

УДК 528. 23

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ПРОЕКЦИЙ ЗЕМНОГО ЭЛЛИПСОИДА НА ПЛОСКОСТИ ПРИ ОБРАБОТКЕ СПУТНИКОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

А.М. ПАЦИЯ

(Проектно-Изыскательский Институт «ГЕО», Россия)

Рассмотрены вопросы обработки GPS-измерений, выполненных для построения локальных геодезических сетей специального назначения. Математическая обработка таких измерений существенно проще в системах декартовых координат на плоскости геодезических проекций. Также такие системы координат наиболее удобны для практического применения. Обозначены проблемы обработки измерений в традиционной для России системе координат проекции Гаусса – Крюгера. На примере одного объекта приведены результаты сравнения средних квадратических ошибок измерений, выполненных имеющимися средствами и редуцированных на плоскость проекции Гаусса – Крюгера и в наилучшей проекции. Сравнительный анализ показывает существенное повышение точности координатных определений в результате применения наилучшей проекции.

Введение. Обзор литературы по данной проблеме сводится в основном к исследованию возможностей программных продуктов различных фирм-производителей для математической обработки геодезических измерений. Нами рассмотрены пакеты программного обеспечения трех фирм [1 – 3]: Trimble, Leica Geosystems и Topcon, продукция которых наиболее распространена на территории России. В результате анализа технической документации по данным программным продуктам можно сделать общий вывод о том, что указанные фирмы-производители основываются на общеизвестных и широко распространенных проекциях. Существуют способы описания локальных систем координат на основе уже созданных [1]. Таким образом, получается, что мы имеем возможность только повторить ошибки, заложенные в какой-либо системе координат, но не имеем возможности ее улучшить, оптимизировать с учетом размеров и формы границ территории, изображаемой на плоскости проекции. В справочном пособии по геодезическому обеспечению землеустроительных и кадастровых работ не уделяется должного внимания постобработке измерений. На сайте <http://www.gps-guide.ru/page6.html> [3] описаны составляющие погрешностей GPS-измерений.

Основная часть. В нашей статье рассматриваются вопросы обработки измерений в программных комплексах на основе общей теории описания конформных проекций [4]. Актуальность работы и ее необходимость состоит в минимизации средней квадратической ошибки (СКО) определения положения точки при ее отображении на плоскости проекции, что может обеспечить пренебрегаемо малое ее значение по сравнению с точностью натуральных измерений. Следует отметить, что геодезические измерения, основанные на спутниковых системах позиционирования, позволяют существенно повысить точность координатных определений по сравнению с классическими наземными методами геодезии. При этом, естественно, необходимо соответствующее алгоритмическое и программное обеспечение для их обработки на плоскости.

Рассмотрим некоторые варианты работы с местными системами координат на примере вычислений для точек, расположенных на краю шестиградусной зоны проекции Гаусса – Крюгера, что на практике случается довольно часто. Это вызвано тем, что в проекции Гаусса – Крюгера принята международная разграфка координатных зон. Применение проекции Гаусса – Крюгера с условным значением длины осевого меридиана, проходящим через середину объекта, также не может в полной мере решать задачу минимизации искажений потому, что даже объекты, расположенные на небольших по площади территориях, могут быть вытянуты вдоль параллели. Уравнивание измерений в программных продуктах, обеспечивающих обработку спутниковых измерений, проводится в какой-либо проекции и вполне естественно применить такую проекцию, в которой были бы минимально возможные искажения для конкретного объекта. В стандартный пакет программ, использующихся на территории Российской Федерации, входит только система координат 1942 года, где описаны параметры проекции Гаусса – Крюгера для референц-эллипсоида Красовского. Она определяется следующими параметрами [1]: B_0 – широта параллели центральной точки; L_0 – долгота осевого меридиана; X_0 – абсцисса центральной точки; Y_0 – ордината центральной точки; dm – масштабный коэффициент.

