УДК 528. 063

ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ПРЕДРАСЧЕТА ТОЧНОСТИ ПЛАНОВЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ НА ПЕРСОНАЛЬНОМ КОМПЬЮТЕРЕ

А.В. СТРОК
(Полоцкий государственный университет)

Рассматривается технологический алгоритм предрасчета точности плановых геодезических сетей на персональном компьютере. Приведен результат анализа предрасчета точности плановых геодезических сетей на стадии проектирования, выполненный по приближенным формулам и строгим способам уравнивания по методу наименьших квадратов. Анализ проводился для триангуляционных, трилатерационных построений и линейно-угловых сетей.

Проведенные исследования подтвердили обоснованность применения приближенных формул для предварительной оценки характеристик точности проектируемых геодезических сетей. Но учет геометрических особенностей конкретной сети, который можно сделать при применении строгих методов, заложенных в программе для ПК, позволяет нам иметь более точные результаты. Кроме этого, независимо от вида сети, приближенные формулы дают одинаковую ошибку положения в слабом месте сети, т.е. формулами не учитываются геометрические особенности геодезического построения.

Введение. До недавнего времени предрасчет точности геодезических сетей выполнялся по приближенным формулам, которые не в полной мере учитывают геометрические и корреляционные связи конкретной сети, а дают в основном характеристики цепочек и сетей, состоящих из правильных фигур, т.е. идеальных моделей.

Применение современной вычислительной техники позволяет при выполнении предрасчета точности не только смоделировать идеальную сеть, но и учесть все особенности геометрических построений и корреляционных связей в каждом конкретном случае.

Попробуем проанализировать, насколько учет этих последних факторов может повлиять на результаты предрасчета точности сетей. Для этого сравним результаты предрасчета точности различных геодезических построений, выполненные по классическим готовым формулам и по программе для персонального компьютера, использующей принципы параметрического способа уравнивания.

Оценка точности триангуляции. Точность передачи координат в тригонометрическом ряду (рис. 1) определяется точностью длин и азимутов сторон, продольным и поперечным сдвигом диагоналей ряда треугольников.

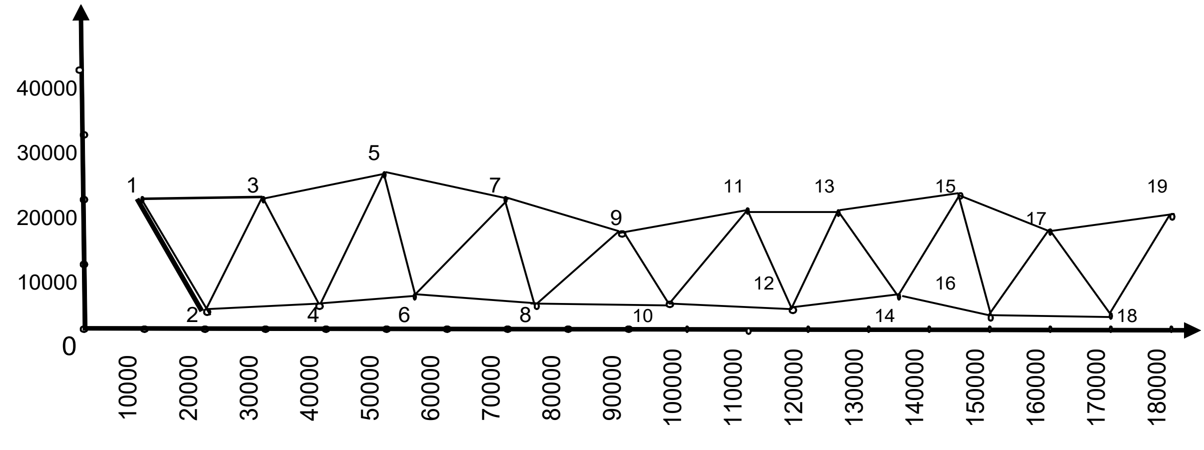

Рис. 1. Схема сети

Средняя квадратическая ошибка логарифма связующей стороны k-того треугольника ряда может быть получена по формуле [1]:

$$m_{\lg S_K} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_{\lg S_K}}}, \tag{1}$$

где μ – средняя квадратическая ошибка результата измерения, вес которого принят за единицу; $P_{\lg S}$ – вес функции после уравнивания.

