УДК 528.063

УРАВНИВАНИЕ НИВЕЛИРНЫХ СЕТЕЙ МЕТОДАМИ Lp-ОЦЕНОК И МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ЦЕЛЬЮ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОСАДОК СООРУЖЕНИЙ

Д.В. УСОВ
(Полоцкий государственный университет)

В результате действия различных внутренних и внешних сил инженерные сооружения подвержены деформациям как в плане, так и по высоте. Смещения сооружений в вертикальном и горизонтальном направлениях могут протекать равномерно и неравномерно. В последнем случае значительно возрастают требования к математической обработке результатов измерений с целью определения деформаций.

Геодезические сети, создающиеся на строительных площадках для наблюдений за вертикальными смещениями сооружений, как правило, имеют локальный характер, т.е. содержат ограниченное число пунктов и результатов измерений. В этом положении нельзя сказать, какому закону подчинены ошибки измерений, и часто характер распределения ошибок является отличным от нормального закона. Но в большинстве таких ситуаций традиционной остается обработка по методу наименьших квадратов, что является в ряде случаев малоэффективным. В статье предлагается для математической обработки результатов геодезических измерений применять многокритериальный метод уравнивания, в основу которого положен алгоритм Lp-оценок.

Введение. На строительных площадках и застроенных территориях геодезические сети носят локальный характер и все чаще создаются с помощью новых высокоточных геодезических приборов. В настоящее время произошло резкое увеличение количества измерительной информации и улучшение характеристик точности измерений в связи с автоматизацией измерительных процессов. Если количество измеренных величин в геодезических сетях достигает 300…500 единиц, то ошибки измерений подчиняются нормальному закону распределения Гаусса и обработка результатов измерений, как правило, выполняется по методу наименьших квадратов. Когда количество измерений не превосходит 50 или достигает нескольких тысяч, то начинают все более отчетливо проявляться негауссовы особенности ошибок. Это наиболее характерно для высокоточных наблюдений, когда при малом или большом числе измерений все отчетливее проявляются такие особенности уклонений действительных распределений ошибок от закона Гаусса, которые присущи данному прибору или методу измерений.

Методы обработки измерений, отличные от метода наименьших квадратов, более сложные и требуют большого объема вычислений. Однако в связи с развитием вычислительной техники, сейчас эта задача вполне решаема.

В статье рассматриваются методы уравнивания свободных и несвободных нивелирных сетей по алгоритму *Lp*-оценок и многокритериальному способу. Вместо того чтобы подразделять пункты высотной сети на стабильные и мобильные, обработка ведется по алгоритму уравнивания сетей без исходных пунктов [1].

Метод Гранта, Хебдона и Флетчера по уравниванию свободных и несвободных нивелирных сетей. Метод *Lp*-оценок все шире начинает применяться для уравнивания и оценки точности геодезических измерений. Данный метод, предложенный Грантом, Хебденом и Флетчером [2] для решения системы параметрических уравнений поправок при уравнивании несвободных нивелирных сетей, предполагает постановку условия, которое имеет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{N} P_i \left|v_i\right|^{n-2} v_i^2 \Rightarrow \min,\ n \geq 1, \tag{1}$$

где N – количество измерений; P – веса измерений; v – поправки в измеренные величины из уравнивания; n – показатель степени.

Заметим, что при n = 1,0 оценки параметров выполняют по методу наименьших модулей (МНМ); при n = 1,5 – по методу наименьших «полтора «; при n = 2,0 – по методу наименьших квадратов (МНК). Очевидно, что при условии $1{,}0 \leq n < 2{,}0$ разность $n-2$ отрицательна и, следовательно, при $v_i = 0{,}0$ необходимо поправке присвоить малую величину.