Проекция Гаусса – Крюгера является ни чем иным, как частным случаем универсальной поперечной проекции Меркатора (UTM) с частным масштабом длин на осевом меридиане m_0 , равном единице. В проекции UTM для средней широты США принято $m_0 = 0,9996$, в этом случае линейные искажения на осевом меридиане и на краю шестиградусной зоны по абсолютной величине одинаковы и равны 1: 2500,

но по знаку противоположны. Другими словами, на краю шестиградусной зоны частный масштаб длин будет $m = 1,0004$. Если взять проекцию Гаусса – Крюгера, то здесь максимальные искажения будут иметь место на краю зоны и составят 1:1250, а на осевом меридиане искажения равны нулю. Понятно, что для других широт линейные размеры зоны будут другими, и здесь необходимо искать другое значение m_0 . Можно отметить при этом, что наименьшее значение m_0 (или максимально отличающееся от единицы) будет на экваторе, где ширина координатной зоны цилиндрической проекции будет наибольшей.

В работе [4] приведена общая формула для расчета оптимального значения m_0 для любых проекций, при изображении любых по размеру и форме границ территорий, работающая и для проекции UTM.

$$m_0 = \frac{2}{1 + m_{\max}} \tag{1}$$

Используя эту формулу, можем получить значение m_0 для территории с любым значением средней широты, а также убеждаемся в том, что формула (1) работает не только для поперечно-цилиндрической, но и для любой другой проекции из класса, описанного в работе [4]. Применение проекции с предвычисленным значением m_0 по формуле (1) приводит к уменьшению максимальных искажений в два раза.

При работе с местными системами координат или объектами, расположенными в нескольких координатных зонах, требующих обработки в единой системе координат, возникает необходимость расчета параметров проекции для конкретного района работ, так как для большинства пользователей метод создания местных систем координат неизвестен. Рассмотрим частный случай на примере проекта спутниковых измерений, выполненных на реальном объекте, расположенном на территории Российской Федерации, схема которого приведена на рисунке 1. Отметим, что объект расположен в двух шестиградусных координатных зонах проекции Гаусса – Крюгера.

