УК 528.063

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА L_p-ОЦЕНОК ДЛЯ УРАВНИВАНИЯ И ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ СПУТНИКОВЫХ GPS- И ГЛОНАСС-ИЗМЕРЕНИЙ

А.Ю. БУДО, Н.О. КУПРИЕНКО
(Полоцкий государственный университет),
А.П. ПРИСЯЖНЮК
(Аэрокарт, Минск)

В геодезической литературе неоднократно приводились примеры рядов случайных ошибок геодезических измерений, эмпирические распределения которых заметно отличаются от нормального закона. При этом обсуждались и причины возможного появления негауссовых случайных рядов, в частности рядов с отрицательным эксцессом. Число примеров таких рядов постоянно растет. Показательной в этом отношении является европейская нивелирная сеть, при анализе результатов измерений которой перед совместным уравниванием установлен характер распределения ошибок, отличный от нормального закона. В связи с этим при математической обработке геодезических построений имеет определенный смысл сначала устанавливать характер распределения ошибок непосредственно по результатам полевых измерений, а затем соответственно выявленному закону подбирать корректные методы уравнивания (адекватные действительности). Арсенал современной математической статистики позволяет без труда решить первую часть указанной задачи. Для решения второй части также имеются широкие возможности.

Введение. В опубликованной литературе уже приводились примеры применения неклассических методов уравнивания [1, 2]. Особо перспективным является предложенный недавно метод обработки измерений, получивший название метода L_P-оценок. Он обобщает классический метод наименьших квадратов (параметр распределения $n = 2$) и нетрадиционные методы – наименьших модулей ($n = 1$), чебышевского минимакса ($n = \infty$) и ряд других, соответствующих промежуточным значениям $1 \le n < \infty$ [1].

В общем случае плотность распределения представим в виде:

$$y = \frac{Z_n}{2\Delta_n}\exp\left(-\frac{1}{n}\left|\frac{\varphi(X)-T}{\Delta_n}\right|^n\right), \quad n \ge 1, \tag{1}$$

где n и Z_n – параметры распределения; Δ_n – параметр рассеивания; $\varphi(X)$ и T – значения случайной величины и ее математического ожидания.

Уравнивание результатов измерений, ошибки которых подчиняются закону (1), необходимо выполнять, как это следует из принципа максимального правдоподобия Фишера, под условием метода L_P-оценок:

$$\sum_i \left|V_i\right|^n \to \min, \tag{2}$$

где V_i – i-тое значение дискретной случайной величины; i – текущий индекс.

Из работы [3] известно, что если математическое ожидание ошибок равно нулю и дисперсия их конечна: $D(V) < \infty,$ а оценки ищутся под условием (2), то применение указанного метода приводит к оценкам, несмещенным и эффективным с точки зрения метода максимального правдоподобия.

Целевые функции при реализации алгоритма L_P-оценок. При нелинейном методе оценок для уравнивания геодезических сетей минимизируют целевую функцию

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^{N} P_i\left|L_i(X)\right|^{n_i}, \tag{3}$$

где $X = [X_1, X_2, \ldots, X_i]^T$ – вектор неизвестных координат определяемых пунктов; P_i – вес результата измерений; $L(X) = \varphi(X) - T$ – свободный член нелинейного параметрического уравнения, равный разности вычислительного значения измерения и результата измерения; N – количество измерений; n – показатель степени.

В обычном методе L_P-оценок показатель n является общим для всей целевой функции, но возможно для каждой $L_i(X)$ принимать свою индивидуальную степень (многостепенная оптимизация). Вместо (3) возможна и матричная форма записи

$$\Phi(X) = \left(\left|L(X)\right|^{\frac{n}{2}}\right)^T P\left|L(X)\right|^{\frac{n}{2}}, \tag{4}$$

где P – диагональная матрица весов результатов измерений.

Опираясь на исследования [4], рассмотрим вопрос о назначении весов измерений при уравнивании геодезических сетей методом L_P-оценок.

Если предположить, что ошибки геодезических измерений следуют L_P-распределению с плотностью вероятности (1). То, как доказывается в [5], вес i-того измерения

$$C_i = \left(\frac{1}{\Delta_n}\right)^n \left|\varphi_i\left(X\right) - T\right|^{n-2} \tag{5}$$

и используется при поиске решения по формуле

$$\delta X_j = -(A^T C_j A)^{-1} A^T C_j L. \tag{6}$$

Здесь параметры Z_n, Δ_n и n устанавливаются из предварительного анализа результатов измерений, а последний из них определяют по методу максимального правдоподобия с применением критерия согласия.