Средняя квадратическая ошибка длины связующей стороны ряда триангуляции находится по формуле:

$$m_{\lg S_K} = \sqrt{m_{\lg b}^2 + \frac{2}{3} m \cdot \frac{2}{\beta} \sum_{i=1}^{K} R_i}\,, \tag{2}$$

где $m_{\lg b}$ – средняя квадратическая ошибка исходной стороны; R_i – ошибка геометрической связи треугольника. Относительную ошибку стороны ряда можно получить, используя формулу [2]:

$$\frac{m_s}{S} = \frac{m_{\lg S_K}}{\mu \cdot 10^6}\,, \tag{3}$$

где μ = 0,43.

Для сети на рисунке 1 по формулам (2) и (3) получим:

$$m_{\lg S} = 5{,}46 \text{ в ед. 6-го зн. lg}; \quad \frac{m_s}{S} = \frac{1}{78700}.$$

Такой же результат получен и после обработки материалов на ПК.

Для связующей стороны висячего тригонометрического ряда оценку точности можно получить по формуле (1). Для этого воспользуемся величиной, обратной весу логарифма связующей стороны k-того треугольника. В логарифмических единицах получится:

$$m_{\lg S_K}^2 = m_{уг}^2 \frac{2}{3} \sum_{i=1}^{K} R\,. \tag{4}$$

Перейдя к относительной ошибке стороны, получим:

$$\frac{m_s}{S} = \frac{m_{\lg S_K}}{Mod}\,, \tag{5}$$

где Mod – модуль перехода от натуральных к десятичным логарифмам.

Для нашего ряда, используя формулы (4) и (5), получим $m_{\lg S}$ = 5,34 в ед. 6-го зн. lg,

$$\frac{m_s}{S} = \frac{1}{81000}.$$

Такой же результат получен после обработки материалов на ПК.

При уравнивании ряда по углам ошибку передачи азимута через n треугольников определяют по формуле:

$$m''_{\alpha_n} = \mu'' \sqrt{\frac{2}{3} n}. \tag{6}$$

где n – число треугольников в ряде.

Если учитывать ошибки исходного азимута $m''_{\alpha о}$, то формула примет вид:

$$m''_{\alpha_0} = \sqrt{m_{\alpha_0}^2 + \frac{2}{3} \mu^2 n}\,, \tag{7}$$

где $m''_{\alpha о}$ – средняя квадратическая ошибка азимута искомой стороны; μ – средняя квадратическая ошибка измеренного угла.

Приняв среднюю квадратическую ошибку измеренного угла для триангуляции первого класса μ = 0,7'' и ошибку исходного азимута $m''_{\alpha о}$ = 0,5'' для ряда (см. рис. 1), получим m''_{α_0} = 2,41''.

При уравнивании цепи треугольников по направлениям используются формулы А.А. Изотова. Для связующей стороны:

$$m''^2_{\alpha_n} = m''^2_{\alpha_0} + \frac{2n+5}{10} \mu''^2, \tag{8}$$

где μ'' – средняя квадратическая ошибка измеренного угла; n – число треугольников.

Для нашей сети получим m''_{α_0} = 1,47''.

Для промежуточной стороны:

$$m''^2_{\alpha_n} = m''^2_{\alpha_0} + \frac{2n}{10} \mu''^2, \tag{9}$$

в нашем случае m''_{α_0} = 1,38''.

Рассмотрим последнюю характеристику – общий сдвиг конечной точки ряда:

$$u = \sqrt{t^2 + q^2}, \tag{10}$$

t – продольный сдвиг конечной точки ряда; q – поперечный сдвиг конечной точки ряда.

При уравнивании ряда триангуляции по углам значение средней квадратической погрешности продольного сдвига m_L будет равно [1]

$$m_L^2 = L\sqrt{\left(\frac{m_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\mu''}{\rho''}\right)^2 \frac{4k \pm 3k + 5}{9k}}, \tag{11}$$

где L – диагональ ряда; k – число промежуточных сторон в диагонали ряда. При уравнивании по направлениям или по углам, если измерялись направления, можно использовать формулу А.А. Изотова:

$$m_L^2 = L\sqrt{\left(\frac{m_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\mu''}{\rho''}\right)^2 \left(\frac{4k \pm 3k + 5}{9k} - \frac{10k^2 - 7k - 9}{300k^2}\right)}. \tag{12}$$

Для вычисления поперечного сдвига при нечетном числе треугольников:

$$m_q = \frac{L}{\rho''}\sqrt{m_{\alpha_0}^2 + \frac{2}{15}\mu''^2 \frac{k^2 + k + 3}{k}}. \tag{13}$$

Для ряда (см. рис. 1) при $\frac{m_b}{b} = \frac{1}{400000}$ (для триангуляции первого класса) $m_L = 1{,}95$ м; $\frac{m_L}{L} = \frac{1}{102000}$; $m_q = 0{,}89$ м. Общий сдвиг сети будет равен $u = 2{,}14$ м.