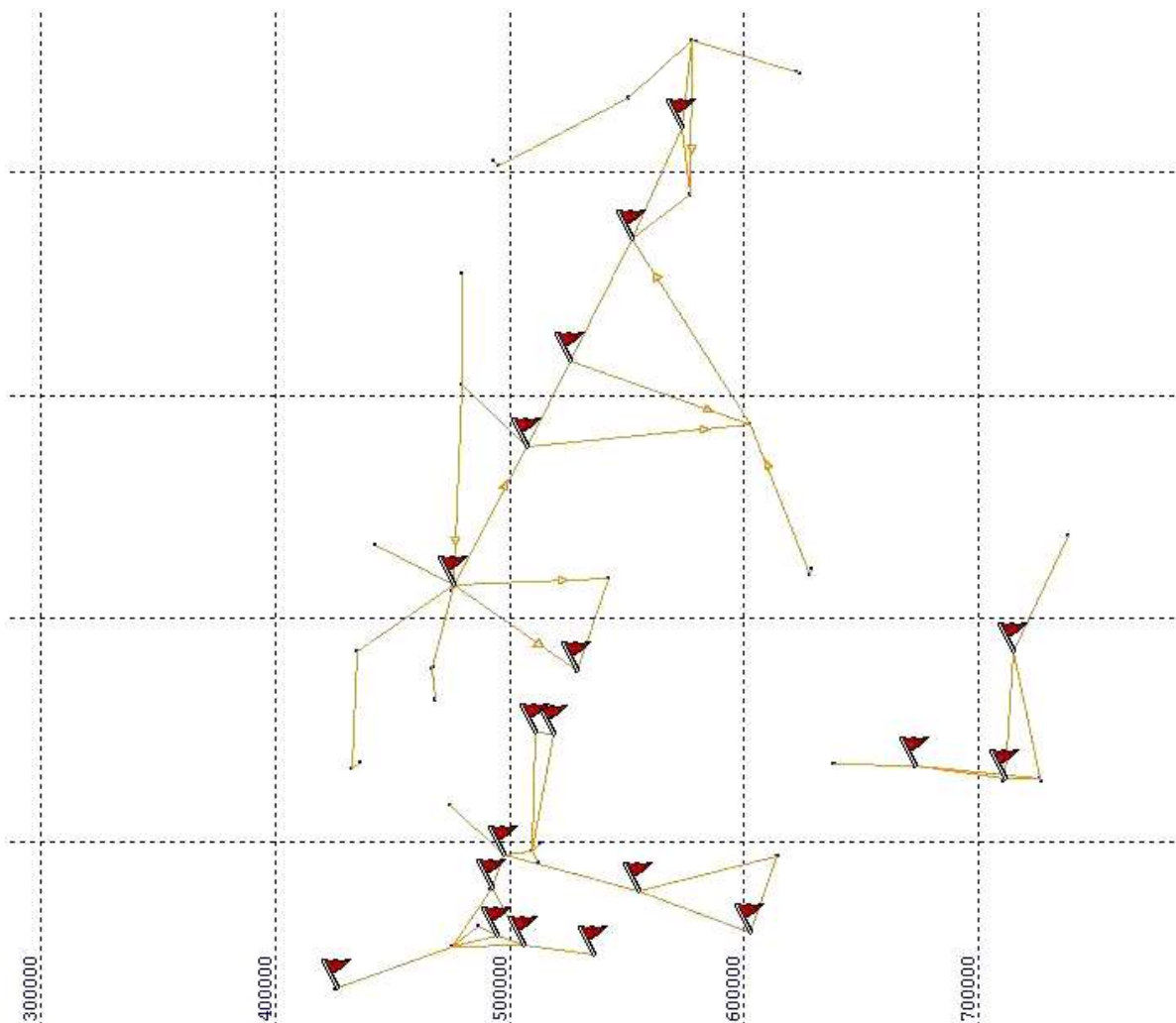


Рис. 1. Схема проекта спутниковых измерений, выполненных на реальном объекте

Здесь первоначально спутниковая сеть развивалась как свободная, исходным пунктом являлся пункт триангуляции Государственной геодезической сети (ГГС). На объекте имеется 19 базовых станций, приращения координат на которые определялись от исходного пункта дифференциальным методом с использованием двухчастотных спутниковых приемников с длительностью сеанса до 12 часов. Приращения координат на другие 55 пунктов сети определялись также двухчастотными приемниками с длительностью сеанса от 0,5 до 2,0 часов в зависимости от условий наблюдений. В процессе производства работ в спутниковую сеть, по возможности, включались существующие центры пунктов триангуляции ГГС. Далее производилось уравнивание с учетом координат девяти пунктов триангуляции в СК 42. По материалам уравнивания точность определения приращений координат базовых станций характеризовалась относительными СКО, не более 1:600 000, что при максимальных расстояниях между базовыми станциями, составляющих 110 000 м, дает абсолютную ошибку во взаимном положении, не более 0,18 м.

В стандартной номенклатуре топографических карт, на территории Российской Федерации, расположенной севернее 60° (к каковым относится данная территория), для удобства использования выпускаются сдвоенные трапеции карт и сдвоенные координатные зоны проекции Гаусса – Крюгера, ввиду того, что ширина зоны не превышает величины порядка 270 км. Вместе с тем это не снимает большинство проблем производственного характера. Большинство реальных объектов не ограничиваются протяженностью малой длины и не попадают в одну координатную зону, как это имеет место и на нашем объекте. Объект лежит в нескольких координатных пространствах, пусть даже описанных по одним формулам, кроме того, он содержит в себе ошибки отображения элементов эллипсоида на плоскости с разным знаком у точек, расположенных рядом, но в разных зонах. Методика создания условных систем координат в настоящее время не решает данной проблемы. Чаще всего локальные системы координат создаются параллельным переносом от существующих. Есть возможность перейти, к примеру, в систему координат 1963 года, ввиду того, что там идет смещение осевого меридиана, но это не гарантирует достаточной точности отображения.