Если $\hat{X} = X_0 + \delta X$ отыскивается не с применением (6), а напрямую с использованием целевой функции (3), то согласно (5) $P = (1/\Delta_n)^n$. Минимизация функции (3) дает более устойчивое решение по сравнению с (6), имеющему при $n < 2$ точку разрыва, когда $\vartheta_i = \varphi_i(X) - T = 0$. В этом случае обычно применяют большое значение веса C_i (например, С = 10^6), что неизбежно приводит к ухудшению обусловленности информационной матрицы Фишера $(A^T C_j A)$.

Для определения веса P воспользуемся формулой [6]:

$$\Delta_n^2 = \frac{\sigma^2}{c^2}, \tag{7}$$

где σ – стандарт измерения, а

$$c^2 = \frac{n^{\frac{2}{n}} \Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)} \tag{8}$$

где используется Гамма функции. Теперь, зная, что $\Delta_n = \dfrac{\sigma}{c}$, получим

$$P_i = \left(\frac{c}{\sigma_i}\right)^n. \tag{9}$$

Поскольку веса P_i относительны, то в качестве c можно брать любую константу, например $c = 1$. Значение веса измерения, входящего в (3) и равного

$$P_i = (1/\sigma_i)^n, \tag{10}$$

приведут даже при уравнивании линейно-угловых сетей к тем же результатам, что и с использованием формул (8) и (9).

В условиях многокритериальной оптимизации [7], когда для каждого измерения или для группы измерений отыскивается своя степень n_i, вместо (10) необходимо использовать формулу:

$$P_i = \left(\frac{c_i}{\sigma_i}\right)^{n_i} \tag{11}$$

с применением равенства (8), поскольку постоянно c_i для каждого измерения будет индивидуальной.

При уравнивании нивелирных сетей обычно применяют веса превышений в виде: $P' = c/K$, или $P' = c / L_{км}$, где c – произвольная постоянная; K – число станций нивелирования в ходе; $L_{км}$ – длина хода в километрах. Но и формула (10) необходима для нивелирования.

Для этого вычисляют

$$\sigma_i = \frac{\sigma_0}{\sqrt{P_i'}}, \tag{12}$$

где σ_0 – стандарт превышения, для которого $P' = 1$.

Минимизацию функции (3) можно выполнить любым методом нелинейного программирования [8], например, методом Ньютона.

Реализация алгоритма L_P-оценок параметрическим способом. В известном методе Флетчера – Гранта – Хебдена [5] для решения системы параметрических уравнений поправок ставят условие в виде:

$$\sum_{i=1}^{N} P_i \left|\vartheta_i\right|^{n-2} \vartheta_i^2 \quad \Rightarrow \min, \quad n \geq 1, \tag{13}$$

в котором N – количество измерений; P – веса измерений; ϑ – поправки в измеренные величины из уравнения; n – показатель степени (при n = 1,0 – оценки параметров по методу наименьших модулей (МНМ); при n = 1,5 – метод наименьших «полтора» и т.д.). При $1{,}0 \leq n < 2{,}0$, разность $n - 2$ отрицательна и, следовательно, при $\vartheta_i = 0{,}0$ необходимо поправке присвоить малую величину.

Выражение (13) рассматривается как условие МНК с неизвестной весовой матрицей

$$C = P \cdot diag\left|\vartheta\right|^{n-2}, \tag{14}$$

уточняемой путем применения следующей процедуры [1, 6, 9]:

1. При любом n находят решение, например по МНК (n = 2):

$$\begin{aligned} \delta X &= -(A^T P A)^{-1} A^T P L; \\ V &= A\delta X + L. \end{aligned} \tag{15}$$

2. При $1{,}0 \leq n < 2{,}0$ применяют итеративный метод:

$$\delta X_j = -(A^T C_j A)^{-1} A^T C_j L\ ; \tag{16}$$

$$V_j = A\delta X_j + L. \tag{17}$$

3. При $n > 2$ выполняют вычисления:

$$\begin{aligned} G &= 1/(n-1); \\ \delta X_j &= (1-G)\delta X_{j-1} + G\delta\hat{X}_j; \\ \delta\hat{X}_j &= -(A^T C_j A)^{-1} A^T C_j L, \end{aligned} \tag{18}$$

и далее применяют равенства (17) – (18).