При вычислении на ПК основных критериев точности передачи координат по ряду триангуляции получим: $m_\alpha = 1{,}25$ м; $\frac{m_s}{S} = \frac{1}{86000}$.

Для пункта 19 общий сдвиг ряда u составил 1,25 м. Ошибка приближенных формул в процентном выражении: для вычисления ошибок положения – 71,2 %; для вычисления ошибок дирекционных углов – 8,7 %.

При оценке точности логарифма связующей стороны тригонометрического звена, после уравнивания всех его элементов можно выполнить по формуле (1), в которой величина, обратная весу логарифма стороны, будет равна [1]

$$\frac{1}{P_{\lg S_K}} = \frac{2}{3}\sum_{i=1}^{K} R \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} R - \sum_{i=1}^{K} R}{\sum_{i=1}^{n} R}\right), \tag{14}$$

для звена, показанного на рисунке 1, $\sum_{i=1}^{n} R = 87{,}42$ ед. 6-го зн. lg; $\sum_{i=1}^{K} R = 41{,}18$ ед. 6-го зн. lg,

тогда $\frac{1}{P_{\lg S_K}} = 14{,}52$ ед. 6-го зн. lg.

Средняя квадратическая ошибка логарифма связующей стороны k-того треугольника звена будет равна $m_{\lg S} = 267$, а относительная ошибка $\frac{m_s}{S} = \frac{1}{161000}$.

В нашем звене заданы дирекционные углы конечных сторон, поэтому к условиям фигур и базиса добавится условие дирекционных углов.

Оценку точности дирекционных углов связующих сторон выполним по формуле [2]:

$$m_{t_K} = \mu_{уг}\sqrt{\frac{2}{3}k\frac{n - k}{n}}, \tag{15}$$

где $\mu_{уг}$ – средняя квадратическая ошибка измеренного угла; k – число треугольников до определяемой стороны; n – число треугольников звена.

В звене триангуляции наименее слабо определяется дирекционный угол стороны, равноудаленной от исходных направлений стороны звена.

Средняя квадратическая ошибка определения направления этой стороны

$$m_{t_0} = \mu_{уг}\sqrt{\frac{n}{6}}\,. \tag{16}$$

Для случая, когда измеряются и уравниваются направления звена, необходимо составлять условия фигур, дирекционных углов тоже по направлениям. Определение средней квадратической ошибки дирекционного угла связующей стороны k-того треугольника звена можно определить по правилам способа наименьших квадратов. Средняя квадратическая ошибка дирекционного угла этой стороны в данном случае будет равна [2]

$$m_{t_K} = \mu_{направления}\sqrt{\frac{2}{25}\left\{(5k+12)-\frac{(5k+6)^2}{5N+12}\right\}}\,, \tag{17}$$

где N – общее число треугольников в звене.

Если учесть влияние погрешностей дирекционных углов двух исходных сторон звена, то, полагая их равноточными, будем иметь:

$$M_{t_k} = \sqrt{\frac{m_{исх}^2}{2} + m_{t_k}^2}\,,$$

где $m_{исх}^2$ – средняя квадратическая ошибка дирекционного угла одной исходной стороны.

Для нашего случая $m_{t_k} = 1{,}18''$; $M_{t_k} = 1{,}14''$.

Общий сдвиг конечного пункта звена триангуляции определяется по формулам А.А. Изотова:

$$u = \sqrt{m_L^2 + m_q^2}\,,$$

где

$$m_L = \frac{\mu_{угл}}{\rho''} L\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{2n^2-3n+10}{9n} - \frac{5n^2-7n-9}{150n^2}\right)}; \tag{18}$$

$$m_q = \frac{\mu_{угл}}{\rho''} L\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{n^2+1{,}9n+12}{15n}\right)}, \tag{19}$$

где $\mu_{угл}$ – средняя квадратическая ошибка измеренного угла; L – диагональ звена; n – число промежуточных сторон в диагонали звена.