В данном случае необходимо описывать проекцию вручную, так как координаты точек проекта выходят за пределы одной шестиградусной зоны. Таким образом, ошибки во взаимном положении исходных пунктов будут влиять на общую СКО положения определяемой рабочей точки проекта. Возможность аппаратного определения параметров проекции предоставляется, к примеру, программой GPSurvey, предшественнице программного продукта Trimble Geomatic Office [2]. Имея две наиболее удаленные точки с известными координатами в определенной проекции при конкретном значении долготы осевого меридиана, вводят значения этих координат, а программа подбирает параметры новой проекции. Частный масштаб длин на осевом меридиане получают как частное от деления длин геодезической линий в двух системах, которые являются функциями приращений координат двух заданных опорных точек:

$$m_0 = \frac{f(\Delta x_i; \Delta y_i)}{f(\Delta x_k; \Delta y_k)}, \quad (2)$$

Следует отметить, что такое решение задачи установления значения m_0 не может быть оптимальным потому, что координаты обеих точек имеют вполне определенные ошибки. Здесь лучшее решение можно получить, имея не две, а больше координированных точек, тогда можно получить вероятнейшее значение m_0 по методу наименьших квадратов.

Для рассматриваемого объекта получаем поперечно-цилиндрическую проекцию Меркатора, где $d\alpha$ – угловой коэффициент, который указывает угол между осевым меридианом и меридианом, проходящим через выбранную точку, обусловленный непараллельностью меридианов, принятых за осевые в различных системах. Не приводя подробно процесс расчета, приведем значения полученных величин:

$$B_0 - 60^\circ 42' 51,070230''; L_0 - 73^\circ 38' 03,590368''; X_0 - 6734471.11; Y_0 - 13425503.13;$$

$$dm - 0,999962232050; d\alpha - 1^\circ 11' 49,721143'',$$

где dm – изменение масштаба проекции; $d\alpha$ – изменение дирекционных углов (сближение осевого меридиана новой проекции относительно осевого меридиана ранее принятой). Здесь в принятых нами обозначениях имеем:

$$dm = m_0; d\alpha = \gamma_0.$$

Точность координат, полученных в постобработке с помощью GPS-измерений, зависит от многих факторов [3], в том числе и от того, насколько точно определены координаты базовой станции и наиболее подходящие параметры проекции.

Продemonстрируем порядок расчета параметров проекции, наиболее подходящей для данного района работ. Имея геодезические координаты, полученные относительно пункта ГГС, выбираем центральную точку проекции, широта которой B_0 вычисляется как среднее между широтой самой южной и самой северной точками проекта, а долгота L_0 соответственно между долготами крайних восточной и западной точек. Каталог крайних точек проекта приведен в таблице 1.

Таблица 1

Геодезические координаты пунктов, расположенных на границе проекта

B	L
64°31'23,92516" С	76°37'20,92565" В
62°27'52,87860" С	79°37'14,09272" В
60°42'51,04517" С	73°38'03.59883" В

Отсюда вычисляют средние значения (координаты центральной точки): $B_0=62°36'$; $L_0=76°37'$.

Исходя из рисунка 2 и имея некоторое представление о характере распределения искажений в геодезических проекциях, видно, что наиболее подходящей проекцией для данного проекта является поперечно-цилиндрическая, потому что объект вытянут с юга на север.

