

УДК 528.063

О ПРИМЕНЕНИИ ОБОБЩЁННЫХ НЕТРАДИЦИОННЫХ МЕТОДОВ УРАВНИВАНИЯ

А.Ю. БУДО

(Полоцкий государственный университет)

Обобщённый метод L_p -оценок имеет широкое применение при обработке спутниковых GPS-измерений, являющихся зависимыми величинами. Исследования показали, что матрица Гессе, используемая в этом методе, как и в способе Ньютона, является симметричной, что позволяет легко и просто выполнить её обращение. Но в обобщённом методе L_p -оценок в матрице Гессе используется новая матрица Z . Если эта матрица симметрична, то и матрица H также будет симметрична. В статье доказывается, что матрица Z , в которой используется несимметричная весовая матрица C_1 , также является симметричной. Если бы матрица Z была несимметричной, то реализация обобщённого метода L_p -оценок была бы проблематична. Исследования, изложенные в статье, имеют теоретическое и практическое значение. Приведены расчёты по программному комплексу ООО, созданному в 1999 – 2004 годы для реализации метода L_p -оценок для одно- и многокритериальной оптимизации геодезических измерений. Программный комплекс KEMNIZ создан в 2005 – 2007 годах для реализации уравнивания плановых геодезических сетей обобщённым методом L_p -оценок.

Введение. Из теории математической обработки геодезических измерений известно, что уравнивание геодезического четырёхугольника классическим способом с привлечением углов, замыкающих горизонт, и обобщённым методом наименьших квадратов дают одинаковые результаты. На этом основываются все выполненные в статье исследования.

Целью статьи является сопоставление результатов математической обработки двух программных комплексов при одинаковой постановке задачи. В результате уравнивания геодезического четырёхугольника по направлениям как с привлечением углов, замыкающих горизонт, так и с использованием корреляционной матрицы поправок по методу наименьших квадратов.

Один и тот же геодезический четырёхугольник уравниваем трижды:

- 1) с использованием ориентирных углов [1];
- 2) с применением углов, замыкающих горизонт [2];
- 3) с использованием корреляционной матрицы поправок [3].

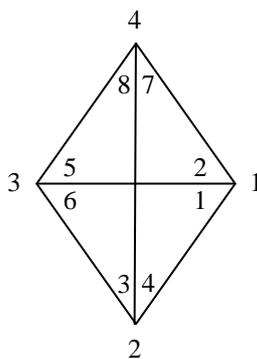
Первый случай реализуем отдельно без составления программы. Второй вариант – с применением программного комплекса ООО.bat и третий – с применением программы KEMNIOOO.bat.

Вторая часть исследований заключается в сравнении результатов уравнивания геодезического четырёхугольника по направлениям многокритериальным способом (МК) по четырём методикам:

- 1) нелинейным МК [1];
- 2) линейным МК [2];
- 3) МК с замыканием горизонта;
- 4) МК с привлечением корреляционной матрицы [3].

При этом методика 1 и 2 реализована программным комплексом ООО, а алгоритмы, входящие в 3, 4 – программным комплексом KEMNIZ.

1. Уравнивание геодезического четырёхугольника по МК с использованием углов, замыкающих горизонт, и корреляционной матрицы поправок K_n . Как отмечено во введении, рассмотрим уравнивание по направлениям для геодезического четырёхугольника, представленного на рисунке, тремя способами.



Геодезический четырёхугольник

1.1. Применение ориентирных углов. Для каждого измеренного направления составляется 12 параметрических уравнений поправок вида:

$$v_{AB} = -\delta Z_A + a_{AB} \delta x_A + b_{AB} \delta y_A + a_{BA} \delta x_B + b_{BA} \delta y_B + l_{AB}'' , \quad (1)$$

где $l_{AB} = a_{AB}^{выч} - Z_A^{выч} + M_{AB}$,

$$a_{AB} = \rho'' \frac{\Delta_{AB}}{S_{AB}^2} , \quad b_{AB} = -\rho'' \frac{\Delta x_{AB}}{S_{AB}^2} . \quad (2)$$

Поправки в углы при уравнивании четырёхугольника приведены в таблице (колонка 1).