В нашем случае число промежуточных сторон $n = 16$; $\mu_{угл} = 0{,}7''$. Тогда $m_L = 0{,}85''$; $m_q = 0{,}52''$, а общий сдвиг конечного пункта ряда составил $u = 1{,}03''$. При вычислении этих параметров на ПК получим, что относительная ошибка логарифма связующей стороны $\frac{m_S}{S} = \frac{1}{262000}$.

Ошибка дирекционного угла связующей стороны ряда $m_\alpha = 0{,}43''$, а общий сдвиг конечного пункта звена триангуляции $u = 1{,}16''$.

Погрешность приближенных формул в процентном выражении составила: для определения ошибок положения – 11,2 %; для определения ошибок дирекционных углов – 174 %.

Вопрос оценки точности сплошных сетей триангуляции второго класса является очень сложным. Наиболее удачное решение этого вопроса дано в работах профессора К.Л. Проворова. Он доказал, что средние квадратические ошибки взаимного положения двух смежных пунктов сплошной сети триангуляции, расположенных на достаточном удалении от края сети, будут практически одинаковыми.

Продольная m_L, поперечная m_q, общие средние квадратические ошибки во взаимном положении двух смежных пунктов сети, уравненной по углам за условия фигур, горизонтов, полюсов, базисов и азимутов, вычисляются по формулам [1]:

$$m_L = \frac{S}{\rho''}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\rho''\frac{m_b}{b}\right)^2 + m^2\left(\frac{\delta_0}{\delta_{60^0}}\right)^2\frac{N+5}{100}};$$

$$m_q = \frac{S}{\rho''}\sqrt{\frac{1}{2}m_\alpha^2 + \frac{N+15}{100}m^2}; \tag{20}$$

$$u = \sqrt{m_L^2 + m_q^2},$$

где $\frac{m_b}{b}$ – относительная ошибка длины исходной стороны; m_α – средняя квадратическая ошибка азимута исходной стороны; m – средняя квадратическая ошибка измеренного угла; N – среднее количество треугольников, расположенных между исходными сторонами сети; S – длина стороны треугольника; δ_0 – показатель формы треугольника, определяемый по формуле:

$$\delta_0 = \frac{[\delta]}{3n}. \tag{21}$$

Здесь δ – изменение логарифмов синусов углов при их увеличении на 1"; n – число треугольников.

Средняя квадратическая ошибка логарифма стороны для сплошной сети равна

$$m_{\lg S_K} = 0,35\mu''\sqrt{N - 6,5 + 48t_{\left(N/2\right)}}, \tag{22}$$

а средняя квадратическая ошибка дирекционных углов

$$m_{\alpha_n} = 0,15\mu''\sqrt{N - 6,5 + 48t_{\left(N/2\right)}}, \tag{23}$$

где μ – средняя квадратическая ошибка измерения угла; N – число треугольников между базисными сторонами.

Рассмотрим сплошную сеть триангуляции второго класса (рис. 2).

При оценке этой сети S = 10 км; m = 1"; N = 14; m_α = 0,5"; $\frac{m_b}{b} = \frac{1}{300000}; \frac{\delta_0}{\delta_{60^\circ}} = 1$.

Тогда, применяя формулы (20)…(23), получим $m_L = 0,036''$, $m_q = 0,032''$, а общий сдвиг $u = 0,048''$.

Средняя квадратическая ошибка логарифма стороны 56…57 $m_{\lg S_K} = 1,19$ ед. 6-го зн. lg; $\frac{m_S}{S} = \frac{1}{74500}$; ошибка дирекционного угла $m_\alpha = 0,54''$.

Эти же величины, полученные после счета на ПК, составят: относительная ошибка стороны 56…57 будет равна $\frac{m_S}{S} = \frac{1}{93000}$; средняя квадратическая ошибка дирекционного угла $m_\alpha = 0,81''$; $u = 0,11''$.

Таким образом, ошибки приближенных формул в процентном выражении составили:
- для определения ошибок положения 56,4 %;
- для вычисления точности дирекционных углов – 33,3 %.

Используя возможности ПК, начертим изолинии ошибок, по ним видно, что точность положения пункта в середине полигона выше, чем на его краях. Это подтверждают исследования К.Л. Проворова.