В методе *Lp*-оценок выражение (1) рассматривается как условие МНК, но с неизвестной весовой матрицей

$$C = P \cdot diag\left|v\right|^{n-2}. \tag{2}$$

Данную весовую матрицу для уравнивания нивелирных сетей можно получить, применяя следующий алгоритм решений, в зависимости от величины показателя степени *n* [3 – 5]:

1. Если *n* любое значение, то находят решение, используя метод наименьших квадратов (*n* = 2):

$$\begin{aligned} \delta H &= -(A^T PA)^{-1} A^T PL; \\ V &= A\delta H + L. \end{aligned} \tag{3}$$

2. Итеративный метод поиска решений применяют когда $1{,}0 \le n < 2{,}0$:

$$\delta H_j = -(A^T C_j A)^{-1} A^T C_j L\,; \tag{4}$$

$$V_j = A\delta H_j + L. \tag{5}$$

3. При $n > 2$ выполняют первоначальные вычисления по формулам:

$$\begin{aligned} G &= 1/(n-1); \\ \delta H_j &= (1-G)\delta H_{j-1} + G\delta\hat{H}_j; \\ \delta\hat{H}_j &= -(A^T C_j A)^{-1} A^T C_j L, \end{aligned} \tag{6}$$

а далее применяют равенства (5).

Для данного алгоритма нахождения весовой матрицы процесс итераций заканчивается в том случае, когда выполняется условие:

$$\varepsilon > \frac{\left\|\delta H_j - \delta H_{j-1}\right\|}{\left\|\delta H_j\right\|}, \tag{7}$$

где ε – малое наперед заданное число.

Окончательное решение находят, используя формулу:

$$\hat{H} = H_0 + \delta H\,. \tag{8}$$

Здесь H_0 – вектор предварительных координат, соответствующий L.

Для достижения наилучшего решения при заданной разрядной сетке ПК можно предложить другой алгоритм уравнивания, позволяющий находить минимум некоторой целевой функции.

В данной процедуре при минимизации избранной целевой функции каждый раз уточняются отметки:

$$\hat{H}_{j+1} = \hat{H}_j + \delta H_{j+1}\,, \tag{9}$$

и вектор поправок в приближенные отметки

$$\delta H_{j+1} = -(A^T C_j A)^{-1} A^T C_j L_j\,, \tag{10}$$

где

$$L_j = \varphi\left(\hat{H}_j\right) - T \tag{11}$$

вектор свободных членов параметрических уравнений.

Весовую матрицу получаем по формуле:

$$C_j = P \cdot diag\left|L_j\right|^{n-2}. \tag{12}$$

В данном случае H_0 – вектор начальных координат, попавший в область сходимости итераций (например, при $n = 2$) и уточняемый по (9) до тех пор, пока уменьшается значение целевой функции.

Если сравнивать два алгоритма нахождения весовой матрицы, то процедура (9)…(12) проще случая (3)…(8). Во втором алгоритме рабочие формулы не зависят от значений n, его отличает также простота критерия остановки итераций. Для этих целей вместо (7) можно использовать выражение:

$$\varepsilon > \max\left|\delta H_{j+1}\right| \tag{13}$$

или условие, когда вместо уменьшения критериальной функции $\Phi(H)$ начался процесс ее увеличения.

Иначе говоря, итерации продолжаются до тех пор, пока

$$\Phi(H_{j+1}) < \Phi(H_j). \tag{14}$$

В этом случае достигается наилучшее решение, не уступающее по точности первоначально рассмотренной процедуре и требующей меньшее число приближений.

Выше были рассмотрены алгоритмы метода Гранта, Хебдона и Флетчера при параметрическом способе уравнивания несвободных геодезических сетей.

Для свободных высотных сетей метод *Lp*-оценок рассмотрим на примере способа уравнивания геодезических сетей, предложенный Г.Г. Асташенковым. В данном способе псевдообратная матрица нормальных уравнений может быть получена по формуле [6]:

$$R^{+} = \left(R + I^T I\right)^{-1} - I^T I / t^2, \tag{15}$$

где $I = \left(1,\ 1,\ 1,\ ....,\ 1\right)_{1\times t}$; t – число параметров.

Произведение $I^T I$ при $t = 3$ равно

$$I^T I = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix} = ones(3).$$

Данный метод простой не только в вычислительном отношении, но и в реализации.

Так, матрицу *ones* можно не хранить, к коэффициентам матрицы $R = A^T CA$ прибавить единицу, обратить матрицу обычным путем и отнять от каждого полученного элемента число $1/t^2$.

