

УДК 624.04

О РАСЧЕТЕ СЖАТО-ИЗОГНУТОГО СТЕРЖНЯ С УЧЕТОМ РАЗНОМОДУЛЬНОСТИ МАТЕРИАЛА

Л.С. Турищев

Полоцкий государственный университет, Республика Беларусь

e-mail: lst41@mail.ru

Рассматривается сжато-изогнутый стержень. Материал стержня характеризуется различными модулями упругости при растяжении и сжатии. Получено дифференциальное уравнение оси сжато-изогнутого стержня. Найдены формулы для определения параметров напряженно-деформированного состояния в произвольном сечении.

Ключевые слова: модуль упругости при растяжении, модуль упругости при сжатии, билинейная диаграмма, коэффициент разномодульности, сжато-изогнутый стержень.

ABOUT CALCULATION OF A ROD UNDER COMBINED AXIAL AND LATERAL LOADS TAKING INTO ACCOUNT THE DIFFERENT ELASTIC MODULUS OF MATERIAL

L. Turishchev

Polotsk State University, Republic of Belarus

e-mail: lst41@mail.ru

A rod is considering under combined axial and lateral loads. Material of a rod has different elastic modules under tension and compression. The differential equation of an axis of a rod subjected to combined axial and lateral loads is obtaining. Formulas for determining the parameters of stress-strain state in an arbitrary section are founding.

Keywords: rod under combined axial and lateral loads, modulus of elasticity in tension, modulus of elasticity under compression, bilinear diagram, coefficient of diversity/

В линейной теории расчета стержневых конструкций конструкционный материал, как правило, считается однородным изотропным упругим телом, поведение которого описывается модулем упругости E одинаковым при растяжении и сжатии. Однако, как показывают экспериментальные исследования модули упругости при растяжении и сжатии для ряда современных конструкционных материалов могут существенно различаться [1]-[3].

Академиком Амбарцумяном С.А. была построена феноменологическая теория, описывающая поведение разномодульного материала и предлагающая общие методы решения задач теории упругости из такого материала [4]. Поведение разномодульного материала описывается билинейной диаграммой $\sigma - \varepsilon$ с различными модулями упру-

гости при растяжении E^+ и сжатии E^- . Степень разномодульности конструкционного материала характеризуется коэффициентом

$$\mu = \frac{E^-}{E^+}. \quad (1)$$

Расчеты отдельного стержня с учетом разномодульности материала при некоторых простейших видах нагружения были выполнены рядом авторов и сводка основных результатов решения этих задач приведена в [4].

Рассматривается прямолинейный гибкий сжато-изогнутый стержень, нагруженный постоянной продольной силой и поперечной нагрузкой (рис.1)

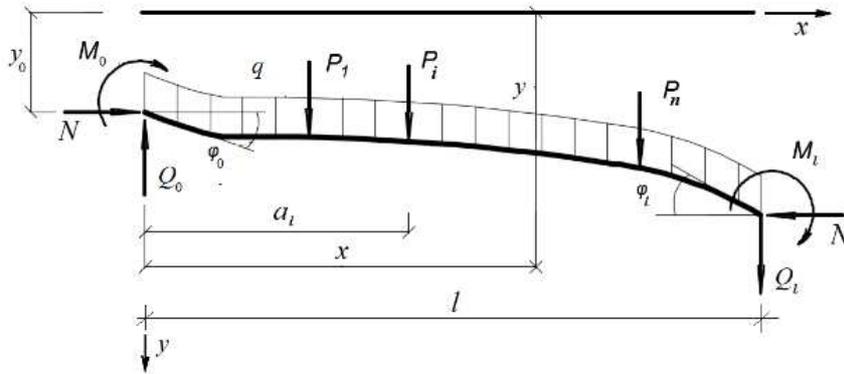


Рисунок 1. – Сжато-изогнутый стержень

Принимается, что стержень выполнен из разномодульного материала. Поперечное сечение стержня симметричное произвольной формы (рис. 2).

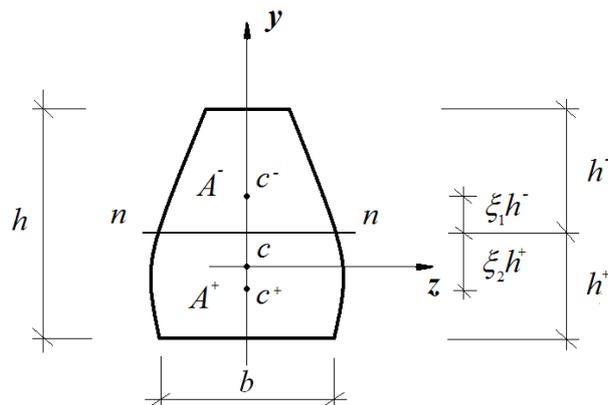


Рисунок 2. – Симметричное поперечное сечение стержня

где A^- - площадь сжатой части сечения с центром тяжести в точке c^- ; A^+ - площадь растянутой части сечения с центром тяжести в точке c^+ . Общая площадь поперечного сечения $A = A^- + A^+$.