Процесс итераций заканчивается, если

$$\varepsilon > \frac{\left\|\delta X_j - \delta X_{j-1}\right\|}{\left\|\delta X_j\right\|}, \tag{19}$$

где ε – малое наперед заданное число.

Окончательное решение находят по формуле:

$$\hat{X} = X_0 + \delta X\ , \tag{20}$$

где X_0 – вектор предварительных координат, соответствующий L.

Для достижения наилучшего решения при данной разрядной сетке ЭВМ предлагаем другую процедуру уравнивания, позволяющую находить минимум некоторой целевой функции.

При минимизации избранной целевой функции каждый раз уточняются координаты

$$\hat{X}_{j+1} = \hat{X}_j + \delta X_{j+1}, \tag{21}$$

и

$$\delta X_{j+1} = -(A^T C_j A)^{-1} A^T C_j L_j, \tag{22}$$

где

$$L_j = \varphi\left(\hat{X}_j\right) - T \tag{23}$$

вектор свободных членов параметрических уравнений, а

$$C_j = P \cdot diag\left|L_j\right|^{n-2}. \tag{24}$$

Здесь X_0 – вектор начальных координат, попавший в область сходимости итераций, например, при n = 2 и уточняемый по (21) до тех пор, пока уменьшается значение целевой функции.

Процедура (21)…(24) проще алгоритма (15)…(20) и рабочие формулы не зависят от значений n. Ее отличает простота критерия остановки итераций. Для этих целей вместо (19) можно использовать

$$\varepsilon > \max\left|\delta X_{j+1}\right|, \tag{25}$$

или условие, когда вместо уменьшения критериальной функции *Φ(X)* начался процесс ее увеличения. Иначе говоря, итерации продолжаются до тех пор, пока

$$\Phi(X_{j+1}) < \Phi(X_j). \tag{26}$$

В этом случае достигается наилучшее решение, не уступающее по точности первоначально рассмотренной процедуре.

Используя расширенную псевдообратную матрицу $F = (A^T CA)^{-1} A^T C,$ запишем формулу (22) в виде:

$$\delta X_{J+1} = -F_J L_J. \tag{27}$$

Теперь матрицу обратных весов можно вычислить по известной формуле МНК (фундаментальная теорема о переносе ошибок)

$$Q = FP_n^{-1} F^T \tag{28}$$

и выполнить оценку точности любой функции.

Реализация алгоритмов *L_P*-оценок коррелатным способом. Выше мы рассмотрели метод L_P-оценок при параметрическом способе уравнивания. Благодаря исследованиям С.Д. Волжанина стало возможно применение в алгоритмах L_P-оценок коррелатного способа [9].

Допустим, что задана система условных уравнений $BV + W = 0$ с весовой матрицей P. Решение этой системы методом L_P-оценок предполагает:

А. При $1 \le n < 2$:

1) нахождение приближенного решения по МНК при $n = 2{,}0$:

$$K = -(BP^{-1}B^T)^{-1}W; \tag{29}$$

$$V = P^{-1}B^T K. \tag{30}$$

2. Вычисление векторов коррелат и поправок в измерения

$$C_j = P \cdot diag\left|\vartheta_j\right|^{n-2};$$

$$K_{j+1} = -(BC_j^{-1}B^T)^{-1}W;$$

$$V_{j+1} = C_j^{-1}B^T K_{j+1}$$

3. Приближения продолжаются до тех пор, пока

$$\frac{\left\|K_{j+1} - K_j\right\|}{\left\|K_j\right\|} < \varepsilon. \tag{31}$$

Б. При $n > 2$:

1) нахождение приближенного решения по (29), (30) при $n = 2{,}0$;

2) вычисление вспомогательного числа $G = 1/(n - 1)$ при заданном n;

