УДК 624.072

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК

канд. техн. наук, доц. Л.С. ТУРИЩЕВ
(Полоцкий государственный университет)

Рассматриваемый метод позволяет определять для неразрезных балок с произвольным числом пролетов собственные частоты свободных колебаний без составления и раскрытия определителя. Свободные колебания неразрезной балки рассматриваются как вынужденные колебания свободной балки под действием реакций удаленных опорных связей. Для описания этих колебаний по рекуррентной формуле строится так называемая обобщенная динамическая функция Грина. Идея ее построения состоит в том, что динамическая функция Грина свободной балки последовательно «исправляется» при каждом присоединении к ней опорных стержней. Приравнивая к нулю «исправленные» динамические функции Грина, начиная с третьего и последующих шагов присоединения, получаются уравнения, позволяющие найти собственные частоты неразрезных балок с двумя и более пролетами. Рассмотренный метод обобщенной динамической функции Грина следует рассматривать как неявный прием раскрытия определителя, связанного с получением частотного уравнения методом сил.

Введение. Современные конструкции под действием высокочастотных динамических нагрузок испытывают вибрации с одновременным возбуждением большого числа собственных форм колебаний. Поэтому определение характеристик высших составляющих свободных колебаний представляет практический интерес.

Известно, что определение собственных частот свободных колебаний балочных конструкций можно осуществлять методом начальных параметров, методами сил и перемещений. Однако применение этих методов к неразрезным балкам с произвольным числом пролетов сопряжено с вычислительными трудностями. Такие трудности порождаются высоким порядком определителя, связанного с частотным уравнением, громоздкостью элементов определителя, являющихся трансцендентными функциями частотного коэффициента, и возможностью возникновения неустойчивости вычислительного процесса при большом числе пролетов неразрезных балок.

Рассматриваемый в статье метод, основанный на использовании динамической функции Грина [1], позволяет определять для неразрезных балок с произвольным числом пролетов собственные частоты свободных колебаний без составления и раскрытия определителя.

Известно, что функция Грина в стержневых конструкциях позволяет определять единичное перемещение в произвольном сечении от действия приложенной в произвольном месте силы, равной единице. Принято считать, что динамическую функцию Грина можно построить только для закрепленных объектов. Однако если в число собственных форм свободных колебаний балки включить формы движения плоского абсолютно твердого тела как собственные формы с нулевыми частотами, то можно построить динамическую функцию Грина для свободной балки.

Смещенное положение балки как плоского абсолютно твердого тела в произвольный момент времени (рис. 1) описывается выражением:

$$w(x) = A + B\xi\, l,$$

где $\xi = \dfrac{x}{l}$ – безразмерная абсцисса сечения; $A,\ B$ – произвольные постоянные.

Рис. 1. Смещенное положение балки как плоского абсолютно твердого тела

Используя условия динамического равновесия, можно найти произвольные постоянные A, B.

Тогда нормированные формы движения принимают вид:

- для поступательного движения:

$$W_{01} = \frac{1}{\sqrt{l}};$$

- для вращательного движения:

$$W_{02} = \frac{\sqrt{3}}{l}(1-2\xi).$$

Особенностью этих форм является их взаимная ортогональность и ортогональность к формам колебаний балки как деформируемого тела.

Рассмотрим свободную балку, подверженную действию некоторой возмущающей гармонической силы с круговой частотой θ (рис. 2).

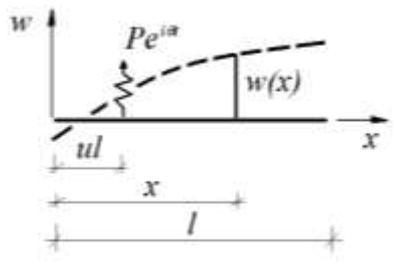

Рис. 2. Свободная балка под действием гармонической силы

Дифференциальное уравнение движения такой балки, с учетом деформируемости материала, имеет вид:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{m}{EI}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{P(ul)}{EI} e^{i\theta t}\delta(x-ul), \tag{1}$$

где EI – изгибная жесткость поперечного сечения балки; m – погонная масса балки; $\delta(x-ul)$ – дельта-функция.