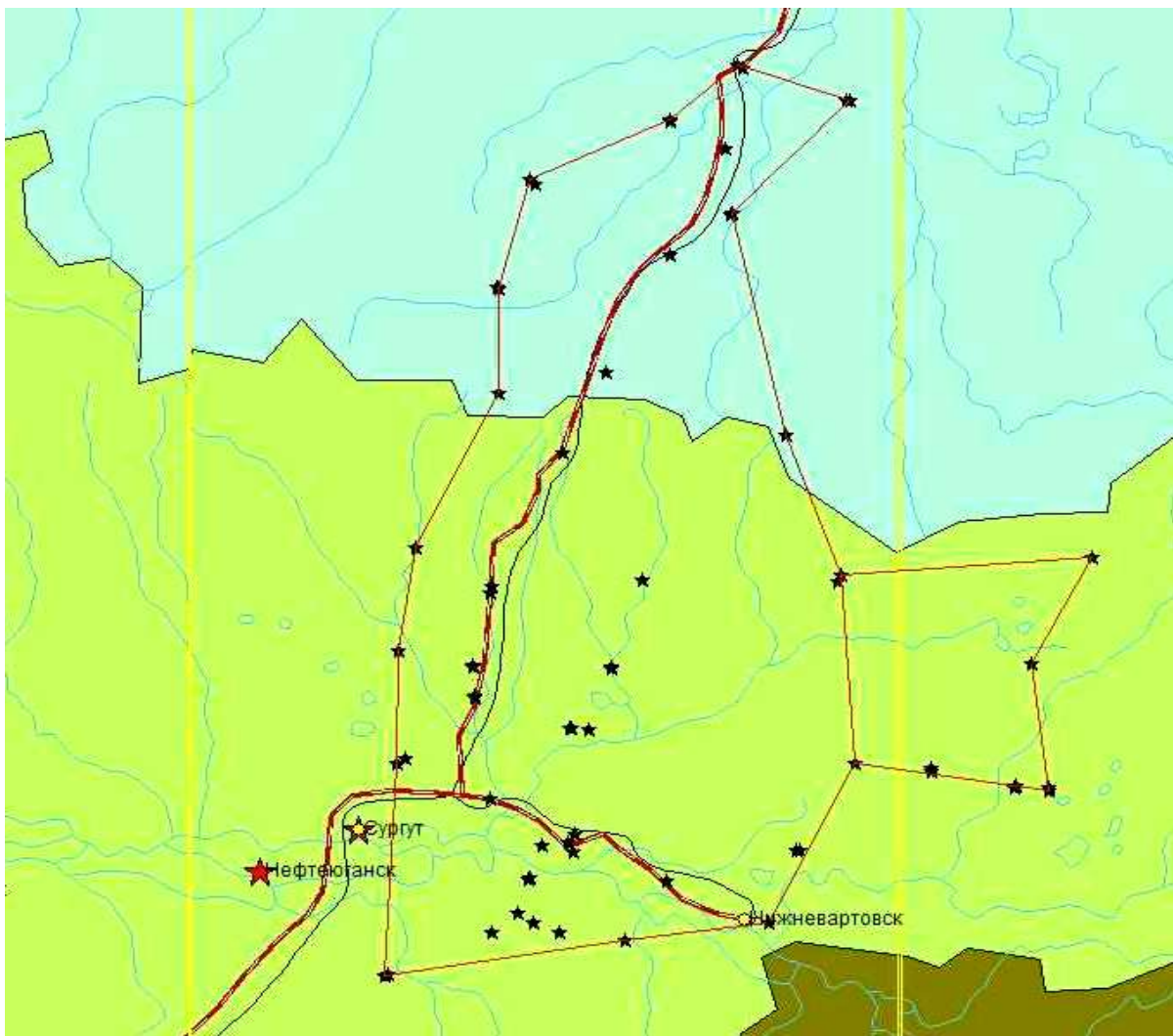


Рис. 2. Положение точек объекта на картографической подложке

В данном случае будем исходить из расчета, что необходимо оперировать только одной проекцией, а именно проекцией УТМ, частным случаем которой является проекция Гаусса – Крюгера, широко применяющаяся в Российской Федерации до настоящего времени. При этом будем варьировать значениями координат центральной точки проекции и частным масштабом длин на осевом меридиане.

Рассчитав частный масштаб длин для каждой точки предлагаемого проекта согласно общей теории описания геодезических проекций [4] и используя формулу (1), при заданном на осевом меридиане $m_0 = 1$, получаем новые значения масштаба для этих точек, приведенные в таблице 2.

Таблица 2

Значения частных масштабов длин для точек объекта в новой проекции при $m_0 = 1$

№	Масштаб	№	Масштаб	№	Масштаб	№	Масштаб	№	Масштаб
1	1,0000821	16	1,00007272	31	1,00028725	46	1,00003263	61	1,00024207
2	1,0000336	17	1,00006823	32	1,00006891	47	1,00032454	62	1,0000926
3	1,0001913	18	1,0001106	33	1,00000007	48	1,00005412	63	1,00020803
4	1,000294	19	1,00002436	34	1,00002385	49	1,00006654	64	1,00000966
5	1,0000094	20	1,00027498	35	1,00003863	50	1,00016761	65	1,00015317
6	1,0001694	21	1,00003817	36	1,00000513	51	1,00009701	66	1,00006895
7	1,0000003	22	1,0001424	37	1,00010691	52	1,0000683	67	1,0000001
8	1,0000096	23	1,00008614	38	1,00003802	53	1,00000005	68	1,00002118
9	1,0001269	24	1	39	1,00003422	54	1,00024102	69	1,00003862
10	1,00032	25	1,0001235	40	1,00019009	55	1,00011133	70	1,00002489
11	1,0000332	26	1,00024109	41	1,00029401	56	1,00002572	71	1,00006812
12	1,0000543	27	1,00009226	42	1,00000953	57	1,00027513	72	1,00001264
13	1,0001557	28	1,00020779	43	1,0001683	58	1,00014451	73	1,00024111
14	1,0001674	29	1,00000893	44	1,0002724	59	1,00009025	74	1,00012495
15	1,0000973	30	1,00000261	45	1,00000029	60	1,00012443		