1.2. Применение углов, замыкающих горизонт. Воспользуемся алгоритмом параметрического способа МНК с применением уравнений поправок, записанного для угла 1 (см. рисунок):

$$v_1 = a_{15} - a_{12} \delta x_1 + b_{15} - b_{12} \delta y_1 + a_{21} \delta x_2 + b_{21} \delta y_2 - a_{21} \delta x_2 - b_{21} \delta y_2 + l'' . \quad (3)$$

При этом надо учитывать, что для исходного пункта 3

$$\delta x_2 = \delta y_2 = 0 .$$

Таких уравнений поправок будет 12 (8 углов четырёхугольника и 4 угла, замыкающих горизонт).

Результаты уравнивания приведены в таблице (колонка 2).

1.3. Применение программы КЕМНЮОО с использованием углов, замыкающих горизонт. Здесь используется корреляционная матрица $K_n^{-1} = P$. Результаты вычислений приведены в таблице (колонка 3).

Поправки в углы из уравнивания геодезического четырёхугольника по направлениям

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3.91''	3.92''	3.90''	4.22''	4.62''	3.82''	0.51''	-0.24''
2	-0.26	-0.26	-0.26	1.16	-0.39	0.39	0.07	1.50
3	-2.30	-2.29	-2.30	-1.86	-0.98	0.36	-0.49	0.50
4	16.75	16.75	16.75	14.50	18.34	15.64	19.00	20.60
5	-12.25	-12.26	-12.26	-14.71	-11.11	-15.73	-11.44	-9.35
6	21.65	21.63	21.65	23.14	18.02	20.19	20.98	19.14
7	-13.39	-13.40	-13.39	-12.88	-15.57	-12.85	-12.58	-14.86
8	15.90	15.92	15.91	16.43	17.07	18.19	13.96	12.71
M ₁ , м	0.0683	0.0683	0.0683	0.0651	0.0723	0.0720	0.0304	0.0052
M ₂ , м	0.1009	0.1009	0.1009	0.1368	0.1014	0.0890	0.0457	0.0057

1.4. Уравнивание по направлениям с использованием корреляционной матрицы в программе КЕМНЮОО при $K_n^{-1} \neq P$ (без использования углов, замыкающих горизонт). Поправки в углы приведены в таблице (колонка 4) с использованием корреляционной матрицы, составленной по формуле Ю.И. Маркузе [4] при $K_n = P^{-2} R P^{-2}$.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	-0.5						
2	-0.5	1						
3			1	-0.5				
4			-0.5	1				
5					1	-0.5		
6					-0.5	1		
7							1	-0.5
8							-0.5	1

2. Уравнивание геодезического четырёхугольника по МК-способу

В колонке 5 таблицы приведены поправки в углы, полученные МК-методом без линеаризации параметрических уравнений (нелинейный метод Ньютона) [5].

В колонке 6 даны поправки в углы из уравнивания линейным МК-способом [6].

В колонке 7 приведены результаты вычислений МК-методом с применением углов, замыкающих горизонт.

В колонке 8 записаны поправки в углы при уравнивании линейным МК-способом с применением

$$K_n = P^{-2} R P^{-2} . \quad (4)$$

Вопросы многокритериального уравнивания плановых геодезических сетей методом Ньютона были рассмотрены в статье [5]. Линеаризованный вариант параметрического многокритериального способа изложен в статье [6]. Цель настоящей работы – применить линеаризованный метод для целевых функций:

$$\Phi_1(X) = \left(|L(X)|^{\frac{n}{2}} \right)^T \cdot K_n^{-1} \cdot |L(X)|^{\frac{n}{2}}; \quad (5)$$

$$\Phi_2(X, n) = \min \max M, \quad (6)$$

где n – показатель степени, определяемый под условиями (6) для каждого измерения; M – ошибка положения определяемого пункта.

Минимизация функции (5) осуществляется под условием минимума функции (6). Выполняется это следующим путём:

- 1) вычисляется M_i при $n = 2, 0$;
- 2) изменяется степень n для одного из N измерений с шагом $n_{j+1} = n_j \pm 0,1$ и вычисляется два вектора M_i ($i = 1, k$), где k – число определяемых пунктов;
- 3) запоминается то значение степени n_{j+1} , для которого выполняется функция (2);
- 4) за одно приближение вычисляются поправки в степень n для N измерений, количество итераций не более 20.

