УДК 528.063

ОСНОВЫ ЛИНЕАРИЗОВАННОГО МЕТОДА МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

канд. техн. наук В.В. ЯЛТЫХОВ, Н.С. СЫРОВА, С.Г. ШНИТКО
(Полоцкий государственный университет),
канд. техн. наук П.М. ЛЕВДАНСКИЙ
(ООО «Легром», Минск)

В геодезической литературе неоднократно приводились примеры геодезических измерений, в результате анализа которых был установлен характер распределения ошибок, отличный от нормального. Поэтому при математической обработке результатов измерений имеет смысл сначала установить закон распределения ошибок по результатам измерений, а затем соответственно выбирать корректные методы уравнивания. В опубликованной литературе достаточно часто приводятся примеры неклассических способов уравнивания геодезических измерений. Одним из таких способов обработки измерений является метод Lp-оценок. Этот метод в рамках единого алгоритма обобщает метод наименьших квадратов (n = 2), метод наименьших модулей (МНМ) (n = 1), чебышевского минимакса (n = ∞) и ряд других, соответствующих значениям $1 < n < \infty$.

Недостаток метода Lp-оценок заключается в постоянстве показателя степени n для всех разнородных результатов измерений. Для того чтобы в полигонометрии для углов применить одну степень, а для сторон – другую, предлагается многостепенная целевая функция. Формула для веса результатов измерений в многостепенном случае получена согласно исследованиям С.Д. Волжанина, И.В. Джуня, Ю.И. Маркузе и др. Минимизацию критериальной функции ранее осуществляли нелинейным методом Ньютона, хотя возможно применение других методов нелинейного программирования. Если степени n_j определены не средствами математической статистики, а под условием минимума максимальной ошибки положения пункта в слабом месте, то получим многокритериальную оптимизацию, так как в поиске решения участвуют два критерия. Чтобы воспользоваться этой формулой, необходимо уметь выполнять оценку точности результатов уравнивания при различных n.

В статье предложены основные формулы параметрического и коррелатного метода многокритериальной оптимизации.

Введение. В теории ошибок результатов измерений рассматривается вопрос математической обработки многократных наблюдений одной и той же величины. Эта задача является частным случаем совместной обработки совокупности результатов измерений многих величин, например, длин сторон и углов в плановых сетях или превышений в нивелирных построениях.

Оценки метода наименьших квадратов (МНК) оптимальны в классе всех линейных несмещенных оценок, только если ошибки результатов измерений подчинены нормальному закону распределения. Эффективность оценок МНК резко падает даже при небольших отклонениях от нормальности.

Если в целевой функции используется только одно значение степени n, устанавливаемое в зависимости от закона распределения погрешностей результатов измерений, то имеем известный метод *Lp*-оценок. Но на практике на одном геодезическом объекте часто встречаются разнородные измерения, например, при развитии линейно-угловых сетей. В этих случаях требуется до уравнивания определить и использовать разные степени n для каждой группы измерений. Очевидно, что алгоритм минимизации многостепенной целевой функции не должен зависеть от количества групп измерений со степенями n_i, включая предельный случай N групп (для каждого из N измерений своя степень). При этом чем меньше количество результатов измерений в группе, тем меньше надежность установления n, которые в таких случаях могут выбираться априорно или другим путем – на основе метода многостепенной многокритериальной оптимизации под условием минимума дополнительного критерия.

В процессе многокритериальной оптимизации используется векторный, а не один скалярный показатель эффективности решения. В геодезической практике этот новый подход может применяться не взамен прежним технологиям, а в дополнение к ним. Ниже показано, что несколько критериев оптимальности решения можно применять не только в алгоритмах уравнивания *Lp*-оценок, но и в рамках метода наименьших квадратов при проектировании оптимального плана наблюдений и в математической обработке результатов геодезических измерений [1].

Вывод формулы для вычисления весов результатов измерений при многостепенной оптимизации. В случае многостепенной оптимизации в [2] предлагается использовать целевую функцию

$$\Phi(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{P}_i \left| L_i(\mathrm{X}) \right|^{n_i}, \tag{1}$$

где N – количество результатов измерений; P – веса результатов измерений, вычисляемые по формуле: $P_i = c / \sigma_i^{n_i}$; $L(X)$ – свободный член нелинейного параметрического уравнения; n – показатель степени.