Значение параметров и поправки в измеренные превышения можем получить по формулам:

$$\begin{aligned}\delta H &= -(A^T CA)^{+} A^T CL;\\ V &= A\delta H + L.\end{aligned} \tag{16}$$

На этапе уравнительных вычислений в большинстве случаев переход к различным методам уравнивания может быть осуществлен путем соответствующего выбора целевой функции без изменения алгоритма минимизации.

При нелинейном методе *Lp*-оценок для уравнивания геодезических сетей минимизируют целевую функцию

$$\Phi(H) = \sum_{i=1}^{N} P_i \left|L_i(H)\right|^{n_i}, \tag{17}$$

где $H = [H_1, H_2, \ldots, H_i]^T$ – вектор неизвестных координат определяемых пунктов; P_i – вес результата измерений; $L(H) = \varphi(H) - T$ – свободный член нелинейного параметрического уравнения, равный разности вычислительного значения измерения и результата измерения; N – количество измерений; n – показатель степени.

Заметим, что в обычном методе *Lp*-оценок показатель n является общим для всей целевой функции, но возможно для каждой $L_i(H)$ принимать свою индивидуальную степень (многостепенная оптимизация). В матричном виде выражение (17) можно представить в следующей форме:

$$\Phi(H) = \left(\left|L(H)\right|^{\frac{n}{2}}\right)^T P \left|L(H)\right|^{\frac{n}{2}}, \tag{18}$$

где P – диагональная матрица весов результатов измерений.

Для определения веса P воспользуемся формулой [4 – 7]:

$$\Delta_n^2 = \frac{\sigma^2}{c^2}, \tag{19}$$

где σ – стандарт измерения, а

$$c^2 = \frac{n^{\frac{2}{n}} \Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}. \tag{20}$$

Здесь используется Гамма функции.

Теперь, зная, что $\Delta_n = \frac{\sigma}{c}$, получим значение веса

$$P_i = \left(\frac{c}{\sigma_i}\right)^n. \tag{21}$$

Поскольку веса P_i относительны, то в качестве c можно брать любую константу.

Значение веса измерения, входящего в (17), например, при $c = 1$, будет равно

$$P_i = (1/\sigma_i)^n, \tag{22}$$

что приведет даже при уравнивании линейно-угловых сетей к тем же результатам, что и с использованием формул (20) и (21).

В условиях же многокритериальной оптимизации [8], когда для каждого измерения или для группы измерений отыскивается своя степень n_i, вместо (22) необходимо использовать формулу:

$$P_i = \left(\frac{c_i}{\sigma_i}\right)^{n_i} \tag{23}$$

с применением равенства (20), поскольку постоянно c_i для каждого измерения будет индивидуальной.

При уравнивании нивелирных сетей обычно применяют веса превышений в виде $P' = c/K$ или $P' = c/L_{км}$, где c – произвольная постоянная; K – число станций нивелирования в ходе; $L_{км}$ – длина хода в километрах.

Но и формула (22) необходима для нивелирования.

Для этого вычисляют

$$\sigma_i = \frac{\sigma_0}{\sqrt{P_i'}}, \tag{24}$$

где σ_0 – стандарт превышения, для которого $P' = 1$.

Минимизацию функции (17) можно выполнить любым методом нелинейного программирования [9], например, методом Ньютона.

Новые методы уравнивания нивелирных сетей без исходных пунктов по алгоритму Lp-оценок. Применение метода *Lp*-оценок позволяет уравнивать геодезические нивелирные сети без исходных пунктов и получать уравненные высоты определяемых пунктов с точностью, соответствующей точности определения параметров.

В данном разделе статьи будут приведены ***два новых способа уравнивания нуль-свободных нивелирных сетей с применением метода Lp-оценок***.

1. Получение отметок сети относительно средней плоскости новым методом по алгоритму Lp-оценок

Рассмотрим формулы метода [10]:

$$
\begin{aligned}
&H_j^{ср} = H_j^{ур} - \frac{\sum_{i=1}^{t} H_j^{ур}}{t};\\
&H^{ур} = H_0 - FL;\\
&F = \left(S^T C S\right)^{-1} S^T C;\\
&Q = fC^{-1} f^T;\\
&f = \frac{\left(H^{ср}\right)_\delta - H^{ср}}{\delta},
\end{aligned}
\tag{25}
$$

где H_0 – предварительные отметки определяемых пунктов, найденные по неуравненным превышениям; F – расширенная псевдообратная матрица; S – матрица A без столбца для одного исходного пункта; C – весовая матрица, вычисляемая по формуле (12); Q – обратная матрица весов; f – расширенная псевдообратная матрица, найденная численным методом [11].