3) вычисление вектора коррелат:

$$R_j = P^{-1}B^T K_j;$$

$$U_j = P \cdot diag\left|R\right|^{\frac{n-2}{n-1}};\ K_* = -\left(BU_j^{-1}B^T\right)^{-1}W;$$

$$K_{j+1} = \left(1 - G\right)K_j + GK_*;$$

4) приближения продолжаются до тех пор, пока не выполнится неравенство (31) с наперед заданным значением малой величины ε;

5) вычисляют вектор поправок в измерения:

$$V = U_j^{-1}B^T K_{j+1}.$$

Оценку точности функций измеренных и уравненных величин можно выполнить по формулам:

$$m_f = \mu\sqrt{\frac{1}{P_f}};$$

$$\mu = \sqrt{\frac{V^T P_n V}{r}};$$

$$\frac{1}{P_f} = f_k P_n^{-1} f_k^T,$$

где $f_k = f_P \cdot F$, а f_P – функция для оценки точности измеренных и уравненных величин параметрическим способом.

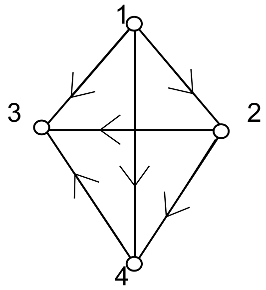
Числовые примеры. Приведённые выше формулы позволяют уравнивать методом L_P-оценок не только плановые и высотные геодезические сети, но и спутниковые сети GPS/ГЛОНАСС.

Для последнего случая возьмём GPS-четырёхугольник (рисунок).

Поскольку для расчётов нами выбраны реальные измерения для служебного пользования, их указывать не будем, записывая координаты пунктов в условной пространственной системе.

Выполним уравнивание этой сети параметрическим способом L_P-оценок по программе NIVA2.exe, с помощью которой уравнивают нивелирные сети и GPS-построения раздельно по X, Y и Z для степеней n = 1,5; n = 2,0; n = 2,5, взяв за исходный пункт точку с номером 4.

В таблице 1 приведены результаты уравнивания и оценки точности геодезического четырёхугольника.



Геодезический GPS-четырёхугольник

Таблица 1

Разности уравненных координат и оценка точности при раздельном уравнивании

	n = 1,5		n = 2,0		n = 2,5	
	δX, δY, δZ, мм	m, мм	δX, δY, δZ, мм	m, мм	δX, δY, δZ, мм	m, мм
1	2	3	4	5	6	7
μ	0,0684		0,2069		0,6627	
	уравнивание по X					
1	0,6	1,9	0,0	1,8	–0,2	2,0
2	0,2	1,6	0,0	1,6	–0,2	1,6
3	0,0	1,6	0,0	1,5	0,0	1,6
4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	уравнивание по Y					
μ	0,1574		0,4092		2,333	
1	2,9	5,7	0,0	5,0	0,5	10,5
2	2,1	5,3	0,0	4,8	–0,9	10,3
3	1,1	5,6	0,0	5,2	–1,1	11,8
4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	уравнивание по Z					
μ	0,2272		0,6694		2,054	
1	1,1	7,2	0,0	5,5	–0,5	5,9
2	1,9	5,9	0,0	5,2	–0,8	5,2
3	1,3	6,5	0,0	5,7	–0,6	5,7
4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Выполним совместное уравнивание GPS–четырёхугольника сразу по координатам X, Y и Z.

Таблица 2

Разности уравненных координат и оценка точности при совместном уравнивании

	n = 1,5		n = 2,0		n = 2,5	
	δX, δY, δZ, мм	m, мм	δX, δY, δZ, мм	m, мм	δX, δY, δZ, мм	m, мм
1	2	3	4	5	6	7
μ	0,128		0,328		0,900	
X_1	0,5		0,0		–0,2	
Y_1	3,3	6,6	0,0	4,4	–1,3	2,5
Z_1	1,1		0,0		–0,6	
X_2	0,2		0,0		–0,2	
Y_2	2,1	5,7	0,0	4,0	–0,9	2,3
Z_2	1,8		0,0		–0,8	
X_3	0,0		0,0		0,0	
Y_3	1,0	6,0	0,0	4,2	–0,4	2,4
Z_3	1,2		0,0		–0,7	

По данным таблиц 1 и 2 можно сделать следующие выводы:

1) результаты раздельного уравнивания в основном совпадают с результатами совместного уравнивания;
2) для оценки точности положения пунктов при раздельном уравнивании следует использовать формулы:

$$m'_X = \mu' \sqrt{Q_{XX}}; \quad m'_Y = \mu' \sqrt{Q_{YY}}; \quad m'_Z = \mu' \sqrt{Q_{ZZ}}; \tag{32}$$

$$\mu' = \sqrt{\frac{\mu_X^2 + \mu_Y^2 + \mu_Z^2}{3}}. \tag{33}$$

Благодаря исследованиям, опубликованным ранее [10], стало возможным уравнивание и оценка точности в обобщённом методе L_P-оценок. В таблице 3 указаны те же сведения, что и в таблице 2, только для зависимых GPS-измерений.