Сравнивая новые значения с прежними, замечаем, что максимальное значение масштаба уменьшилось в два раза, что приводит к уменьшению искажений расстояний также примерно в два раза.

Конкретно для данного проекта имеем:

- максимальное значение масштаба $m_{max} = 1,00032454$;
- оптимальное значение масштаба, вычисленное по формуле (1), $m_0 = 0,99983776$.

Пересчитав все значения, обнаруживаем следующие значения:

- $m_{max} = 1,00016225$;
- $m_{min} = m_0 = 0,99983776$.

При этом величины искажений распространены более равномерно на территории объекта, что является принципиально важным для относительных координатных определений. Таким образом, мы имеем наибольшую для всего проекта относительную погрешность

$$\frac{\delta s}{s} = \frac{1}{1 - m_{max}} = \frac{1}{6163} \approx 0,000162.$$

Для сравнения получим результат m_{max} в поперечно-цилиндрической проекции при принятом стандартном значении $L_0 = 75^\circ 00' 00''$ в международной разграфке и значении $m_0 = 1,0000$.

Вычисленное $m_{max} = 1,00069516$, из чего следует, что относительная погрешность составляет 1:1438, что более чем в 4 раза по точности уступает приведенным выше результатам по оптимизации искажений. Такие показатели указывают на необходимость введения редуцированных поправок в измерения при их редуцировании на плоскость даже при последующем сгущении геодезической сети на территории проекта. При этом следует использовать точные формулы, что существенно усложняет обработку материалов измерений, а также усложняет применение координат для решения землеустроительных и кадастровых работ.

Значения частных масштабов длин для точек объекта в новой проекции при $m_0 = 0.99983776$ представлены в таблице 3.

Таблица 3

Значения частных масштабов длин для точек объекта в новой проекции при $m_0 = 0.99983776$

№	Масштаб	№	Масштаб	№	Масштаб	№	Масштаб	№	Масштаб
1	0,99991976	16	0,99990419	31	0,99987198	46	0,99987585	61	0,99983805
2	1,00015747	17	0,99993464	32	1,00002790	47	0,99997999	62	1,00000518
3	0,99987084	18	0,99990595	33	1,00013181	48	0,99992378	63	0,99983781
4	0,99989197	19	0,99994896	34	1,00007988	49	0,99983776	64	1,00007856
5	0,99999333	20	0,99984745	35	0,99993040	50	0,99996111	65	0,99986354
6	0,99993494	21	0,99999076	36	1,00004585	51	1,00012476	66	1,00011264
7	0,99991036	22	0,99990577	37	1,00007892	52	0,99990656	67	0,99998210
8	0,99990589	23	0,99985035	38	0,99984710	53	0,99983783	68	0,99992788
9	0,99994822	24	0,99996256	39	1,00000693	54	0,99986166	69	0,99996204
10	0,99984672	25	0,99987139	40	0,99983807	55	0,99987632	70	0,99990660
11	0,99984039	26	1,00002911	41	0,99984728	56	0,99984292	71	0,99983786
12	0,99994453	27	1,00013182	42	0,99996450	57	0,99987570	72	0,99985889
13	0,99987032	28	1,00007889	43	1,00000499	58	0,99984725	73	0,99987630
14	1,00016203	29	0,99993006	44	0,99986218	59	1,00000588	74	0,99986270
15	0,99989178	30	1,00004560	45	1,00011251	60	1,00010991		

На следующем этапе исследования произведен пересчет исходных координат в систему координат проекции с оптимальным масштабом и описание в программном продукте непосредственно параметров полученной проекции. Затем ввели в качестве исходных координаты, пересчитанные для проекции с оптимальным m_0 . Сделав расчет, получили координаты и их СКО для точек в новой проекции.