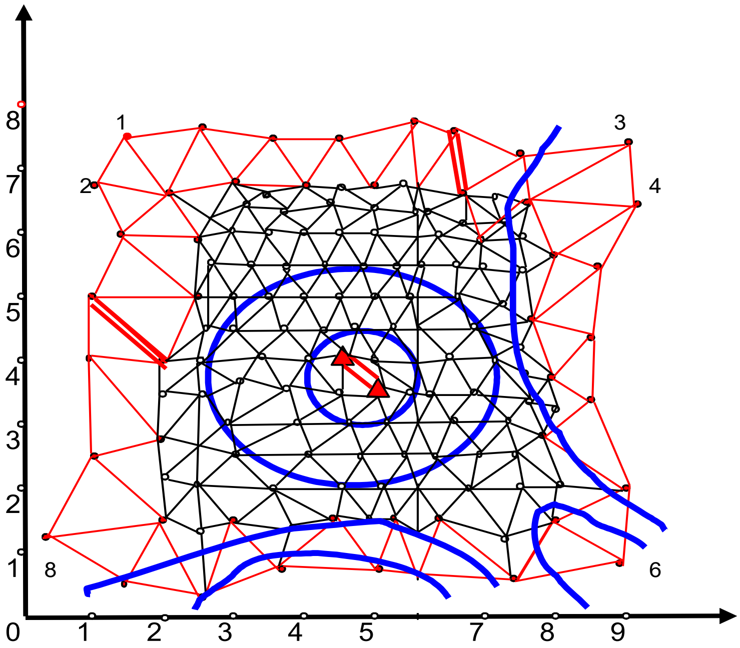

Рис. 2. Схема сплошной сети триангуляции

Оценка точности трилатерации. Рассмотрим оценку точности равностороннего ряда трилатерации (см. рис. 1). Средняя квадратическая ошибка азимута связующей стороны ряда трилатерации вычисляется по формуле [3]:

$$m_{\alpha_n}^{//2} = m_{\alpha_0}^2 + \frac{3}{4}\frac{m_S{}^2}{S^2}\rho''^2 n ,$$

где m_{α_0} – средняя квадратическая ошибка азимута исходной стороны; m_S – средняя квадратическая ошибка измеренной стороны; S – длина стороны; n – число треугольников ряда.

Средняя квадратическая ошибка азимута связующей стороны при уравнивании за условия азимутов равна

$$m_{\alpha_k}^2 = \frac{m_{\alpha_0}}{2} + \frac{3}{4}\left(\frac{m_S}{S}\right)^2 \cdot \frac{k}{n}(n-k) ,$$

где k – номер связующей стороны ряда трилатерации.

Средние квадратические значения продольного и поперечного сдвигов конечной точки ряда [3]

$$m_L = \mu_S\sqrt{\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}} ;$$

$$m_q = \mu_S\sqrt{\frac{4n^4 + 8n^3 + 143n^2 + 28n - 48}{72(2n+1)}} ,$$

где μ_S – средняя квадратическая ошибка единицы веса.

Применяя эти формулы, получим: m_{α_n} = 2,22"; m_{α_k} = 1,24"; m_L = 0,90 м; m_q = 5,52 м; общий сдвиг конечной точки ряда u = 5,59 м.

После счета по программе общий сдвиг точки 19 был равен u = 1,24 м. Ошибка приближенной формулы составила 350 %.

Оценка точности линейно-угловых сетей. Для определения взаимного положения пунктов в сетях, построенных методом четырехугольников без диагоналей, необходимо знать все элементы каждого четырехугольника.

В исходном четырехугольнике измеряются две смежные стороны, а в каждом последующем – одна сторона, смежная с той, которая получена из вычисления предыдущей. Поэтому необходимо различать стороны измеренные и вычисленные. В каждом четырехугольнике две стороны, по которым вычисляют остальные, называют исходными; одна сторона – связующая; вторая – промежуточная. Кроме этого, необходимы исходные стороны.

Опорные сети могут состоять из построений, образующих простые или двойные ряды, а также сплошные сети (рис. 3 и 4). При этом необходимые исходные стороны могут быть расположены так, что составляют одну ломаную линию или их расположение может образовывать линию, чередующуюся с вычисленными сторонами, именно такую, как на рисунках.