2. Уравнивание нивелирной сети по алгоритму Lp-оценок без исходных пунктов новым способом с учетом координат исходных пунктов.

Данный новый метод позволяет производить выбор начальных координат пунктов, с последующим нахождением однозначного решения при уравнивании нуль-свободных геодезических сетей, используя алгоритм *Lp*-оценок.

Формулы метода имеют следующий вид [10, 12]:

$$
\begin{aligned}
&H_j^{ур} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(H_j^{i\text{-тый}}\right)}{n};\\
&\left(H^{i-тый}\right)_n^{ур} = H_0 + \delta H_n;\\
&F_n = \left(S_n^T C S_n\right)^{-1} S_n^T C;\\
&Q = fP^{-1} f^T;\\
&f = \frac{\left(H^{ур}\right)_\delta - H^{ур}}{\delta}.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Данными методами следует пользоваться для анализа осадок сооружений из уравнивания эпох наблюдений, когда характер распределения ошибок отличный от нормального закона распределения.

Многокритериальное уравнивание нуль-свободных нивелирных сетей. В процессе многокритериальной оптимизации выполняют минимизацию двух функций:

$$
\Phi_1(H) = \left(\left|L(H)\right|^{\frac{n_i}{2}}\right)^T P \left|L(H)\right|^{\frac{n_i}{2}};
\tag{27}
$$

$$
\Phi_2(H, n) = \max(M),
\tag{28}
$$

где M – ошибка положения репера в слабом месте из уравнивания.

Объединение целевых функций осуществляется подбором степени n таким образом, чтобы Φ_1 и Φ_2 были минимальны. В данном случае применяют метод релаксации, выполняя оценку точности при различных n с шагом 0,1 следующим путем:

$$n-0{,}1; \qquad n; \qquad n+0{,}1;$$

$$\max(M_1);\ \max(M_2);\ \max(M_3).$$

Запоминают ту степень, которая для данного измерения N_i дает меньшее значение функции Φ_2. Затем переходят к следующему измерению, находя нужную степень, и т.д.

Например, при $N = 10$ оценку точности в одном приближении выполняют $3 \cdot 10 = 30$ раз.

Количество приближений не должно превосходить 20 итераций, следовательно, при $N = 10$ количество применения формул

$$Q = FP_n^{-1}F^T; \tag{29}$$

$$F = (A^T C_j A)^+ A^T C_j; \tag{30}$$

$$C_i = P \cdot diag\left|L_i\right|^{n_i-2} \tag{31}$$

будет выполняться 30·20 = 600 раз, что на Pentium-II занимает 10 с машинного времени.

Числовые примеры. Практическую реализацию алгоритмов уравнивания рассмотрим на примере свободной нивелирной сети с одним исходным и с пятью определяемыми пунктами (рисунок).

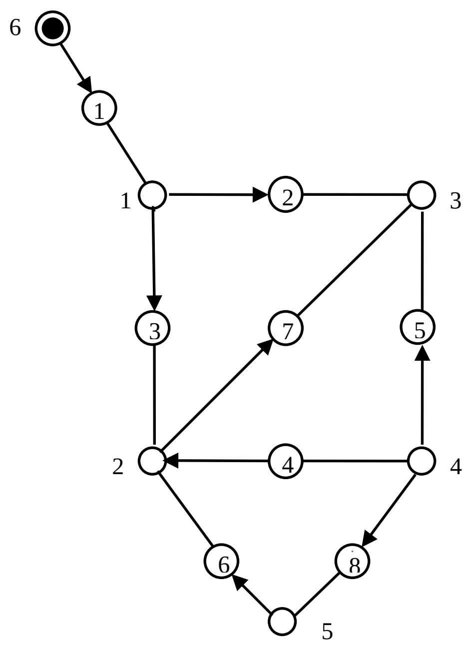

Схема свободной нивелирной сети

Исходная информация для уравнивания нивелирной сети представлена в таблице 1.