Таблица 3

Разности уравненных координат и оценка точности
при совместном уравнивании зависимых результатов GPS–измерений

	n = 1,5		*n* = 2,0		*n* = 2,5	
	δX, δY, δZ, мм	m, мм	δX, δY, δZ, мм	m, мм	δX, δY, δZ, мм	m, мм
1	2	3	4	5	6	7
μ	0,147		0,336		0,904	
X_1 Y_1 Z_1	2,1 3,0 0,7	25,1	0,0 0,0 0,0	11,4	–2,1 –1,6 –0,7	10,0
X_2 Y_2 Z_2	0,4 2,1 2,1	25,2	0,0 0,0 0,0	7,2	–0,1 –0,7 –0,5	9,7
X_3 Y_3 Z_3	–1,4 2,0 1,2	14,6	0,0 0,0 0,0	13,3	0,1 –0,7 0,3	28,8

Сравнивая таблицы 2 и 3, можно сделать выводы: 1) уравненные координаты практически не изменяются для зависимых или для независимых величин; 2) результаты оценки точности различаются на значительную величину, особенно в случаях, когда $n \neq 2,0$.

В **заключение** отметим, что при использовании производственных программ для уравнивания и оценки точности GPS-измерений следует применять необобщённый метод L_P-оценок, поскольку обобщённый метод даёт искажённые результаты оценки точности при небольшом изменении уравненных координат.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мещеряков, Г.А. Об уравнивании геодезических измерений с учетом закона распределения ошибок / Г.А. Мещеряков, С.Д. Волжанин, В.В. Киричук // Геодезия и картография. – 1984. – № 2. – С. 9 – 11.
2. Мудров, В.И. Методы обработки измерений / В.И. Мудров, В.Л. Кушко. – М.: Недра, 1970.
3. Hogan, W. Norm minimizing estimation and unbiasedness / W. Hogan // Econometrica. – 1976. – V. 44, № 3. – P. 277 – 279.
4. Джунь, И.В. Теория веса геодезического измерения, основанная на принципе правдоподобия / И.В. Джунь // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. – Львов, 1988. – Вып. 47. – С. 9 – 13.
5. Fletcher, R. The calculation of linear best Lp-approximations / R. Fletcher, I.A. Grant, M.D. Hebden // Computer Jaurnal. – 1971. – V. 14, № 3. – P. 277 – 279.
6. Маркузе, Ю.И. Геодезия. Вычисление и уравнивание геодезических сетей: справ. пособие / Ю.И. Маркузе, Е.Г. Бойко, В.В. Голубев. – М.: Картгеоцентр – Геодезиздат, 1994. – 431 с.
7. Мицкевич, В.И. Применение метода релаксации при многокритериальном уравнивании и оценке точности геодезических сетей / В.И. Мицкевич, П.М. Левданский; Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 1999. – 4 с. – Деп. в ОНИПР ЦНИИГАиК 28.06.99, № 680-ГД99.
8. Химмельблау, Д.М. Прикладное нелинейное программирование / Д.М. Химмельблау; пер. с англ. – М.: Мир, 1975. – 534 с.
9. Волжанин, С.Д. Уравнивание геодезических сетей методом Lp-оценок / С.Д. Волжанин // Геодезия картография и аэросъемка. – Львов,1984. – Вып. 40. – С. 20 – 23.
10. Мицкевич, В.И. Алгоритм обобщённого метода L_P-оценок на основе метода Ньютона / В.И. Мицкевич, А.Ю. Будо // Вестн. Полоцк. гос. ун-та. Сер. B. Прикладные науки. – 2006. – № 9. – С. 92 – 96.

Поступила 15.10.2007