из леммы 3.5 (4) следует, что $q^2 \pm q + 1 \neq 3$ и (4.20) не может иметь места.

8) $X \neq F_4(q)$. Из лемм 3.4 (4), 3.4 (6) и 3.3 (8) следует, что $\dfrac{(q^{12}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1)}{(q\mp 1)^4} \Big/ 2^7\cdot 3^2\cdot t^c$.

$$\frac{(q^6-1)(q^6+1)(q^4-1)(q^4+1)(q^3-1)(q^3+1)(q^2-1)}{(q+1)^4} =$$
$$= (q^3-1)(q^2-q+1)(q^6+1)(q^2+1)(q-1)(q^4+1)(q^3-1)(q^2-q+1)(q-1) \Big/ 2^7\cdot 3^2\cdot t^c.$$

Так как $q^3-1=(q-1)(q^2+q+1)$, то из леммы 3.5 (4) следует, что либо $q^2+q+1=3$ или 3^2, либо $q^2-q+1=3$ или 3^2. Это невозможно. Этим 8) доказано, так как случай с $(q-1)^4$ в знаменателе аналогично исключается.

9); 10) $X \neq E_6(q)$, ${}^2E_6(q^2)$.

Эти случаи исключаются, как и 8).

Из лемм 3.4 (4), 3.4 (6) и 3.3 (9, 10) следует, что для $X = E_6(q)$ имеем:

$$\frac{(q^{12}-1)(q^9-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^5-1)(q^2-1)}{|H| \ (\text{или } |T|)} \Big/ 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^t . \tag{4.21}$$

Так как $|H|=(q-1)^6$, то

$$\frac{(q^3-1)(q^3+1)(q^6+1)(q^3-1)(q^6+q^3+1)}{(q-1)(q-1)} \cdot \frac{(q^4+1)(q^2-1)(q^2+1)}{(q-1)(q-1)} \cdot \frac{(q^5-1)(q^2-1)(q^3-1)(q^3+1)}{(q-1)(q-1)} =$$

$$=(q^2+q+1)(q+1)(q^2-q+1)(q^6+1)(q^2+q+1)(q^6+q^3+1)\cdot(q^4+1)(q+1)(q^2+1)(q^5-1)(q+1)\times$$

$$\times(q^2+q+1)(q+1)(q^2-q+1) \Big/ 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^t .$$

Из лемм 3.5 (2) и 3.5 (4) следует, что такое деление в натуральных числах не может иметь места.

Так как $|T|=(q+1)^4(q-1)^2$, то из (4.21) получаем:

$$\frac{q^{12}-1}{q+1}\cdot\frac{q^8-1}{q+1}\cdot\frac{q^6-1}{q+1}\cdot\frac{q^2-1}{q+1}\cdot\frac{q^9-1}{q-1}\cdot\frac{q^5-1}{q-1} \Big/ 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^t . \tag{4.22}$$

Из леммы 3.5 (6) следует, что $\left(\frac{q^9-1}{q-1}, \frac{q^5-1}{q-1}\right)=1$ и оба эти числа – нечетные. Кроме того, в множителе $\frac{q^8-1}{q+1}=(q^4-1)(q^2+1)(q-1)$ есть делитель (q^2+1), который по лемме 3.5 (6) также взаимно прост с $\frac{q^9-1}{q-1}$ и $\frac{q^5-1}{q-1}$. Теперь из леммы 3.7 следует, что (4.22) не может иметь места.