Результаты определения ошибок положения точек спутниковых измерений в проекции Гаусса – Крюгера и в оптимальной цилиндрической проекции приведены на рисунке 3, где по горизонтальной оси указаны номера точек проекта, а по вертикальной – СКО определения положения точек проекта в метрах.

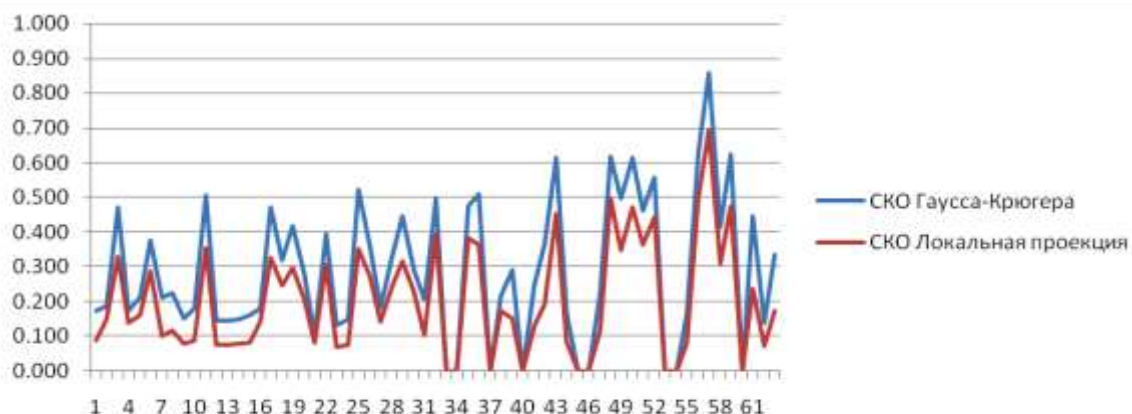


Рис. 3. Величины искажений при изображении точек объекта на плоскости проекций

Для сравнения значений частного масштаба длин в проекции Гаусса – Крюгера и в новой проекции показатели частного масштаба длин в каждой отображаемой точке двух проекций представлены для удобства визуализации в виде значений, вычисленных по формуле $|1 - m| \cdot 10^4$ (рис. 4).

В приведенных результатах работы видно, что при расчете параметров проекции стандартное аппаратное решение не позволяет в полной мере решить проблему минимизации погрешностей отображения геометрических элементов эллипсоида на плоскости.

Анализ показывает, что СКО определения положения точек на плоскости проекции содержат в себе как ошибки измерений, так и неучет поправок за их редуцирование на плоскость.

Применением новой проекции искажения геометрических величин эллипсоида при их редуцировании на плоскость проекции существенно уменьшились (в среднем по объекту на 34 %), и оставшиеся значения содержат ошибки измерений, а ошибки, вызванные редуцированием на плоскость измеренных величин, в новой проекции для большинства точек проекта пренебрегаемо малы.

Вообще говоря, в проекции, имеющей строгое математическое описание, имеются формулы для вычисления редуцированных поправок, но их введение тем сложнее, чем эти поправки больше, следовательно, и при высокоточных измерениях процесс их редуцирования на плоскость наилучшей проекции существенно упрощается.

