

ГЕОДЕЗИЯ

УДК 528.063

О НЕОДНОЗНАЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ УРАВНИВАНИЯ И ЧИСЕЛ ОБУСЛОВЛЕННОСТИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ КОРРЕЛАТНОГО СПОСОБА УРАВНИВАНИЯ

д-р техн. наук, проф. В.И. МИЦКЕВИЧ, канд. техн. наук, доц. Л.А. ЧЕРКАС,
П.Ф. ПАРАДНЯ, В.Е. ПЛЮТА
(Полоцкий государственный университет)

В связи с наличием в геодезических сетях избыточных измерений координаты пунктов и величины их функций без уравнивания определяются неоднозначно. Задача уравнивания заключается в том, чтобы, используя все результаты уравнивания, получить однозначно все неизвестные. Кроме того, наличие избыточных измерений позволяет выполнять оценку их точности, надежно проконтролировать и повысить точность искомых величин. Обычно уравнивание выполняется по методу наименьших квадратов параметрическим или коррелятным способом. При использовании первого из них решение заключается в непосредственном получении неизвестных параметров. В коррелятном способе решается задача на условный экстремум для системы условных уравнений, которые составляют исходя из геометрических связей, возникающих в сети. Эти системы уравнений могут составлять неоднозначно и, следовательно, приводить к разным значениям результатов уравнивания. Это противоречит незыблемым канонам, согласно которым два способа уравнивания приводят к одинаковым результатам, отличающимся на небольшую величину из-за ошибок округления. В статье на реальном примере уравнивания геодезического четырехугольника показано, что разные результаты уравнивания получаются, в основном, не из-за ошибок округления, а из-за различной обусловленности систем нормальных уравнений.

Введение. Проблема уравнивания геодезических измерений и построений является одной из наиболее актуальных в геодезии. Под уравниванием обычно понимают решение трехэтапной задачи: определение по результатам измерений наиболее надежных значений искомых величин и их функций; оценка точности результатов измерений; оценка точности функций измеренных величин. В основу практического использования метода наименьших квадратов два его основных способа уравнивания: параметрический и коррелятный и их комбинации [1]. Традиционно считается, что два этих способа дают близкие результаты уравнивания, различающиеся лишь из-за ошибок округления.

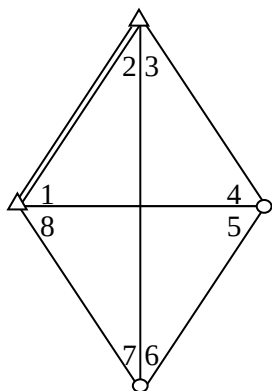
В статье на примере реального геодезического четырехугольника доказывается, что основной причиной флуктуации конечных результатов уравнивания коррелятным способом являются не только ошибки округления, но и плохая обусловленность матрицы нормальных уравнений коррелят.

Основная часть. В геодезических вычислениях при использовании коррелятного или параметрического способа уравнивания применяют различные числа обусловленности [1]. Чаще всего берут первое число Тюринга:

$$C_1 = \|R\|_E \cdot \|Q\|_E \quad (1)$$

или число Тодда:

$$C_2 = \frac{\max |\lambda_i|}{\min |\lambda_i|}, \quad (2)$$



Геодезический четырехугольник

где R – матрица коэффициентов нормальных (параметрических) уравнений поправок; $Q = R^{-1}$; λ_i – собственные числа матрицы R . При этом C_1 и C_2 являются числами одного и того же порядка, хотя по величине отличаются между собой. Когда число определяемых пунктов находится в пределах $1 \leq K \leq 10$, числа обусловленности для параметрического способа уравнивания $1 \leq C_p \leq 500$, а для классического коррелятного способа $1 \leq C_K \leq 10^6$, что уже может повлиять на результаты уравнивания.

На примере геодезического четырехугольника (рисунок) [2] поясним случаи большой флуктуации C_K .

Имеем: $K = 2$; $C_p = 15$, которое вычислено по матрицам A и $R = A^T A$.