Для k -го пункта имеем ошибку положения:

$$M_k = \mu \sqrt{Q_{k,k} + Q_{k+1,k+1}}, \quad (7)$$

где

$$\mu_{MK} = \sqrt{\frac{V_{MK}^T K_n^{-1} V_{MK}}{r}}, \quad (8)$$

в которой r – количество избыточных измерений

$$V_{MK} = T_{MK}^{y_{pab}} - T^{изм}.$$

Обратная матрица весов вычисляется по формуле:

$$Q = FK_n F^T, \quad (9)$$

в которой при $K_n^{-1} = P$

$$F = H^{-1} A^T C_2,$$

при $K_n^{-1} \neq P$

$$F = \frac{2}{n \cdot n} H^{-1} A^T C_2,$$

$$H = Z + A^T C_2 A; \quad (10)$$

$$Z_{i,j} = \sum_{k=1}^N \sum_{r=1}^N a_{ki} a_{rj} \cdot \mathbf{C}_{1 \cdot k,r}, \quad (11)$$

$$\nabla \Phi = G = A^T C_3 \mathbf{1}, \quad (12)$$

$$\mathbf{1} = [1, \dots, 1]^T, \quad (13)$$

где $A_{N \times t}$ – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок с элементами a_{ij} ;

$$C_1 = K_n^{-1} \cdot \text{diag} \left(\frac{n_i |n_i - 2|}{2} \right) \cdot \left\{ |L_i(X)|^{\frac{n_i-4}{2}} \cdot \left[|L_i(X)|^{\frac{n_i}{2}} \right]^T \right\}; \quad (14)$$

$$C_2 = K_n^{-1} \cdot \text{diag}(S_i \cdot n_i) \cdot \left\{ |L_i(X)|^{\frac{n_i-2}{2}} \cdot \left[\text{diag} \left(S_i \cdot \frac{n_i}{2} \right) \cdot |L_i(X)|^{\frac{n_i-2}{2}} \right]^T \right\}; \quad (15)$$

$$C_3 = K_n^{-1} \cdot \text{diag}(S_i \cdot n_i) \cdot \left\{ |L_i(X)|^{\frac{n_i-2}{2}} \cdot \left[|L_i(X)|^{\frac{n_i}{2}} \right]^T \right\}. \quad (16)$$

При этом для обобщённого МНК имеем:

$$Q = A^T K_2^{-1} A^{-1}.$$

3. О свойствах дополнительной матрицы, прибавляемой к матрице Гессе при несимметричной весовой матрице.