Для минимизации функции (1) применим метод Ньютона:

$$\mathrm{X}^{(j+1)} = \mathrm{X}^{(j)} - \mathrm{H}^{-1}\left(\mathrm{X}^{(j)}\right)\nabla\Phi\left(\mathrm{X}^{(j)}\right), \tag{2}$$

где $\mathrm{H}\left(\mathrm{X}^{(j)}\right)$ – матрица Гессе вторых частных производных целевой функции по параметрам; $\nabla\Phi\left(\mathrm{X}^{(j)}\right)$ – градиент целевой функции; j – номер итерации.

Найдем аналитические выражения для этих матриц применительно к целевой функции (1). В дальнейшем будем дифференцировать функцию вида $y = |\mathrm{X}|^n$, применяя формулу: $y' = n \cdot Sign(\mathrm{X})|\mathrm{X}|^{n-1}$, где $Sign(\mathrm{X})$ – функция передачи знака (или единица со знаком переменной X).

Чтобы найти $\partial\Phi/\partial x$ запишем равенство (1) в виде:

$$\Phi(\mathrm{X}) = \mathrm{P}_1\left|L_1(\mathrm{X})\right|^{n_1} + \mathrm{P}_2\left|L_2(\mathrm{X})\right|^{n_2} + \ldots + \mathrm{P}_N\left|L_N(\mathrm{X})\right|^{n_N}, \tag{3}$$

Следовательно, при $\mathrm{X} = [\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots \mathrm{X}_t]^{\mathrm{T}}$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\mathrm{X}_1} = n_1 Sign(L_1)\left|L_1(\mathrm{X})\right|^{n_1-1} a_{11}\mathrm{P}_1 + n_2 Sign(L_2)\left|L_2(\mathrm{X})\right|^{n_2-1} a_{21}\mathrm{P}_2 + \ldots + n_N Sign(L_N)\left|L_N(\mathrm{X})\right|^{n_N-1} a_{N1}\mathrm{P}_N, \tag{4}$$

где $a_{ij} = \partial L_i(\mathrm{X})/\partial x_j$ – коэффициенты параметрических уравнений поправок.

Отсюда градиент целевой функции

$$\nabla\Phi(\mathrm{X}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\Phi}{\partial\mathrm{X}_1} \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial\mathrm{X}_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial\mathrm{X}_t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{N} n_i S_i \left|L_i(\mathrm{X})\right|^{n_i-1} a_{i1}\mathrm{P}_i \\ \sum\limits_{i=1}^{N} n_i S_i \left|L_i(\mathrm{X})\right|^{n_i-1} a_{i2}\mathrm{P}_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum\limits_{i=1}^{N} n_i S_i \left|L_i(\mathrm{X})\right|^{n_i-1} a_{it}\mathrm{P}_i \end{bmatrix}, \tag{5}$$

где $S_i = Sign\,(L_i)$.

Выражение (5) можно записать в матричном виде:

$$\nabla\Phi(\mathrm{X}) = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{K}L(\mathrm{X}), \tag{6}$$

где $\mathrm{K} = \mathrm{diag}\,(\mathrm{K}_i)$,

$$\mathrm{K}_i = n_i\mathrm{P}_i\left|L_i(\mathrm{X})\right|^{n_i-2}. \tag{7}$$

В этом равенстве применена степень $n = 2$, поскольку для всех $L_i(\mathrm{X}) \neq 0$

$$\frac{Sign(L_i)\left|L_i(\mathrm{X})\right|^{n-1}}{L_i(\mathrm{X})} = \left|L_i(\mathrm{X})\right|^{n_i-2}. \tag{8}$$

Найдем вторые производные от целевой функции, дифференцируя (4);

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\mathrm{X}_1^2} = n_1(n_1-1)Sign(L_1)Sign(L_1)\left|L_1(\mathrm{X})\right|^{n_1-2} a_{11}\cdot a_{11}\mathrm{P}_1 + n_2(n_2-1)Sign(L_2)Sign(L_2)\left|L_2(\mathrm{X})\right|^{n_2-2} a_{21}\cdot a_{21}\mathrm{P}_2 + \ldots$$

$$\ldots + n_N(n_N-1)Sign(L_N)Sign(L_N)\left|L_N(\mathrm{X})\right|^{n_N-2} a_{N1}\cdot a_{N1}\mathrm{P}_N; \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\mathrm{X}_1^2} = n_1(n_1-1)\left|L_1(\mathrm{X})\right|^{n_1-2} a_{11}^2\mathrm{P}_1 + n_2(n_2-1)(L_2)\left|L_2(\mathrm{X})\right|^{n_2-2} a_{21}^2\mathrm{P}_2 + \ldots$$

$$\ldots + n_N(n_N-1)\left|L_N(\mathrm{X})\right|^{n_N-2} a_{N1}^2\mathrm{P}_N = \sum_{i=1}^{N} n_i(n_i-1)\left|L_i(\mathrm{X})\right|^{n_i-2} a_{i1}^2\mathrm{P}_i.$$