В таблице 2 приведены результаты уравнивания нивелирной сети.

Таблица 1

Результаты измерений (h), веса (P) и степени (n) для свободной сети

№	Начальный пункт	Конечный пункт	h, м	P (длина хода в км)	n многокритериальное
1	6	1	6,125	12,6	3,10
2	1	3	8,320	16,4	2,50
3	1	2	1,368	10,0	2,40
4	4	2	4,694	16,3	2,06
5	4	3	11,652	20,4	1,74
6	5	2	-0,905	12,0	2,00
7	2	3	6,944	13,2	1,82
8	4	5	5,858	15,4	1,85

Таблица 2

Результаты обработки свободной нивелирной сети по программам NIWA2 и kemniwmm

№	n = 1,0		n = 1,5		n = 2,01		n = 2,5		n = 3,0		Многокритериальный метод	
	ΔH, мм	ΔH, мм	ΔH, мм	ΔH, мм	H, м	ΔH, мм	ΔH, мм	ΔH, мм	ΔH, мм	ΔH, мм	ΔH, мм	ΔH, мм
	свободная сеть											
1	0,0	9,5	0,0	7,6	189,6310	7,4	0,0	15,1	0,0	18,2	0,0	0,0
2	–0,6	13,0	–0,3	9,8	190,9996	9,3	–0,2	18,9	–0,6	23,4	0,1	1,7
3	1,0	13,8	–0,7	10,0	197,9500	9,7	0,4	20,0	1,0	28,1	–0,4	2,5
4	–1,6	16,4	–0,9	11,4	186,3066	10,6	–0,4	22,1	–1,6	31,7	–0,7	3,4
5	5,1	16,0	–0,1	11,4	191,8989	10,9	3,9	22,9	5,1	29,2	–0,8	3,5
6	0,0	0,0	0,0	0,0	183,5060	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
алгоритм уравнивания относительно средней плоскости по формулам (25)												
1	–0,6	6,7	0,2	5,2	–0,4177	4,9	–0,6	5,3	–0,6	5,8	0,0	3,7
2	–1,2	6,7	–0,1	4,6	0,9509	4,1	–0,8	4,4	–1,2	5,7	0,0	2,9
3	0,4	12,1	0,5	6,1	7,9013	5,3	–0,2	6,0	0,4	11,4	0,0	5,1
4	–5,2	12,1	–0,7	6,8	–3,7421	5,8	–1,0	6,9	–2,2	11,6	0,0	5,9
5	4,5	11,5	0,1	6,8	1,8502	6,4	3,3	7,7	4,5	10,1	0,0	7,7
6	–0,6	11,6	0,2	9,2	–6,5427	8,9	–0,6	9,5	–0,6	10,4	0,0	3,8
	алгоритм уравнивания без исходных пунктов с учетом отметок исходных пунктов по формулам (26)											
1	0,0	11,6	0,0	9,3	189,6310	9,1	0,0	9,7	0,0	10,5	0,0	1,2
2	–0,6	15,9	–0,3	12,0	190,9996	11,4	–0,2	12,1	–0,6	13,6	0,0	5,4
3	1,0	16,9	–0,7	12,3	197,9500	11,8	0,4	12,8	1,0	16,3	0,0	7,1
4	–1,6	20,1	–0,9	14,0	186,3066	12,9	–0,4	14,2	–1,6	18,4	–0,1	9,5
5	5,1	19,6	–0,1	14,0	191,8989	13,3	3,9	14,7	5,1	17,0	0,0	8,6
6	0,0	0,0	0,0	0,0	183,5060	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

По данным таблицы 2 можно сделать следующие **выводы:**

1. При n = 1,0; n = 1,5; n = 2,5; n = 3,0 величины оценки точности ΔH для всех видов сетей в данном примере больше, чем для n = 2,01. Однако есть примеры, когда $(M_H)_n < (M_H)_{n=2.01}$.

Степень n = 2,01 выбрана потому, чтобы нелинейные методы при отсутствии исходных пунктов не давали деление на ноль, как это происходит при n = 2,0.