Если же $X = {}^2E_6(q^2)$, то из леммы 3.3 (10) имеем:

$$\frac{(q^{12}-1)(q^9+1)(q^8-1)(q^6-1)(q^5+1)(q^2-1)}{(q-1)^4(q+1)^2 \ (\textit{или } (q+1)^6\,)} \Big/ 2^7 \cdot 3^2 \cdot t^c . \tag{4.23}$$

Из леммы 3.5 (7) следует, что $\left(\frac{q^9+1}{q+1}, \frac{q^5+1}{q+1}\right)=1$ и оба эти числа нечетные. Поэтому $\frac{q^8-1}{(q\pm1)}= =\frac{(q^4-1)(q^4+1)}{(q\pm1)}=\frac{(q^2+1)(q^2-1)(q^4+1)}{(q\pm1)}$ имеет множитель (q^2+1), который по лемме 3.5 (7) взаимно прост и с $\frac{q^5+1}{q+1}$, и с $\frac{q^9+1}{q+1}$. Но тогда $(q^2+1)/2^7$, что невозможно по лемме 3.7.

11) $X \neq E_7(q)$, так как по лемме 3.3 (11) $|\pi(N(H)/H)|=|\pi(N(T)/T)|=4$, что противоречит лемме 3.4 (4) ($\left|\pi\left(\frac{p'(X)}{|H|}\right)\right|\leq 3, \left|\pi\left(\frac{p'(X)}{|T|}\right)\right|\leq 3$).

12) $X \neq E_8(q)$ по той же причине, что и $X \neq E_7(q)$.

13) $X \neq {}^3D_4(q^3)$. Как и выше, по лемме 3.3 (13)

$$\frac{(q^8+q^4+1)(q^6-1)(q^2-1)}{(q\mp1)(q^3\mp1)} \Big/ 2^2\cdot3\cdot t^c . \quad (4.24)$$

или $(q^8+q^4+1)(q^3\pm1)(q\pm1)\big/2^2\cdot3\cdot t^c$.

$(q^8+q^4+1)(q^2\mp q+1)(q\pm1)^2\big/2^2\cdot3\cdot t^c$.

Из леммы 3.5 (3) следует, что $(q^2-q+1,\ q+1)\in\{1,3\}$, $(q^2+q+1,\ q-1)\in\{1,3\}$. $q^2\pm q+1$ – нечетное число. Если $3/(q^2\pm q+1)$, то из (4.24) следует что $3\not|(q\pm1)$ и $3\not|(q^8+q^4+1)$. Но тогда по лемме 3.5 (8) $(q^8+q^4+1,\ q\pm1)=1$. Тогда $q^8+q^4+1=t^m$, $m\le c$, $q\pm1=2$, что невозможно. Точно так же, если $3/(q^8+q^4+1)$, то эти же рассуждения приводят к противоречию. Итак, $q^8+q^4+1=t^m$, $q^2\pm q+1=t^n$, $n\le c$. Тогда из (4.24) следует, что $3\not|(q\pm1)$, ибо в правой части (4.24) нет 3^2. Итак, (4.24) невозможно.

Заметим, что в случаях 5) – 13) лемма 3.4 (6) не может иметь места. Теорема доказана.

Следующая теорема объясняет условие теоремы 4.1.

4.2. ТЕОРЕМА. Пусть $X\in3.1$. Тогда в *X* нет холловой $\{2,\ p\}$-подгруппы, исключая $X=A_2(3)$.

Доказательство. Пусть *A* – холлова $\{2,\ p\}$-подгруппа в *X*. По теореме 3.3 [10] либо $A\subseteq B$, либо *A* – параболическая подгруппа в *X*. Если $A\subseteq B$, то из абелевости $H\subset B$ следует, что $S\subset Syl_2(X)$ является абелевой группой и из теоремы 3.8 следует, что $X/Z(X)\cong L_2(q)$, $q\equiv\pm3\ (\mathrm{mod}\,8)$ или ${}^2G_2(3^{2k+1})$. Из теоремы 1.2 в [10] следует, что в группе ${}^2G_2(3^{2k+1})$ нет холловой $\{2,3\}$-подгруппы. Из теоремы 2.8.27 в [1] следует, что в группах $L_2(q)$ нет холловых $\{2,\ p\}$-подгрупп. Поэтому таких подгрупп нет и в $A_1(q)$.