Найдем

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X_1 \partial X_t} = n_1\left(n_1 - 1\right)\left|L_1\left(X\right)\right|^{n_1-2} a_{11}a_{1t}P_1 + ... + n_N\left(n_N - 1\right)\left|L_N\left(X\right)\right|^{n_N-2} a_{N1}a_{Nt}P_N = \tag{10}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} n_i\left(n_i - 1\right)\left|L_i\left(X\right)\right|^{n_i-2} a_{i1}a_{it}P_i.$$

Отсюда

$$H(X) = A^TCA, \tag{11}$$

где

$$C = diag(C_i).$$

Здесь

$$C_i = n_i\left(n_i - 1\right)P_i\left|L_i\left(X\right)\right|^{n_i-2}. \tag{12}$$

Таким образом, для целевой функции (1) вместо (2) получим:

$$X^{(j+1)} = X^{(j)} - \left(A^TCA\right)^{-1} A^TKL\left(X\right), \tag{13}$$

или

$$X^{(j+1)} = X^{(j)} - \left(A^TCA\right)^{-1} A^T diag\left(\frac{1}{n_i - 1}\right) CL\left(X\right). \tag{14}$$

Матрица C является весовой матрицей при многостепенной оптимизации, а формула (14) позволяет выполнять эту оптимизацию аналитически.

Поиск управляющей целевой функции при использовании многокритериального параметрического способа уравнивания. Как известно, в методе многокритериальной оптимизации (МК) используется две целевых функции [2]:

$$\Phi_1\left(X\right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{m_i^{n_i}}\left|L_i\left(X\right)\right|^{n_i}, \tag{15}$$

$$\Phi_2\left(X, n\right) = \min\max M_K, \tag{16}$$

или

$$\Phi_2\left(X, n\right) = \min\sum M^2,$$

или

$$\Phi_2\left(X, n\right) = \min\max M \cdot \mu$$

в которых N – число измеренных величин; m – С.К.О. измерения, полученная по МНК; n – показатель степени, отыскиваемый в процессе итераций; $L(X) = T^{выч.} - T^{изм.}$ – свободный член измерения; $M_K = \mu\sqrt{Q_{K,K} + Q_{K+1,K+1}}$ – ошибка положения пункта;

$$\mu_{МК} = \sqrt{\frac{V_{MK}^T diag\left(\frac{1}{m_i}\right)^{n_i} V_{МК}}{r}}, \tag{17}$$

$$V_{МК} = T_{MK}^{урав} - T^{изм}, \tag{18}$$

r – количество избыточных измерений.

Минимум функции (15) находят как нелинейным, так и линейным методом:

$$X_{МК}^{(j+1)} = X_{МК}^{(j)} - \left(A^TCA)^{-1} A^T diag\left(\frac{1}{n_i - 1}\right) CL(X^{(j)}\right), \tag{19}$$

или

$$\delta X^{(j)} = -F diag\left(\frac{1}{n_i - 1}\right) L(X^{(j)}), \tag{20}$$

$$C_i = n_i\,(n_i - 1)\,diag\left(\frac{1}{m_i}\right)^{n_i}\left(\left|V_i(X)\right| + 10^{-6}\right)^{n_i - 2}, \tag{21}$$

а обратная матрица весов

$$Q = Fdiag\left(m_i^{n_i}\right)F^T \tag{22}$$

используется при оценке точности функций измеренных и уравненных величин, включая M.