Для установившегося процесса решение (1) находится методом Фурье и имеет вид:

$$w(x) = W(x)e^{i\theta t}. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получим уравнение относительно амплитудной функции $W(x)$:

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - k^4 W = \frac{P(ul)}{EI}\delta(x-ul), \tag{3}$$

где $k^4 = \dfrac{m\theta^2}{EI}$ – частотный коэффициент.

Амплитудная функция $W(x)$, являющаяся решением уравнения (3), раскладывается в ряд по собственным формам свободной балки, включая в их число формы движения балки как абсолютно твердого тела:

$$W(x) = W_{01} + W_{02} + \sum_n A_n W_n, \tag{4}$$

где $W_n = \dfrac{1}{\sqrt{l}}\left[\left(ch\lambda_n\xi + \cos\lambda_n\xi\right) - \sigma_n(sh\lambda_n\xi + \sin\lambda_n\xi)\right]$ – нормированные собственные формы колебаний свободной балки как деформируемого тела. Входящие в них коэффициент σ_n и безразмерный частотный коэффициент $\lambda_n = k_n l$ принимают согласно [2] следующие значения:

$$\sigma_1 = 0{,}98250, \quad \lambda_1 = 4{,}731;$$

$$\sigma_2 = 1,00078, \quad \lambda_2 = 7,853;$$

$$\sigma_3 = 0,99997, \quad \lambda_3 = 11,033;$$

$$\sigma_4 = 1,00000, \quad \lambda_4 = 14,137;$$

$$\sigma_5 = 1,00000, \quad \lambda_1 = 16,877;$$

$$\sigma_n = 1,00000, \quad \lambda_n = \pi\frac{2n+1}{2} \qquad (n > 5).$$

После отыскания коэффициентов A_n получим, что амплитудная функция для установившегося процесса колебаний свободной балки имеет вид произведения возмущающей силы на некоторую функцию

$$W(\xi) = P(u)G_0(u,\xi)\,. \tag{5}$$

Входящая в (5) функция

$$G_0(u,\xi) = \frac{12\xi u - 6(\xi+u)+4}{-\lambda^{-4}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{W_n(u)W_n(\xi)}{\lambda_n^4 - \lambda^{-4}} \tag{6}$$

и является динамической функцией Грина свободной балки.

При произвольном количестве возмущающих сил выражение (5) для амплитудной функции примет вид:

$$W(\xi) = \sum_i P(u_i)G_0(u_i,\xi)\,. \tag{7}$$

Полученную динамическую функцию можно использовать для определения собственных частот свободных колебаний неразрезных балок. Для этого необходимо воспользоваться приемом, предложенным И.М. Рабиновичем. Его суть заключается в том, что собственные колебания несвободных систем можно рассматривать как вынужденные колебания свободной системы. При этом роль возмущающих сил играют реактивные силы, присущие каждому виду присоединяемого объекта, – связь, масса. Частота таких возмущающих сил может принимать значения собственных частот несвободной системы.

Тогда свободные колебания неразрезной балки можно рассматривать как вынужденные колебания свободной балки под действием реакций удаленных опорных связей. Для описания этих колебаний, используя динамическую функцию Грина, строится обобщенная динамическая функция Грина. Идея ее построения состоит в том, что динамическая функция Грина свободной балки последовательно «исправляется» при каждом присоединении к ней опорных стержней.

Рассмотрим построение обобщенной динамической функции Грина на примере двухпролетной неразрезной балки.

Сначала присоединим к свободной балке опору в начале координат (рис. 3).

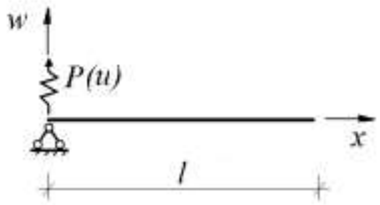

Рис. 3. Свободная балка с присоединенной опорой

Тогда выражение для амплитудной функции, с учетом того, что $u = 0$, примет вид:

$$W(\xi) = P(0)G_0(\xi, 0).$$

Затем присоединим вторую опору в промежуточном сечении $u_2 l$ (рис. 4).