Тогда впредь можно считать, что *A* – параболическая подгруппа в *X* и $B\subset A$. Из теоремы 5.2 в [10] следует, что *X* не может быть изоморфна группам $B_l(q)$, $C_l(q)$, $E_7(q)$, $E_8(q)$, $F_4(q)$, $G_2(q)$, ${}^2A_l(q)$, ${}^2E_6(q)$, ${}^2G_2(q)$, $D_{2m}(q)$, ${}^2D_{2m+1}(q)$.

Поэтому остается рассмотреть случаи, когда $X\cong D_{2m}(q),\ {}^2D_{2m+1}(q),\ A_l(q),\ E_6(q)$. Так как по условию, $p>2$, то по теоремам 6.3 и 8.3 в [10] исключаются из рассмотрения группы $D_{2m}(q)$ и ${}^2D_{2m+1}(q)$.

Пусть теперь $X=A_l(q)$. Если $p\neq3$, то по теореме 3.1 в [12] в *X* нет холловых $\{2,\ p\}$-подгрупп. Поэтому пусть $p=3$.

Из доказательства теоремы 10.2 в [10] следует, что либо $|A|=q^{21}(q-1)^2(q^2-1)^2(q^3-1)^2(q^4-1)$, либо $|A|=q^{(l+1)l/2}\prod_{i=1}^{l}(q^i-1)$, где $l+1$ – нечетное простое число.

Но тогда порядок силовской 2-подгруппы, которую содержит A, выразится числом

$$(q-1)^2(q^2-1)^2(q^3-1)^2(q^4-1)=2^a \quad (4.25)$$

или

$$\prod_{i=1}^{l}(q^i-1)=2^a . \quad (4.26)$$

Из (4.25) тогда следует, что $3^{4n}-2^m=1$ для $m\le a$. По лемме 3.6 это невозможно. Из (4.26) аналогично получаем, что $3^{2n}-2^m=1$ ($l+1$ – нечетное простое число). По лемме 3.6 это возможно лишь в случае $n=1,\ m=3,\ l=2,\ p=q=3$. Тогда $(3-1)(3^2-1)=2^4$, $X=A_2(3)$. $|A_2(3)|=3^3\cdot(3^2-1)(3^3-1)=2^4\cdot3^3\cdot13$.

По теореме 7.2 в [10] группа $E_6(q)$ не имеет собственной холловой $\{2,\ p\}$-подгруппы. Этим теорема доказана.

4.3. ТЕОРЕМА. Пусть $X \in Spor$ или $X \in \{A_n / n \geq 5\}$. Предположим, что *t, s* – нечетные простые делители порядка группы *X*, $\sigma = \pi(X) - \{2, t, s\}$. Предположим, что в *X* имеются холловы $\{2, r\}$-подгруппы *R* для всех *r* из σ. Тогда

(1) $X \cong M_{11}$, $|R| = 2^4 \cdot 3^2$, $|X| = |R| \cdot 5 \cdot 11$.

(2) $X \cong A_7$; $X \cong A_8$.

Доказательство. Утверждение (1) следует из теоремы 4.1 в [14] и таблицы 5.3 в [15]. Утверждение (2) следует из следствия 4.4 в [6] и теоремы А.4 в [8].

4.4. ТЕОРЕМА. Пусть $X = {}^2G_2(3^{2k+1})$. Пусть *t, s* – нечетные простые делители порядка группы *X*, и в *X* нет холловых $\{2, s\}$- и $\{2, t\}$-подгрупп. $\sigma = \pi(X) - \{2, t, s\}$. Тогда в *X* нет холловых $\{2, r\}$-подгрупп для некоторых $r \in \sigma$.