Матрица A коэффициентов параметрических уравнений поправок имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} -179,37 & 23,81 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11,92 & 132,0 \\ 239,51 & 162,38 & 11,92 & -132,0 \\ -60,14 & -186,19 & 0 & 0 \\ -98,22 & -104,04 & -81,15 & 127,84 \\ -81,15 & 127,84 & 69,22 & 4,16 \\ 0 & 0 & 83,04 & 45,81 \\ 179,35 & -23,81 & -71,12 & -177,81 \end{bmatrix}$$

В параметрическом способе уравнивания матрица A характеризует геометрию сети, поэтому число обусловленности C_p может быть вычислено в двух вариантах при уравнивании триангуляции по углам или по направлениям. По-другому обстоит дело в коррелятном способе. В таблице 1 приведена матрица коэффициентов условных уравнений B для геодезического четырехугольника:

- строки 1...4 и 7 – коэффициенты всех возможных условных уравнений фигур;
- строки 5 и 6 – коэффициенты линейных уравнений;
- строки 8...12 – коэффициенты всех возможных условных уравнений полюса.

В геодезической литературе при уравнивании геодезического четырехугольника коррелятным способом брались в обработку 3 условия фигур и одно условное уравнение полюса.

Легко проверить, что при наличии четырех избыточных измерений нельзя включать в обработку сразу 4 линейных условия или 4 синусных условия.

Подсчитаем число возможных вариантов для четырех независимых уравнений в следующем порядке:

- 1) три линейных условия и одно условие полюса (число сочетаний из $n = 7$, но $m = 3$;

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = 35$$

и для пяти условных уравнений полюса окончательно имеем $35 \times 5 = 175$ вариантов);

2) два линейных условия и два синусных условия (число $C_n^m = C_7^2 = 21$ вариантов линейных уравнений и $C_n^m = C_5^2 = 10$ вариантов полюсных условий; окончательно имеем $21 \times 10 = 210$ вариантов);

3) одно линейное условие и три синусных условия, ($C_7^1 = 7$ вариантов линейных уравнений; $C_5^3 = 10$ вариантов для условий полюса, окончательно имеем $7 \times 10 = 70$).

В итоге: $175 + 210 + 70 = 455$ вариантов.

Таблица 1

Коэффициенты всех возможных условных уравнений для геодезического четырехугольника

№ п/п	Номера измеренных углов							
1	1	1	0	0	0	0	1	1
2	1	1	1	1	0	0	0	0
3	0	0	0	0	1	1	1	1
4	0	0	1	1	1	1	0	0
5	1	1	0	0	-1	-1	0	0
6	0	0	1	1	0	0	-1	-1
7	1	1	1	1	1	1	1	1
8	-1,2812	1,2214	-0,5537	1,1226	-0,8381	1,9421	-1,9659	0,2539
9	0	1,4038	0,1824	1,1226	-0,8381	0,7211	-1,2448	0
10	-1,7207	0	0	1,5227	0,0301	1,9421	-1,9659	-0,4395
11	-1,2812	-0,1824	-0,7361	0	0	1,2210	-0,7211	0,2539
12	0,4395	1,2214	-0,5537	-0,0301	-0,8682	0	0	0,6934

Выберем из таблицы 1 четыре строки из двенадцати такие, чтобы они были независимы, и найдем C_{K1} из 455 вариантов. Некоторые полярные значения C_{K1} показаны в таблице 2.

Таблица 2

Результаты вычислений, выбранные из 455 вариантов

№ п/п	Номера строк для независимых 4-х уравнений из таблицы 1				Числа обусловленности, найденные по формуле (1) для коррелятного способа (C_{K1})
1	1	4	9	11	6,41
2	6	7	11	12	3,98
3	1	7	8	12	412,0
4	1	7	10	11	47,4
5	1	2	10	11	50 600
6	2	6	10	11	36 800

По данным таблицы 2 просматриваются серьезные изменения C_{K1} для одного и того же геодезического четырехугольника в зависимости от выбранных четырех условных уравнений из таблицы 1.

Рассмотрим C_{KP} для коррелятно-параметрического способа уравнивания [3].