2. Разности отметок $\Delta H = H_{n\neq 2.01} - H_{n=2.01}$ максимальны на границах при n = 1,0 и n = 3,0.

3. Алгоритм уравнивания относительно средней плоскости нельзя применять при уравнивании спутниковых GPS-сетей.

4. В процессе исследований новый метод уравнивания без исходных пунктов с учетом отметок исходных пунктов по формулам (26) был многократно проверен. В итоге метод дает новые результаты при числе исходных пунктов 2 и более чем при числе исходных пунктов, равном 1 (свободная нивелирная сеть). В последнем случае новый способ дает другую оценку точности относительно данного исходного репера.

5. Линейный метод многокритериальной оптимизации (формулы (27) и (28)) нами апробирован только для свободной сети. Для двух последних алгоритмов уравнивания был применен нелинейный метод Ньютона, реализованный по программам NIWA3 и NIWA4, для которых исходная информация такая же, как и к программе NIWA2. Отметим, что линейный многокритериальный метод для свободной нивелирной сети дает оценку точности меньше почти в 3 раза по сравнению с методом наименьших квадратов, однако уравненные отметки практически не изменяются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Усов, Д.В. Методы уравнивания нивелирных сетей без исходных пунктов / Д.В. Усов // Вестн. Полоцк. гос. ун-та. Сер. В. Прикладные науки. – 2006. – № 9. – С. 105 – 113.
2. Fletcher, R. The calculation of linear best Lp-approximations / R. Fletcher, I.A. Grant, M.D. Hebden // Computer Jaurnal. – 1971. – V. 14, № 3. – С. 277 – 279.
3. Мещеряков, Г.А. Об уравнивании геодезических измерений с учетом закона распределения ошибок / Г.А. Мещеряков, С.Д. Волжанин, В.В. Киричук // Геодезия и картография. – 1984. – № 2. – С. 9 – 11.
4. Маркузе, Ю.И. Геодезия. Вычисление и уравнивание геодезических сетей: справ. пособие / Ю.И. Маркузе, Е.Г. Бойко, В.В. Голубев. – М.: Картгеоцентр – Геодезиздат, 1994.– 431 с.
5. Волжанин, С.Д. Уравнивание геодезических сетей методом Lp-оценок / С.Д. Волжанин // Геодезия, картография и аэросъемка. – Львов, 1984. – Вып. 40. – С. 20 – 23.
6. Мизина Г.И. Комплексное исследование результатов уравнивания свободных нивелирных сетей специального назначения: автореф. дис. … канд. техн. наук / Г.И. Мизина. – Новосибирск, 1993. – 19 с.
7. Джунь, И.В. Теория веса геодезического измерения, основанная на принципе правдоподобия / И.В. Джунь // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. – Львов, 1988. – Вып. 47. – С. 9 – 13.
8. Мицкевич, В.И. Применение метода релаксации при многокритериальном уравнивании и оценке точности геодезических сетей / В.И. Мицкевич, П.М. Левданский; Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк,1999. – 4 с. – Деп. в ОНИПР ЦНИИГАиК 28.06.99. – № 680. – ГД. 99.
9. Химмельблау, Д.М. Прикладное нелинейное программирование / Д.М. Химмельблау; пер. с англ. – М.: Мир, 1975. – 534 с.
10. Мицкевич, В.И. О вычислении начальных координат пунктов для последующего уравнивания нуль-свободных сетей / В.И. Мицкевич, П.М. Левданский, В.Г. Стержанов // Автоматизированные технологии изысканий и проектирования. – 2001. – № 2(4). – С. 35 – 36.
11. Андреев, Ю.П. Вычисление оценок точности методом моделирования ошибок / Ю.П. Андреев // Геодезия и картография. – 1971. – № 11. – С. 20 – 24.
12. Левданский, П.М. Уравнивание и оценка точности нуль-свободных сетей нивелирования и GPS-построений, минуя регуляризацию / П.М. Левданский, Н.С. Сырова, А.П. Присяжнюк // Автоматизированные технологии изысканий и проектирования. – 2001. – № 3(5). – С. 22 – 23.

Поступила 15.10.2007