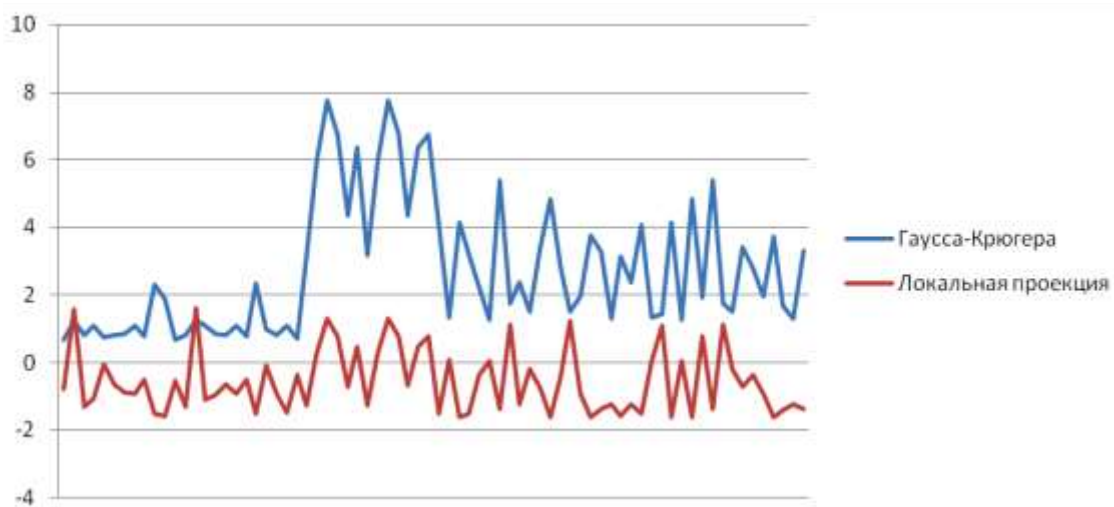


Рис. 4. Показатели частного масштаба длин

Особым пунктом следует отметить, что мы получили координаты в проекции, имеющей математическую связь со всеми общеизвестными проекциями, что без труда позволяет переходить от одной системы координат в другую. Также отметим, что при обработке наземных съемок крупных масштабов, когда необходимо учитывать поправки в длины линий, можно использовать простую формулу:

$$\Delta S = \frac{y_i^2}{2R^2} S. \tag{3}$$

На краю шестиградусной зоны проекции Гаусса – Крюгера они могут достигать до 4 м на 10 км хода. В нашем случае, когда используется наилучшая проекция, эти поправки значительно меньше, что упрощает процесс их учета, а на большей части территории объекта можно производить вычисления без процессов внесения поправок в длины линий.

Существенным моментом при анализе достоинств новых проекций, параметры которых определены по предлагаемой методике, является то, что поправки в угловые величины при их редуцировании на плоскость проекции остаются существенно менее значимыми (проекции конформны), по сравнению с поправками в линейные величины.

В спутниковых системах позиционирования, наиболее распространенных на производстве, реализован дифференциальный метод, когда определяются из пространственной засечки приращения координат. В этом случае минимизация линейных искажений приводит к повышению точности построения локальных геодезических построений, что имеет большое практическое значение, так как расширяет возможности применения баз картографо-геодезических данных для специальных целей.

Заключение. Применяя алгоритмический путь формирования координатной основы описания положения точек на плоскости в наилучшей проекции, мы решаем целый ряд принципиально значимых производственных задач:

- снимаются проблемы многозональности систем координат на территории объекта;
- при массовых работах нет необходимости внесения поправок за редуцирование измерений на плоскость;
- регламентируется доступ к картографо-геодезическим материалам ограниченного пользования путем формирования локальных систем координат методами, обеспечивающими при необходимости строгую математическую связь с другими системами координат, включая государственные;
- сохраняется точность натуральных геодезических измерений при их отображении на плоскости проекции;
- предоставляются возможности формирования проекций для обработки и использования прецизионных геодезических измерений;
- имеются возможности автоматизации процесса выбора и определения численных характеристик проекции, формирующей наиболее подходящие системы координат для конкретных условий;
- при минимизации искажений обеспечивается соответствие геометрических величин, вычисленных по координатам в проекции их натуральным значениям, что очень важно в земельно-информационных системах при подсчете площадей землепользований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Использование местных систем координат при обработке в программном комплексе Trimble Geomatic Office [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.dataplus.ru/ARCREV/Number_17/5_Coord.htm.
2. GPS Surveyors Field Guide – Trimble Navigation Ltd. – Sunnyvale, CA.
3. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.gps-guide.ru/page6.html>.
4. Подшивалов, В.П. Теоретические основы формирования координатной основы для геоинформационных систем / В.П. Подшивалов. – Новополоцк: ПГУ, 1998. – 125 с.

Поступила 04.10.2007