В таблице 3 приведены коэффициенты матрицы B^* , из которой можно выбрать любые независимые 4 строки (63 варианта)

Таблица 3

Коэффициенты матрицы $B^* = E - A(A^T A)^{-1} A^T$

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,4584	0,2449	0,2198	0,0768	-0,0297	-0,2669	0,2430	0,0536
2	0,2449	0,5778	-0,0228	0,2001	-0,2735	0,0962	-0,0590	0,2363
3	0,2198	-0,0228	0,4828	0,3202	0,2333	-0,0363	0,0091	-0,2061
4	0,0768	0,2001	0,3202	0,4028	0,0700	0,2070	-0,1931	-0,0838
5	-0,0297	-0,2735	0,2333	0,0700	0,4838	0,2129	0,2598	0,0435
6	-0,2669	0,0962	-0,0363	0,2070	0,2129	0,6164	-0,0757	0,2464
7	0,2430	-0,0590	0,0091	-0,1931	0,2598	-0,0757	0,5419	0,2741
8	0,0536	0,2363	-0,2061	-0,0838	0,0435	0,2464	0,2741	0,4360

Выберем из таблицы 3 четыре строки из восьми, соответствующие избыточным измерениям.

Полярные значения C_{KP2} для чисел Тодда представлены в таблице 4.

Таблица 4

Результаты вычислений, выбранные из 63 вариантов

№ п/п	Номера строк из B^* для 4-х избыточных измерений				Числа обусловленности C_{KP2}
1	1	4	5	8	2,10
2	2	4	6	7	5,22
3	1	2	3	5	6,51
4	1	4	6	7	147
5	2	3	5	6	187
6	1	3	5	7	535

По данным таблиц 2 и 4 видно, что для классического коррелятного способа уравнивания целесообразно вычислять числа обусловленности, так как их значения могут отличаться более чем на $4 \cdot 10^4$, в зависимости от случайно выбранного варианта коэффициентов условных уравнений.

Чтобы определить, как влияет плохая обусловленность матриц нормальных уравнений на результаты уравнивания, обратимся к таблице 5, где в столбцах 2, 3, 4 приведены поправки в измерения из уравнивания коррелятным и параметрическим способом при различной обусловленности.

Таблица 5

Результаты уравнивания геодезического четырехугольника

Обозначения	Коррелятный способ ($C = 12,7$)	Коррелятный способ ($C = 50608$)	Параметрический способ ($C = 18,1$)
1	2	3	4
V_1	-8,42	-8,71	-8,67
V_2	12,17	11,70	12,25
V_3	-13,95	-13,33	-13,80
V_4	0,202	0,343	0,219
V_5	-1,36	-0,395	-1,31
V_6	22,11	22,28	21,89
V_7	0,252	0,950	0,450
V_8	19,00	19,06	18,97
ΣV^2	12,66	1252	1256
μ	17,8	17,7	17,7

Источник: [2]

В заключение по результатам исследований можно сделать следующие **выводы**:

- 1) параметрический способ уравнивания позволяет достаточно точно и однозначно вычислить числа обусловленности;
- 2) коррелятный способ уравнивания дает неоднозначные значения C_k для геодезического четырехугольника и трехвершинной центральной системы, что является безусловно новым результатом;
- 3) результаты уравнивания полигонометрии коррелятным способом не будут многовариантными;
- 4) при уравнивании геодезической сети коррелятным способом рекомендуется вычислять числа обусловленности матрицы нормальных уравнений, так как при их наименьшем значении результаты уравнивания будут близки к расчетам при параметрическом способе обработки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маркузе, Ю.И. Уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей / Ю.И. Маркузе. – М.: Недра. – 1982. – 191 с.
2. Мицкевич, В.И. О невозможности поиска грубых ошибок измерений при параметрическом способе уравнивания / В.И. Мицкевич // Геодезия и картография. – 1994. – № 4. – С. 24 – 26.
3. Мицкевич, В.И. Коррелятно-параметрическое уравнивание геодезических сетей с применением корреляционной матрицы поправок измерений / В.И. Мицкевич, В.Е. Плюта // Вестн. Полоцк. гос. ун-та. Сер. В. Прикладные науки. – 2006. – № 9. – С. 89 – 91.

Поступила 15.10.2007