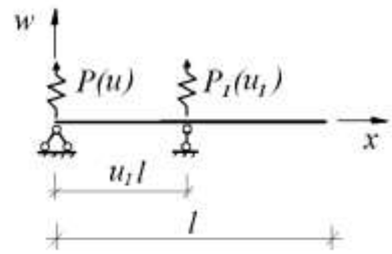

Рис. 4. Свободная балка с двумя присоединенными опорами

Тогда выражение для амплитудной функции примет вид:

$$W(\xi) = P(0)G_0(0,\xi) + P_1(u_1)G_0(u_1,\xi). \tag{8}$$

Используя условие:

$$W(u_1) = 0,$$

выразим $P_1(u_1)$ через $P(0)$

$$P_1(u_1) = -\frac{G_0(0,u_1)}{G_0(u_1,u_1)}P(0). \tag{9}$$

С учетом (9) выражение для амплитудной функции примет вид:

$$W(\xi) = P(0)G_1(0,\xi). \tag{10}$$

Входящая в (10) функция

$$G_1(0,\xi) = G_0(0,\xi) - \frac{G_0(u_1,\xi)G_0(0,u_1)}{G_0(u_1,u_1)}$$

является динамической функцией Грина первого шага.

И, наконец, присоединяя третью опору в концевом сечении свободной балки, получим двухпролетную неразрезную балку (рис. 5).

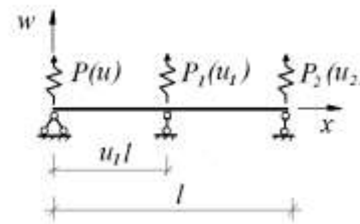

Рис. 5. Двухпролетная неразрезная балка

Проведя преобразования, аналогичные сделанным выше, получим следующее выражение для амплитудной функции:

$$W(\xi) = P(0)G_2(0,\xi). \tag{11}$$

Входящая в (11) функция, с учетом того, что $u_2 = 1$, имеет вид:

$$G_2(0,\xi) = G_1(0,\xi) - \frac{G_1(1,\xi)(1,\xi)G_1(0,1)(0,1)}{G_1(1,1)},$$

и является динамической функцией Грина второго шага или обобщенной динамической функцией Грина двухпролетной неразрезной балки.

Обобщая полученные соотношения, получим следующую рекуррентную формулу для *k*-того шага построения обобщенной функции Грина неразрезной балки с произвольным числом пролетов:

$$G_k(0,\xi) = G_{k-1}(0,\xi) - \frac{G_{k-1}(u_k,\xi)G_{k-1}(0,u_k)}{G_{k-1}(u_k,u_k)}. \tag{12}$$

Получаемый согласно (12) ряд динамических функций Грина учитывает последовательное присоединение опор к свободной балке и образует обобщенную динамическую функцию Грина неразрезной балки с произвольным числом пролетов. Её можно следующим образом использовать для определения собственных частот неразрезных балок. Приравнивая к нулю «исправленные» динамические функции Грина в начале координат, начиная с третьего и последующих шагов присоединения, получим уравнения, позволяющие найти собственные частоты неразрезных балок с двумя и более пролетами. Эти уравнения имеют вид:

$$G_k(0,0) = 0 \quad (k = 2,\ 3,\ \ldots).$$

Отметим одну качественную особенность в расположении собственных частот предыдущего и последующего шагов присоединения – в интервалах между смежными частотами предыдущего шага располагаются строго по одной частоте последующего шага. Причем собственные частоты каждого предыдущего шага являются точками разрыва «исправленной» динамической функции Грина последующего шага.

Заключение. Рассмотренный метод обобщенной динамической функции Грина следует рассматривать как неявный прием раскрытия определителя, связанного с получением частотного уравнения методом сил. При численной реализации метода на ЭВМ этот метод применим практически при любом числе пролетов неразрезной балки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Туровский, Л.М. Исследование свободных колебаний пластин с комбинированным «наполнением» / Л.М. Туровский, Г.П. Мудрый // Механика. – Воронеж, 1974. – Вып. 2. – С. 23 – 31.
2. Тимошенко, С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко. – М.: Физматгиз «Наука», 1967. – 442 с.

Поступила 30.10.2007