В статье приводятся значения

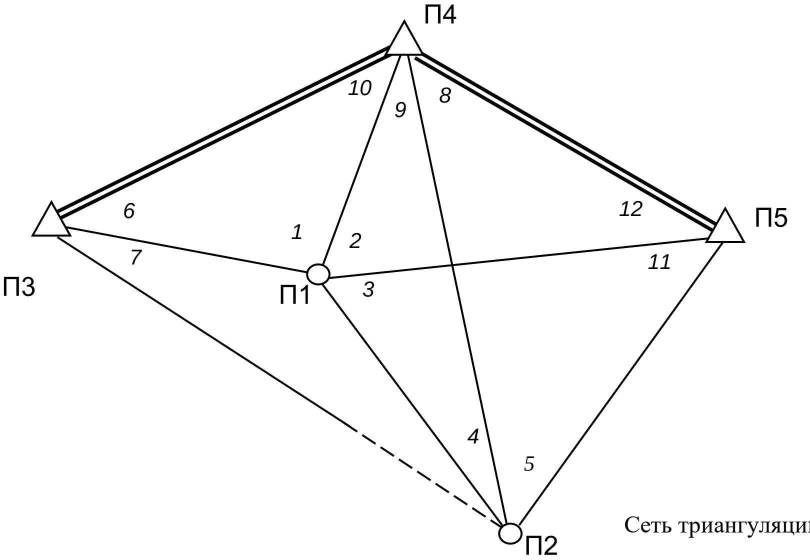
$$\mu_{\text{М}H\text{К}} = \sqrt{\frac{V^{\text{T}}_{\text{М}H\text{К}}\,diag\left(\frac{1}{\sigma_i}\right)^2 V_{\text{М}H\text{К}}}{r}}\,; \tag{23}$$

$\mu_{\text{МК}}$, вычисленные по формуле (17) и ошибки положения, из равенства (22) для МК и выражений:

$$Q = \left(A^T diag\left(\frac{1}{\sigma_i}\right)^2 A\right)^{-1}, \tag{24}$$

$$X^{(j+1)}_{\text{МНК}} = X^{(j)}_{\text{МНК}} - F_{МНК}L_{МНК};\; F_{МНК} = QA^T P; \tag{25}$$

для МНК. В формулах (19) и (24) A – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок.



Сеть триангуляции из [3, с. 160]

Метод МК особенно эффективен при обработке линейно-угловых сетей с завышенным значением числа обусловленности матрицы R с использованием $Q = R^{-1}$.

В таблице 1 приведены расчеты по многокритериальной оптимизации с различными тремя управляющими целевыми функциями (16) для сети триангуляции, приведенной на рисунке. По результатам уравнивания видно, что возможно применение первой из трех управляющих функций.

Таблица 1

Обработка триангуляции из [3, с. 160]

Обозначения	n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \min \quad \max M$		$\Phi_2(X, n) = \min \sum_{i=1}^{K} M^2$		$\Phi_2(X, n) = \min \quad \max M \cdot \mu$	
		n	данные	n	данные	n	данные
1	2	3	4	5	6	7	8
μ	0,980		0,957		0,963		0,960
M_1	0,080 м		0,075 м		0,073 м		0,078 м
M_2	0,102		0,090		0,090		0,093
V_1	1,14″	2,08	1,30″	1,96	1,40″	2,08	1,34″
V_2	0,94	1,95	0,92	1,88	0,89	1,80	0,90

Окончание таблицы 1

1	2	3	4	5	6	7	8
V_3	– 0,70	1,84	– 0,72	1,94	– 0,79	1,80	– 1,02
V_4	1,31	2,28	1,29	2,13	1,35	2,00	1,54
V_5	– 3,13	2,06	– 3,15	2,06	– 3,12	2,11	– 3,05
V_6	0,15	1,26	0,10	1,24	0,11	1,57	0,25
V_7	– 0,55	2,15	– 0,62	1,94	– 0,66	2,00	– 0,63
V_8	1,23	1,81	1,25	1,85	1,26	1,86	1,21
V_9	– 3,29	2,15	– 3,22	2,16	– 3,17	2,20	– 3,15
V_{10}	0,22	1,40	0,13	1,15	0,07	2,00	0,10
V_{11}	0,05	1,27	0,12	1,26	0,11	1,19	0,07
V_{12}	0,48	1,59	0,41	1,59	0,38	1,60	0,40

Анализ управляющей целевой функции при уравнивании геодезических измерений многокритериальным коррелатным способом. При уравнивании некоррелированных результатов измерений по МНК коррелатным способом применяют следующие известные формулы:

- для вектора поправок в результаты измерений:

$$V = -\mathrm{P}^{-1}B^T(B\mathrm{P}^{-1}B^T)^{-1}W\ ; \tag{26}$$

- для СКП единицы веса:

$$\mu = \sqrt{\frac{V^T\mathrm{P}V}{N-t}}\ , \tag{27}$$

где $B_{r\times N}$ – матрица коэффициентов условных уравнений ($r = N - t$ – число избыточных измерений); $\mathrm{P}_{N\times N}$ – диагональная матрица весов результатов измерений; $W_{r\times 1}$ – вектор свободных членов условных уравнений; N – количество результатов измерений; t – число необходимых измерений.