Напряженно-деформированное состояние (НДС) стержня в начале координат характеризуется начальными параметрами

$$y(0) = y_0, y'(0) = y'_0, M(0) = M_0, Q(0) = Q_0.$$

Для описания прогибов рассматриваемого сжато-изогнутого стержня используем приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня с учетом разномодульности материала [6]

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{D(x)}, \quad (2)$$

где $M(x)$ - изгибающий момент в произвольном сечении; $D(x)$ - изгибная жесткость поперечного сечения стержня с учетом влияния разномодульности материала.

Входящий в (2) изгибающий момент $M(x)$, для рассматриваемой схемы нагружения стержня описывается выражением

$$M(x) = M_0 + Q_0 x + N[y(x) - y_0] - \sum P_i(x - a_i) - \frac{qx^2}{2}. \quad (3)$$

Входящая в (2) величина $D(x)$, связана с обычной изгибной жесткостью поперечного сечения EI_z соотношением [5]

$$D = \frac{EI_z}{\zeta}, \quad (4)$$

где ζ - коэффициент влияния разномодульности конструкционного материала на изгибную жесткость поперечного сечения. Для симметричного поперечного сечения произвольной формы он описывается выражением

$$\zeta = \frac{I_z}{I^+(x) + \mu I^-(x)},$$

где $I^-(x)$ и $I^+(x)$ характеризуют моменты инерции, соответственно, сжатой и растянутой частей поперечного сечения относительно нейтральной оси.

С учетом (3), (4) уравнение (2) примет вид

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \zeta \frac{N}{EI_z} y = -\frac{\zeta}{EI_z} \left[M_0 + Q_0 x - Ny_0 - \sum P_i(x - a_i) - \frac{qx^2}{2} \right]. \quad (5)$$

Полученное уравнение (5) описывает изогнутую ось гибкого сжато-изогнутого стержня с учетом разномодульности его материала. Общее решение уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1 \cos \sqrt{\zeta} nx + C_2 \sin \sqrt{\zeta} nx + y^*(x), \quad (6)$$

где $n = \sqrt{\frac{N}{EI_z}}$;

$y^*(x)$ - частное решение неоднородного уравнения

$$y^*(x) = y_0 - \frac{M_0 + Q_0 x}{n^2 EI_z} + \frac{\sum_i P_i}{n^3 EI_z} \left[\sqrt{\zeta} n(x - a_i) - \sin \sqrt{\zeta} n(x - a_i) \right] - \frac{q}{n^4 EI_z} \left[\left(1 - \frac{\zeta n^2 x^2}{2} \right) - \cos \sqrt{\zeta} nx \right].$$

Произвольные C_1, C_2 определяются из граничных условий на левом конце стержня

$$y(0) = y_0;$$

$$y'(0) = y'_0.$$

Используя эти условия, найдем

$$C_1 = \frac{M_0}{n^2 EI_z}, \quad C_2 = \frac{1}{\sqrt{\zeta} n} \left(\varphi_0 + \frac{Q_0}{n^2 EI_z} \right). \quad (7)$$

Подставляя (7) в общее решение (6), получим формулу для прогибов сжато-изогнутого стержня

$$y(x) = y_0 + y'_0 \frac{\sin \sqrt{\zeta} nx}{\sqrt{\zeta} n} + \frac{M_0}{n^2 EI_z} (\cos \sqrt{\zeta} nx - 1) + \frac{Q_0}{n^3 EI_z} \left(\frac{\sin \sqrt{\zeta} nx}{\sqrt{\zeta}} - nx \right) + y_p(x), \quad (8)$$

Дифференцируя последовательно (8), получим формулы для углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил сжато-изогнутого стержня

$$y'(x) = y'_0 \cos \sqrt{\zeta} nx - \frac{M_0}{n EI_z} \sqrt{\zeta} \sin \sqrt{\zeta} nx + \frac{Q_0}{n^2 EI_z} (\cos \sqrt{\zeta} nx - 1) + y'_p(x);$$

$$M(x) = y'_0 \frac{EI_z}{\sqrt{\zeta}} n \sin \sqrt{\zeta} nx + M_0 \cos \sqrt{\zeta} nx + Q_0 \frac{\sin \sqrt{\zeta} nx}{n \zeta} + M_p(x); \quad (9)$$

$$Q(x) = y'_0 EI_z n^2 \cos \sqrt{\zeta} nx - M_0 \sqrt{\zeta} n \sin \sqrt{\zeta} nx + Q_0 \frac{\cos \sqrt{\zeta} nx}{\sqrt{\zeta}} + Q_p(x).$$