Оценку точности пунктов сети четырехугольников второго разряда выполним по формуле [4]:

$$\left(\frac{M}{L}\right)^2 = \frac{1}{n}\left(\frac{m_a}{a}\right)^2 \frac{n^3 + 1,45n^2 + 2,89n - 1}{3n^2}\left(\frac{\mu^2}{\rho^2}\right), \tag{24}$$

где M – ошибка в положении наиболее слабого места сети; L – протяженность в метрах сети четырехугольников в одном направлении; n – число полигонов; $\frac{m_a}{a}$ – относительная ошибка измерения необходимых сторон; μ – средняя квадратическая ошибка единицы веса.

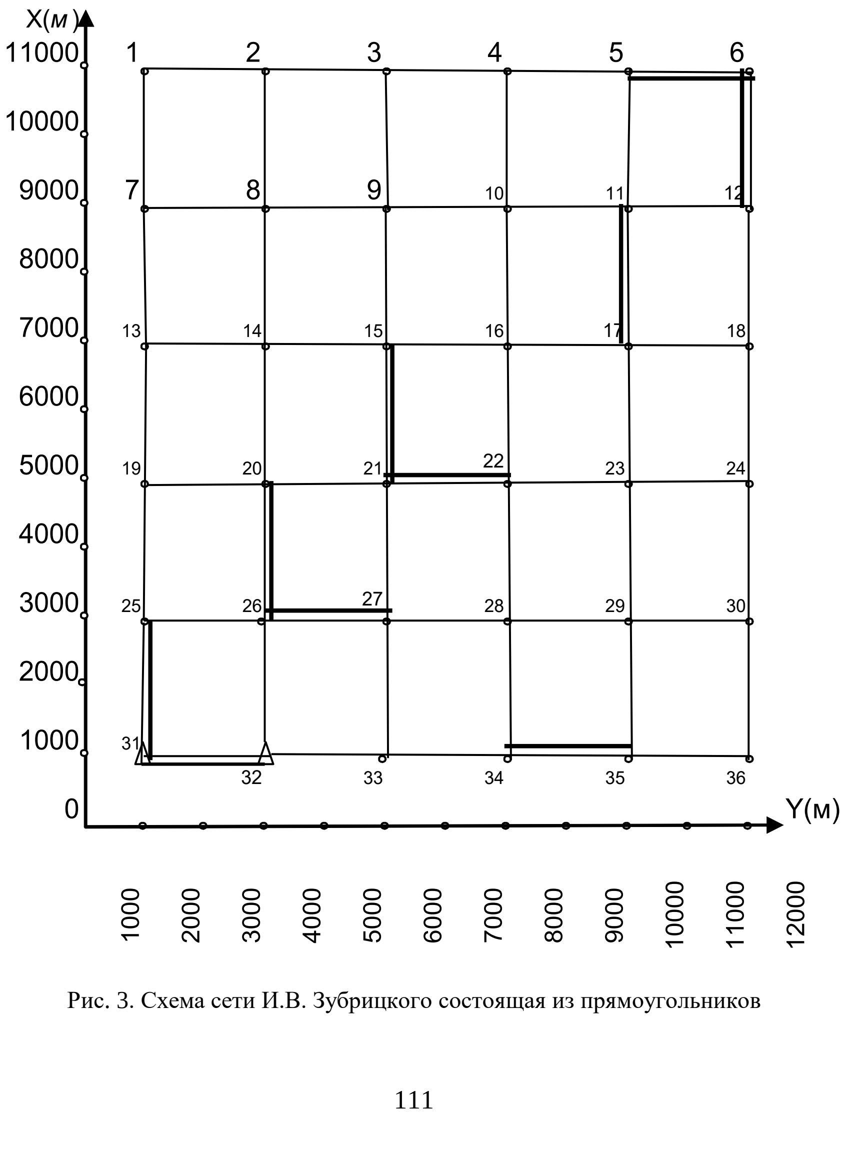

Рис. 3. Схема сети И.В. Зубрицкого состоящая из прямоугольников

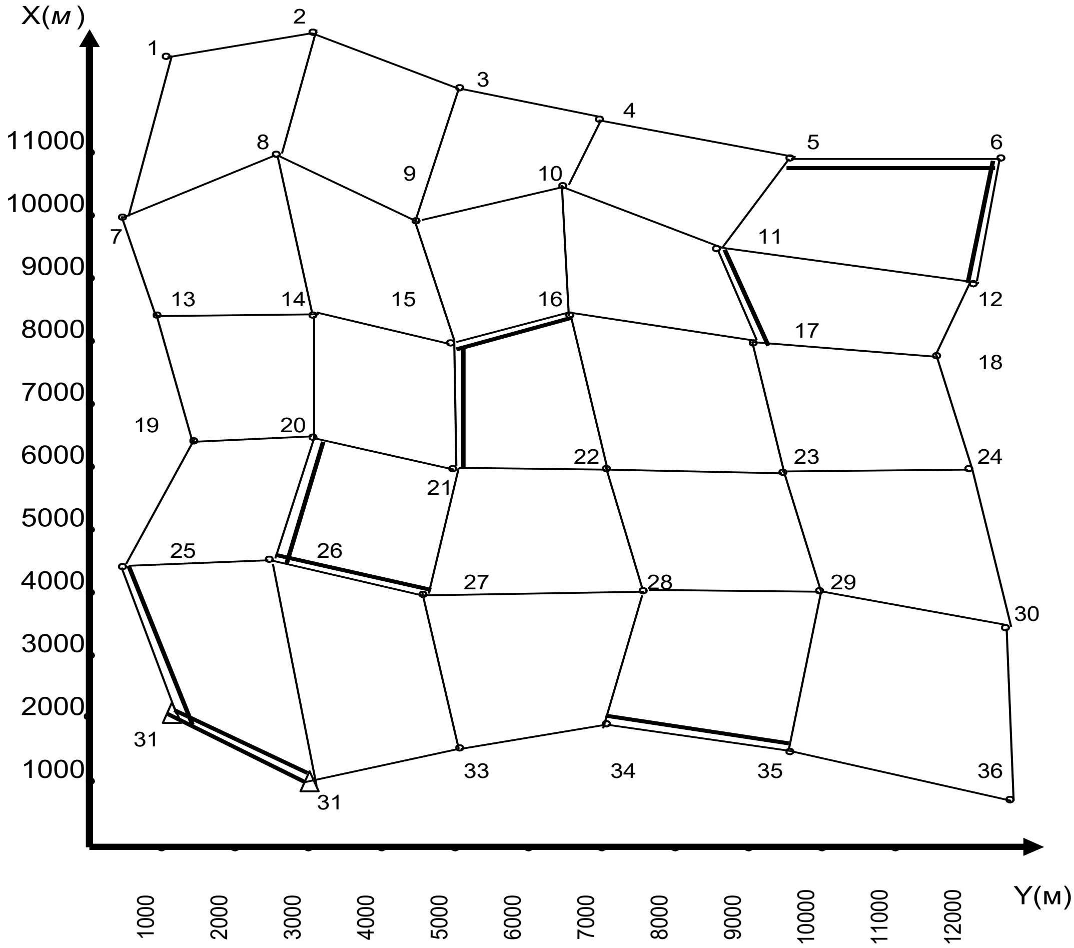

Рис. 4. Схема сети И.В. Зубрицкого, состоящая из непрямоугольников
(значения средних квадратических ошибок координат будут m_x, m_y = 0,13 м)

Для определения ошибок координат служат формулы Г.С. Броншнейна:

$$m_{x_i} = 0,53 m_\alpha S_{(c)} \sqrt{\frac{i_y (n_y - i_y)}{n_y - 1}};$$
$$m_{y_i} = 0,53 m_\alpha S_{(c)} \sqrt{\frac{i_x (n_x + i_x)}{n_x - 1}}, \qquad (25)$$

где i_x, i_y – номер определяемого пункта по осям координат; n_x, n_y – число сторон по координатным осям между определяемыми пунктами; $S_{(c)}$ – длина стороны сетки в сотнях метров; m_α – средняя квадратическая ошибка измерения угла.

Приняв L = 10000 м; n = 25; $\frac{m_a}{a} = \frac{1}{40000}$; $\mu = m_\beta = 10''$, получим M = 1,45 м.

При $m_\alpha = 10''$; $S_{(c)} = 20$; $i_x = i_y = 4$; $n_x = n_y = 6$ значения M, m_x, m_y будут одинаковы как для сети с правильными четырехугольниками, так и для сети, представленной на рисунке 4.

При счете на ЭВМ оценка точности для сети правильной формы составила: $m_\alpha = 12,03''$; $\frac{m_s}{S} = \frac{1}{9180}$; самый слабый пункт сети – 16, ошибка в положении которого составила 0,16 м.