Докажем, что дополнительная матрица Z является симметричной. Для доказательства искомого свойства докажем, что $\frac{\partial^2 \Phi(X)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \Phi(X)}{\partial x_2 \partial x_1}$. Для этого воспользуемся первыми частными производными целевой функции $\Phi(X)$, представленными в [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_1} = & n \cdot a_{11} \cdot D_{11} \cdot S_1 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + n \cdot a_{11} \cdot D_{12} \cdot S_1 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \\ & + n \cdot a_{11} \cdot D_{13} \cdot S_1 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + n \cdot a_{21} \cdot D_{12} \cdot S_2 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \\ & + n \cdot a_{21} \cdot D_{22} \cdot S_2 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + n \cdot a_{21} \cdot D_{23} \cdot S_2 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \\ & + n \cdot a_{31} \cdot D_{13} \cdot S_3 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + n \cdot a_{31} \cdot D_{23} \cdot S_3 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \\ & + n \cdot a_{31} \cdot D_{33} \cdot S_3 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}}, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & \cdots & D_{1N} \\ D_{21} & D_{22} & \cdots & D_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{N1} & D_{N2} & \cdots & D_{NN} \end{pmatrix} = K_n^{-1};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_2} = & n \cdot a_{12} \cdot D_{11} \cdot S_1 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + n \cdot a_{12} \cdot D_{12} \cdot S_1 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \\ & + n \cdot a_{12} \cdot D_{13} \cdot S_1 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + n \cdot a_{22} \cdot D_{12} \cdot S_2 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \\ & + n \cdot a_{22} \cdot D_{22} \cdot S_2 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + n \cdot a_{22} \cdot D_{23} \cdot S_2 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} + \\ & + n \cdot a_{32} \cdot D_{13} \cdot S_3 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + n \cdot a_{32} \cdot D_{23} \cdot S_3 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \\ & + n \cdot a_{32} \cdot D_{33} \cdot S_3 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Продифференцировав (17) по ∂x_2 , а (18) по ∂x_1 , найдём вторые частные производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi(X)}{\partial x_1 \partial x_2} = & n \cdot a_{11} \cdot D_{11} \cdot S_1 \cdot \left[\frac{n-2}{2} \cdot a_{12} \cdot S_1 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-2} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2} \cdot a_{12} \cdot S_1 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} \right] + \\ & + n \cdot a_{11} \cdot D_{12} \cdot S_1 \cdot \left[\frac{n-2}{2} \cdot a_{12} \cdot S_1 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-2} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2} \cdot a_{22} \cdot S_2 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} \right] + \\ & + n \cdot a_{11} \cdot D_{13} \cdot S_1 \cdot \left[\frac{n-2}{2} \cdot a_{12} \cdot S_1 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-2} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2} \cdot a_{32} \cdot S_3 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} \right] + \\ & + n \cdot a_{21} \cdot D_{12} \cdot S_2 \cdot \left[\frac{n-2}{2} \cdot a_{22} \cdot S_2 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-2} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2} \cdot a_{12} \cdot S_1 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} \right] + \\ & + n \cdot a_{21} \cdot D_{22} \cdot S_2 \cdot \left[\frac{n-2}{2} \cdot a_{22} \cdot S_2 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-2} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2} \cdot a_{22} \cdot S_2 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} \right] + \\ & + n \cdot a_{21} \cdot D_{23} \cdot S_2 \cdot \left[\frac{n-2}{2} \cdot a_{22} \cdot S_2 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-2} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2} \cdot a_{32} \cdot S_3 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} \right] + \\ & + n \cdot a_{31} \cdot D_{13} \cdot S_3 \cdot \left[\frac{n-2}{2} \cdot a_{32} \cdot S_3 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-2} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2} \cdot a_{12} \cdot S_1 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} \right] + \\ & + n \cdot a_{31} \cdot D_{23} \cdot S_3 \cdot \left[\frac{n-2}{2} \cdot a_{32} \cdot S_3 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-2} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2} \cdot a_{22} \cdot S_2 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} \right] + \\ & + n \cdot a_{31} \cdot D_{33} \cdot S_3 \cdot \left[\frac{n-2}{2} \cdot a_{32} \cdot S_3 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-2} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2} \cdot a_{32} \cdot S_3 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Phi^2(X)}{\partial x_2 \partial x_1} = & n \cdot a_{12} \cdot D_{11} \cdot S_1 \cdot \left[\frac{n-2}{2} \cdot a_{11} \cdot S_1 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-2} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2} \cdot a_{11} \cdot S_1 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} \right] + \\
& + n \cdot a_{12} \cdot D_{12} \cdot S_1 \cdot \left[\frac{n-2}{2} \cdot a_{11} \cdot S_1 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-2} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2} \cdot a_{21} \cdot S_2 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} \right] + \\
& + n \cdot a_{12} \cdot D_{13} \cdot S_1 \cdot \left[\frac{n-2}{2} \cdot a_{11} \cdot S_1 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-2} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2} \cdot a_{31} \cdot S_3 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} \right] + \\
& + n \cdot a_{22} \cdot D_{12} \cdot S_2 \cdot \left[\frac{n-2}{2} \cdot a_{21} \cdot S_2 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-2} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2} \cdot a_{11} \cdot S_1 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} \right] + \\
& + n \cdot a_{22} \cdot D_{22} \cdot S_2 \cdot \left[\frac{n-2}{2} \cdot a_{21} \cdot S_2 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-2} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2} \cdot a_{21} \cdot S_2 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} \right] + \\
& + n \cdot a_{22} \cdot D_{23} \cdot S_2 \cdot \left[\frac{n-2}{2} \cdot a_{21} \cdot S_2 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-2} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2} \cdot a_{31} \cdot S_3 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} \right] + \\
& + n \cdot a_{32} \cdot D_{13} \cdot S_3 \cdot \left[\frac{n-2}{2} \cdot a_{31} \cdot S_3 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-2} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2} \cdot a_{11} \cdot S_1 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} \right] + \\
& + n \cdot a_{32} \cdot D_{23} \cdot S_3 \cdot \left[\frac{n-2}{2} \cdot a_{31} \cdot S_3 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-2} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2} \cdot a_{21} \cdot S_2 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} \right] + \\
& + n \cdot a_{32} \cdot D_{33} \cdot S_3 \cdot \left[\frac{n-2}{2} \cdot a_{31} \cdot S_3 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-2} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2} \cdot a_{31} \cdot S_3 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} \right].
\end{aligned}$$