Чтобы перейти от B^* к B на ПК, устанавливают в геодезической сети в произвольном порядке необходимые измерения, а коэффициенты уравнений для оставшихся r избыточных измерений выделяют по строкам из $B^*_{N\times N}$ и записывают их в $B_{r\times N}$.

Идемпотентная матрица B^* имеет свойство: $B^* = B^*\cdot B^*\cdot\ldots\cdot B^*$, характеризуется тем, что нужно с особой тщательностью находить её строки и записывать их в B так, чтобы эти строки были независимыми. Это составляет определённые трудности, которые можно избежать, опираясь на рекуррентный способ уравнивания параметрическим способом. Оказывается, в этом способе коэффициент

$$q_i = \frac{1}{p_i} + a_i z_i^T\ ;\ z_i^T = Q_{i-1}\cdot a_i^T \tag{28}$$

принимает максимальные значения для необходимых измерений. Поэтому выстраиваем значения q_i вместе с номерами измерений i в порядке убывания q_i. Последние r строк из номеров измерений будут соответствовать номерам избыточных измерений.

Но согласно формуле (26), должен быть известен вектор W. В автоматизированном способе он будет таким:

$$W_{r\times 1} = \left(-V_{N\times 1}\right)_{выделенное}, \tag{29}$$

записываемое для r избыточных измерений. При этом

$$V_{N\times 1} = \left(E - AF\right)\cdot L_{N\times 1} = B^*_{N\times N}\cdot L_{N\times 1}, \tag{30}$$

где L – вектор свободных членов параметрических уравнений поправок, соответствующий произвольному по точности вектору X^0.

В статье приводятся значения:

$$\mu_{МНК} = \sqrt{\frac{V^{T}_{МНК}\, diag\left(\frac{1}{\sigma_i}\right)^2 V_{МНК}}{r}}; \quad (31)$$

$\mu_{МК}$, вычисленные по формуле (17) и ошибки положения, из равенства (29) для МК и выражений:

$$Q = \left(A^T diag\left(\frac{1}{\sigma_i}\right)^2 A\right)^{-1}; \quad (32)$$

$$X^{(j+1)}_{МНК} = X^{(j)}_{МНК} - F_{МНК} L_{МНК}; \; F_{МНК} = QA^T P, \quad (33)$$

для МНК. В формулах (26) и (31) A – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок.

Алгоритм многокритериального коррелатного уравнивания заключается в следующем [2].

При коррелатном способе уравнивания для многокритериальной оптимизации сначала находят матрицу коэффициентов условных уравнений:

$$B^{*}_{N\times N} = E_{N\times N} - A_{N\times t} F^{*}_{t\times N}, \quad (34)$$

выделяя из B^* r строк для избыточных измерений, где

$$F^{*} = \left(A^{T} P_{n=2.0} A\right)^{-1} A^{T} P_{n=2.0}, \quad (35)$$

а

$$W_{r\times 1} = -\left(B^{*}_{N\times N} L_{N\times 1}\right)_{выделенное}. \quad (36)$$

Здесь $L = L(X)_{n=2.0}$.

Далее вычисляют вектор поправок в результаты измерений из j-той итерации:

$$\left(V_{N\times 1}\right)_j = -\left(P^{-1}_{n_j}\right)_{N\times N} B^{T}_{N\times r} \left(K_{n_j}\right)_{r\times 1}, \quad (37)$$

где

$$K_{n_j} = -\left(BC_j^{-1}B^{T}\right)^{-1} W, \quad (38)$$

в которой

$$C_j = diag\left(C_i\right)_{N\times N}, \quad (39)$$

а C_i находят по формуле:

$$C_i = n_i\left(n_i - 1\right)\left(P_{n_i}\right)_j \left|V_i\right|_j^{n_i}, \quad (40)$$