Ошибка приближенной формулы при определении точности координат – 126,6 %.

Для сети, состоящей из не прямоугольных четырехугольников, $m_\alpha = 12,21$; $\frac{m_s}{S} = \frac{1}{6190}$, а самый слабый 6 пункт сети будет определен с ошибкой 0,74 м.

Ошибка приближенной формулы (24) составила 95,9 %. Недостатком формулы (24) является то, что она не учитывает значения углов и длин сторон, т.е. как для сети из квадратов, так и для сети из произвольных четырехугольников получена одинаковая ошибка положения в наиболее слабом месте – 1,45 м, в то время как на ЭВМ получено 0,74 и 0,64 м соответственно.

Заключение. Из всего вышеизложенного можно сделать вывод, что проведенные исследования подтвердили обоснованность применения приближенных формул для предварительной оценки характеристик точности проектируемых геодезических сетей. Но учет геометрических особенностей конкретной сети, который можно сделать при применении строгих методов, заложенных в программе для ПК, позволяет нам иметь более точные результаты. Так, при обработке рядов треугольников триангуляции формулы (1)…(3) полностью учитывают геометрические особенности сети. Результаты вычислений по ним полностью совпадают с вычислениями по программе для ПК. То же самое можно сказать и о формулах (4) и (5) для связующей стороны висячего тригонометрического хода.

При уравнивании цепи треугольников по направлениям, используя формулы А.А. Изотова и сравнивая результаты вычислений по ним с результатами, полученными по программе для ПК, можно сказать, что ошибка приближенных формул в процентном выражении составила: для вычисления ошибок положения – 71,2 %; для вычисления дирекционных углов – 8,7 %.

Если вычисления выполняются для звена тригонометрического ряда, то, сравнивания результаты вычислений по формулам (14)…(19) с результатами вычислений по программе со строгим способом уравнивания, видим, что погрешность приближенных формул для определения ошибок положения составила 11,2 %, а для определения дирекционных углов – 174 %.

Исследования, выполненные по предрасчету точности сплошной сети триангуляции по формулам профессора К.Л. Проворова (20) и по программе для ПК, дали идентичные результаты, а использование приближенных формул (22) и (23) показало: погрешности последних для ошибок положения – 56,4 %; для определения точности дирекционных углов – 33 %.

При рассмотрении ряда трилатерации, можно говорить о том, что погрешности использования приближенных формул по сравнению с программным обеспечением составили 350 %. Поэтому для предрасчета точности трилатерации просто необходимо пользоваться строгими методами уравнивания.

Для предрасчета точности линейно-угловых сетей, построенных методами четырехугольников без диагоналей И.В. Зубрицкого, использовали формулы Г.С. Бронштейна (25) и формулу (24). При обработке сети, состоящей из правильных четырехугольников, ошибка приближенных формул составила 126,6 %.

При рассмотрении сети, состоящей из произвольных четырехугольников, погрешность приближенных формул составила 95,6 %. Кроме этого, независимо от вида сети, приближенные формулы дают одинаковую ошибку положения в слабом месте сети, т.е. формулами не учитываются геометрические особенности геодезического построения.

Таким образом, на основе проведенных исследований сравнивания результатов предрасчета точности построения различных видов геодезических сетей на стадии проектирования по готовым приближенным формулам и по программе для ПК можно говорить о необходимости выполнения подобных расчетов на основе именно строгого способа уравнивания, так как это в свою очередь дает реальную картину ожидаемых технических характеристик конкретной проектируемой геодезической сети.

ЛИТЕРАТУРА

1. Практикум по высшей геодезии (вычислительные работы): учеб. пособие для вузов / Н.В. Яковлев [и др.]. – М.: Недра, 1982. – 368 с.
2. Красовский, Ф.Н. Руководство по высшей геодезии / Ф.Н. Красовский, В.В. Данилов. – Ч. 1, вып. 1. – М.: Недра, 1967. – 28 с.
3. Зайцев, А.К. Трилатерация / А.К. Зайцев. – М.: Недра, 1989. – 213 с.
4. Зубрицкий, И.В. Построение опорных пунктов при геодезических работах / И.В. Зубрицкий, А.И. Багреев, И.Д. Васильнов. – Минск: Ураджай, 1958. – 107 с.

Поступила 15.10.2007