Упростив, полученные выражения, можно записать:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Phi(X)}{\partial x_1 \partial x_2} = & \frac{\partial^2 \Phi(X)}{\partial x_2 \partial x_1} = \\
= & n \cdot a_{11} \cdot D_{11} \cdot S_1 \cdot \frac{n-2}{2} \cdot a_{12} \cdot S_1 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-2} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + n \cdot a_{11} \cdot D_{11} \cdot S_1 \cdot \frac{n}{2} \cdot a_{12} \cdot S_1 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} + \\
& + n \cdot a_{11} \cdot D_{12} \cdot S_1 \cdot \frac{n-2}{2} \cdot a_{12} \cdot S_1 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-2} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + n \cdot a_{11} \cdot D_{12} \cdot S_1 \cdot \frac{n}{2} \cdot a_{22} \cdot S_2 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} + \\
& + n \cdot a_{11} \cdot D_{13} \cdot S_1 \cdot \frac{n-2}{2} \cdot a_{12} \cdot S_1 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-2} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + n \cdot a_{11} \cdot D_{13} \cdot S_1 \cdot \frac{n}{2} \cdot a_{32} \cdot S_3 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} + \\
& + n \cdot a_{21} \cdot D_{12} \cdot S_2 \cdot \frac{n-2}{2} \cdot a_{22} \cdot S_2 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-2} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + n \cdot a_{21} \cdot D_{12} \cdot S_2 \cdot \frac{n}{2} \cdot a_{12} \cdot S_1 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} + \\
& + n \cdot a_{21} \cdot D_{22} \cdot S_2 \cdot \frac{n-2}{2} \cdot a_{22} \cdot S_2 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-2} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + n \cdot a_{21} \cdot D_{22} \cdot S_2 \cdot \frac{n}{2} \cdot a_{22} \cdot S_2 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} + \\
& + n \cdot a_{21} \cdot D_{23} \cdot S_2 \cdot \frac{n-2}{2} \cdot a_{22} \cdot S_2 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-2} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + n \cdot a_{21} \cdot D_{23} \cdot S_2 \cdot \frac{n}{2} \cdot a_{32} \cdot S_3 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} + \\
& + n \cdot a_{31} \cdot D_{13} \cdot S_3 \cdot \frac{n-2}{2} \cdot a_{32} \cdot S_3 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-2} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + n \cdot a_{31} \cdot D_{13} \cdot S_3 \cdot \frac{n}{2} \cdot a_{12} \cdot S_1 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} + \\
& + n \cdot a_{31} \cdot D_{23} \cdot S_3 \cdot \frac{n-2}{2} \cdot a_{32} \cdot S_3 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-2} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + n \cdot a_{31} \cdot D_{23} \cdot S_3 \cdot \frac{n}{2} \cdot a_{22} \cdot S_2 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} + \\
& + n \cdot a_{31} \cdot D_{33} \cdot S_3 \cdot \frac{n-2}{2} \cdot a_{32} \cdot S_3 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-2} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + n \cdot a_{31} \cdot D_{33} \cdot S_3 \cdot \frac{n}{2} \cdot a_{32} \cdot S_3 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1},
\end{aligned}$$