аналогичной формуле:

$$C_i = n_i\left(n_i - 1\right) P_{n_i} \left|L_i(X)\right|^{n_i}. \quad (41)$$

Величину $\left|V_i\right|_j$ получают из равенства (37) для K_{n_j} и для P_n, найденного по формуле [4]:

$$P_{n_i} = \left(\frac{1}{m_i}\right)^{n_i}. \quad (42)$$

Оценку точности в коррелатном способе выполняют по формулам:

$$m_t = \mu' \sqrt{\left(\frac{1}{P_f}\right)_t}; \quad (43)$$

$$\mathrm{M_K} = \sqrt{m_t^2 + m_{t+1}^2}\,; \tag{44}$$

$$\left(\frac{1}{\mathrm{P}_f}\right)_t = f_t\left(\mathrm{P}_{\mathrm{N\times N}}^{-1} - \mathrm{P}_{\mathrm{N\times N}}^{-1}\mathrm{B}_{\mathrm{N}\times r}^{\mathrm{T}}\left(\mathrm{B}_{r\times\mathrm{N}}\mathrm{P}_{\mathrm{N\times N}}^{-1}\mathrm{B}_{\mathrm{N}\times r}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathrm{B}_{r\times\mathrm{N}}\mathrm{P}_{\mathrm{N\times N}}^{-1}\right)f_t^{\mathrm{T}}, \tag{45}$$

а вектор-строку для функции получают так:

$$f_t = F_{t\times\mathrm{N}}^{*}. \tag{46}$$

Степени n_i находят методом проб и ошибок с шагом 0,1 для N измерений, что составляет одно приближение. Количество итераций $j \le 20$.

Линеаризованный вариант коррелатного многокритериального способа включает минимизацию следующих целевых функций: (15), (16) (табл. 2).

Таблица 2

Обработка примера (триангуляция из [3, с. 160)]

Обозначения	v при n = 2,0	Коррелатный способ			
		$\Phi_2 = (X, n) = \max M$		$\Phi_2 = (X, n) = \max M \cdot \mu$	
		n	v	n	v
μ	1,000		0,890		0,767
M_1	0,082 м		0,073 м		0,068 м
M_2	0,104		0,086		0,084
V_1	1,14″	2,60	1,51″	2,94	1,70″
V_2	0,94	2,30	1,16	2,96	1,20
V_3	– 0,70	1,80	– 1,19	2,73	– 1,39
V_4	1,31	2,90	1,49	3,00	1,55
V_5	– 3,13	2,50	– 2,84	2,97	– 2,81
V_6	0,15	1,20	0,48	1,63	0,54
V_7	– 0,55	2,70	– 0,83	3,00	– 0,94
V_8	1,23	1,70	1,22	3,00	1,19
V_9	– 3,45	2,50	– 3,35	2,98	– 3,25
V_{10}	0,12	1,20	0,03	1,19	– 0,05
V_{11}	0,08	1,20	0,10	1,11	0,22
V_{12}	0,50	1,20	0,20	1,11	0,08

На основе данных таблиц 1 и 2 можно сделать следующие **выводы**:

1. Условия (15) и (16) по сравнению с МНК всегда приводят к меньшим величинам M.
2. Наибольший эффект уменьшения M достигается для линейно-угловых сетей и построений трилатерации. Уменьшение M по сравнению с МНК иногда составляет 250 % (2,5 раза).
3. Применение условий (15) и (16) практически равноценно, но мы предпочтение отдаем функции (16).

ЛИТЕРАТУРА

1. Маркузе, Ю.И. Геодезия. Вычисление и уравнивание геодезических сетей / Ю.И. Маркузе, Е.Г. Бойко, В.В. Голубев. – М.: Картгеоцентр – Геодезиздат, 1994. – 431 с.
2. Применение многокритериальной оптимизации при проектировании и уравнивании геодезических сетей / В.И. Мицкевич [и др.] // Вестн. Полоцк. гос. ун-та. Сер. С. Фундаментальные науки. – 2004. – № 4. – С. 77 – 79.
3. Рабинович, Б.Н. Практикум по высшей геодезии / Б.Н. Рабинович. – М.: Геодезиздат, 1961. – 339 с.
4. Шнитко, С.Г. Сравнение методик назначения весов результатов измерений при многокритериальном уравнивании / С.Г. Шнитко // Вестн. Полоцк. гос. ун-та. Сер. В. Прикладные науки. – 2005. – № 9. – С. 53 – 55.

Поступила 15.07.2007