Доказательство. Предположим, что в *X* есть холловы $\{2, r\}$-подгруппы для всех $r \in \sigma$. Из теоремы 4.2 следует, что $3 \notin \sigma$. Поэтому $3 = s$. Из леммы 5.1 в [6] следует, что в *X* есть холлова $\{2, 7\}$-подгруппа и холлова подгруппа *M* порядка $2^a(q+1)$, $a = 2$ или 1. Пусть $7 \neq r \in \sigma$. Как и в доказательстве леммы 3.4 (2), легко показывается, что силовские *r*-подгруппы порождают абелеву подгруппу *K*, лежащую в одной из сопряженных с *M*. Тогда $|3'(X) : K| = t^c \cdot 7 \cdot 8$. Или $\frac{(q^3+1)(q-1)}{2^a(q+1)} = t^c \cdot 7$, $(q^2 - q + 1)(q-1) = 2^a \cdot 7 \cdot t^c$, где $q = 3^{2k+1}$. Поэтому $7 \nmid (q-1)$ ввиду теоремы Эйлера. Тогда $q - 1 = 2$, или $2^a \cdot t^c$ а $q^2 - q + 1 = 7$ и $q = 3$. Но $|\pi({}^2G_2(3))| = 3$ и группа не удовлетворяет условию теоремы. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Huppert, B. Endliche Gruppen, I. / B. Huppert. – Berlin: Springer – Verlag. – 1967. – 793 s.
2. Huppert, B. Finite groups, III / B. Huppert, N. Blackburn. – Berlin: Springer – Verlag. – 1982. – 454 p.
3. Горенстейн, Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию / Д. Горенстейн. – М.: Мир. – 1985. – 352 с.
4. Carter, R. Simple groups of Lie type / R. Carter. – London: J. Wiley and Sons. – 1972. – 333 p.
5. Кондратьев, А.С. Подгруппы конечных групп Шевалле / А.С. Кондратьев // Успехи матем. наук. – 1986. – Т. 41, № 1. – С. 57 – 96 .
6. Vdovin, E.P. Hall subgroups of finite groups / E.P. Vdovin, D.O. Revin / Ин-т матем., сиб. отдел. РАН. – 2004. – 40 с. – (Препринт. – № 134).
7. Пальчик, Э.М. О конечных группах с холловыми $\{2, r\}$-подгруппами / Э.М. Пальчик, С.Ю. Башун, А.В. Капусто // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С. Фундаментальные науки. – 2007. – № 3. – С. 14 – 22.
8. Hall, Ph. Theorems like Sylow`s / Ph. Hall // Proc. London Math. Soc. – 1956. – V. 6, № 2. – P. 286 – 304.
9. Zsigmondy, K. Zur Theorie der Potenzrests / K. Zsigmondy // Monatsh. Math. Phys. – 1892. – V. 3, № 2. – S. 265 – 284.
10. Ревин, Д.О. Холловы π-подгруппы конечных групп Шевалле, характеристика которых принадлежит π / Д.О. Ревин // Математические труды. – 1999. – Т. 2, № 1. – С. 160 – 208.
11. Walter, J.H. The characterization of finite groups with abelian Sylow 2-subgroups / J.H. Walter // Ann. Math. – 1969. – Vol. 89. – P. 405 – 514.
12. Gross, F. Hall subgroups of order not divisible by 3 / F. Gross // Rocky Mountain J. Mathematics. – 1993. – V. 23, № 2. – P. 569 – 591.
13. Huppert, B. Simple groups of order divisible by at most four primes / B. Huppert, W. Lempken // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры. – 2000. – № 3 (16). – С. 64 – 75.
14. Ревин, Д.О. Свойство D_π в одном классе конечных групп / Д.О. Ревин // Алгебра и логика. – 2002. – Т. 41, № 3. – С. 335 – 370.
15. Gorenstein, D. The classification of the Finite Simple Groups / D. Gorenstein, R. Lyons, R. Solomon // Mathematical Surveys and Monographs / American Math. Soc. Providence, RJ. – 1998. – № 3. Part 1. – 419 p.

Поступила 05.03.2007