откуда видно, что матрица

$$\begin{aligned}
Z = & n \cdot a_{11} \cdot D_{11} \cdot S_1 \cdot \frac{n-2}{2} \cdot a_{12} \cdot S_1 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-2} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + n \cdot a_{11} \cdot D_{12} \cdot S_1 \cdot \frac{n-2}{2} \cdot a_{12} \cdot S_1 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-2} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \\
& + n \cdot a_{11} \cdot D_{13} \cdot S_1 \cdot \frac{n-2}{2} \cdot a_{12} \cdot S_1 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-2} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + n \cdot a_{21} \cdot D_{12} \cdot S_2 \cdot \frac{n-2}{2} \cdot a_{22} \cdot S_2 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-2} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \\
& + n \cdot a_{21} \cdot D_{22} \cdot S_2 \cdot \frac{n-2}{2} \cdot a_{22} \cdot S_2 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-2} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + n \cdot a_{21} \cdot D_{23} \cdot S_2 \cdot \frac{n-2}{2} \cdot a_{22} \cdot S_2 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-2} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \\
& + n \cdot a_{31} \cdot D_{13} \cdot S_3 \cdot \frac{n-2}{2} \cdot a_{32} \cdot S_3 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-2} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + n \cdot a_{31} \cdot D_{23} \cdot S_3 \cdot \frac{n-2}{2} \cdot a_{32} \cdot S_3 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-2} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \\
& + n \cdot a_{31} \cdot D_{33} \cdot S_3 \cdot \frac{n-2}{2} \cdot a_{32} \cdot S_3 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-2} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}}
\end{aligned}$$

симметрична, потому что её значения в $\frac{\partial^2 \Phi(X)}{\partial x_1 \partial x_2}$ и $\frac{\partial^2 \Phi(X)}{\partial x_2 \partial x_1}$ одинаковы.

Отметим, что формулу (11) не удаётся записать в матричном виде.

Заключение

На основе выполненных исследований можно сделать следующие выводы:

- 1) программа OOO.bat даёт такие же поправки v_{β} (см. таблицу, колонка 2), что и классический МНК при уравнивании по направлениям (см. таблицу, колонка 1), и программа KEMNIZ для некоррелированных углов с использованием углов, замыкающих горизонт (см. таблицу, колонка 3). Так как поправки в колонках 1, 2, 3 одинаковы, то программные продукты во втором и третьем случаях работают верно;
- 2) программа KEMNIZ с использованием K_n (см. таблицу, колонка 4) даёт близкие к тем результатам уравнивания по углам, что и в первых трёх колонках;
- 3) при применении программы KEMNIMMM данные в колонках 7 и 8 таблицы отличаются лишь оценкой точности. Так, например, в колонке 7 данные получены с применением четырёх углов, замыкающих горизонт, а в колонке 8 – с применением K_n для восьми углов. Требуются дополнительные исследования по обоснованию малости величин оценок точности положения пунктов M_1 и M_2 (колонка 8);
- 4) важность выполненного исследования заключается в следующем: если бы матрица Z в выражениях вторых частных производных была бы несимметричной, то несимметричной оказалась бы матрица H и, следовательно, при её обращении потребовались бы специальные программы. Таким образом, видно, что матрица Z симметрична при несимметричности матрицы C_1 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Применение многокритериальной оптимизации при проектировании и уравнивании геодезических сетей / В.И. Мицкевич [и др.] // Вестн. Полоц. гос. ун-та. – 2004. – № 4. – С. 77 – 79.
2. Ялтыхов, В.В. Многократное уравнивание нуль-свободных плановых геодезических сетей / В.В. Ялтыхов, С.Г. Шнитко, П.М. Левданский // Вестн. Полоц. гос. ун-та. – 2006. – № 3. – С. 111 – 115.
3. Мицкевич, В.И. Исследования по переходу от нелинейного к линейному обобщённому методу Lp-оценок / В.И. Мицкевич, А.Ю. Будо, П.М. Туронок // Геодезия и кадастры: прошлое, настоящее и будущее: междунар. конф., Новополоцк, 26 – 28 октября 2006 г. – Новополоцк, 2006. – С. 89 – 100.
4. Маркузе, Ю.И. Уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей / Ю.И. Маркузе. – М: Недра, 1982. – 191 с.
5. Мицкевич, В.И. Многокритериальное уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей на основе метода Ньютона / В.И. Мицкевич, П.М. Левданский; Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк, 1999. – 9 с. – Деп в ОНТИ ЦНИИГАиК 28.06.1999 № 681-гд. 99 деп.
6. Мицкевич, В.И. Особенности уравнивательных вычислений по методу многокритериальной оптимизации / В.И. Мицкевич, О.Г. Скорик, В.В. Ялтыхов; Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк, 2002. – 4 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 17.09.02 № 776-гд. 02 деп.
7. Мицкевич, В.И. Алгоритм обобщённого метода Lp-оценок на основе метода Ньютона / В.И. Мицкевич, А.Ю. Будо // Вестн. Полоц. гос. ун-та. – 2006. – № 9. – С. 92 – 96.

Поступила 15.10.2009