В формулах (8), (9), позволяющие находить параметры НДС в произвольном сечении сжато-изогнутого стержня с учетом влияния разномодульности конструкционного материала, величины $y_p(x), y'_p(x), M_p(x), Q_p(x)$ характеризуют влияние пролетной нагрузки на соответствующий параметр НДС

$$y_p(x) = \frac{1}{n^3 EI_z} \sum_i P_i \left[\sqrt{\zeta} n(x - a_i) - \sin \sqrt{\zeta} n(x - a_i) \right] - \frac{q}{n^4 EI_z} \left[\left(1 - \frac{\zeta n^2 x^2}{2} \right) - \cos \sqrt{\zeta} nx \right];$$

$$y'_p(x) = \frac{\sqrt{\zeta}}{n^2 EI_z} \sum_i P_i \left[1 - \cos \sqrt{\zeta} n(x - a_i) \right] + \frac{q}{n^3 EI_z} \left[\zeta nx - \sin \sqrt{\zeta} nx \right];$$

$$M_p(x) = -\frac{1}{n} \sum_i P_i \sin \sqrt{\zeta} n(x - a_i) - \frac{q}{\zeta n^2} \left[\zeta - \sqrt{\zeta} \cos \sqrt{\zeta} nx \right];$$

$$Q_p(x) = -\zeta \sum_i P_i \cos \sqrt{\zeta} n(x - a_i) - \frac{q}{n} \sin \sqrt{\zeta} nx.$$

Дифференциальное уравнение (5) и формулы (8), (9) позволяют получать решения задач расчета сжато-изогнутых стержней для различных схем опирания с учетом разномодульности конструкционного материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов, Г.П. Исследование несовершенной упругости металлов: автореферат диссертации, канд. тех. наук: 05.23.01 / Г.П. Иванов; Белорусский политехнический институт. – Минск. – 1973. – 24 с.
2. Авхимков, А.П. Об уравнениях обобщенного закона упругости материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию и некоторых их приложениях: автореферат диссертации, канд. тех. наук: 05.23.01 / А.П. Авхимков; Московский инженерно-строительный институт. – Москва. – 1975. – 28 с.
3. Ершова, А.Ю. Экспериментальное исследование разномодульных полимерных композитов с мелкодисперсным наполнителем / А.Ю. Ершова, М.И. Мартиросов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружения. – 2015. – №5. – С.68-71
4. Амбарцумян, С.А. Разномодульная теория упругости / С.А. Амбарцумян. – Москва : Физматгиз, 1982. – 317 с.
5. Турищев, Л.С. К вопросу о расчете стержневых конструкций с учетом влияния разномодульности материала / Л.С. Турищев // Вестник ПГУ. Серия В. Промышленность. Прикладные науки. – 2010. – №2. – С.63-67.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ПОЛОЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ КОМПЛЕКС:
ПРОБЛЕМЫ, ПЕРСПЕКТИВЫ, ИННОВАЦИИ**

ЭЛЕКТРОННЫЙ СБОРНИК СТАТЕЙ
II МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

(Новополоцк, 28–29 ноября 2019 г.)

Новополоцк
Полоцкий государственный университет
2020

1 – дополнительный экран – сведения об издании

УДК 72:624/628+69(082)

Редакционная коллегия:

Л. М. Парфенова (председатель),
А. С. Катульская (отв. секретарь), Е. Д. Лазовский,
Н. В. Давыденко, Р. М. Платонова

АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ КОМПЛЕКС: ПРОБЛЕМЫ, ПЕРСПЕКТИВЫ, ИННОВАЦИИ
[Электронный ресурс] : электронный сборник статей II международной научной конференции, Новополоцк, 28–29 нояб. 2019 г. / Полоцкий государственный университет ; под ред. Л. М. Парфеновой. – Новополоцк : Полоц. гос. ун-т, 2020. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).

ISBN 978-985-531-701-3.

Рассмотрены вопросы архитектуры и градостроительства в современных условиях, прогрессивные методы проведения инженерных изысканий и расчета строительных конструкций. Приведены результаты исследований ресурсо- и энергосберегающих строительных материалов и технологий, энергоресурсосберегающие и природоохранные инновационные решения в инженерных системах зданий и сооружений. Проанализированы организационные аспекты строительства и управления недвижимостью, проблемы высшего архитектурного и строительного образования.

Для научных и инженерно-технических работников исследовательских, проектных и производственных организаций, а также преподавателей, аспирантов, магистрантов и студентов строительных специальностей учреждений образования.

*Сборник включен в Государственный регистр информационного ресурса.
Регистрационное свидетельство № 3671815379 от 26.04.2018.*

211440, ул. Блохина, 29, г. Новополоцк, Беларусь
тел. 8 (0214) 53 53 92, e-mail: a.bakatovich@psu.by; l.parfenova@psu.by

№ госрегистрации 3671815379.

ISBN 978-985-531-701-3

@Полоцкий государственный университет, 2020

2 – дополнительный титульный экран – производственно-технические сведения

Для создания текстового электронного издания «Архитектурно-строительный комплекс: Проблемы, перспективы, инновации» использованы текстовый процессор Microsoft Word и программа Adobe Acrobat XI Pro для создания и просмотра электронных публикаций в формате PDF.

**АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ КОМПЛЕКС:
ПРОБЛЕМЫ, ПЕРСПЕКТИВЫ, ИННОВАЦИИ**

ЭЛЕКТРОННЫЙ СБОРНИК СТАТЕЙ
II МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

(Новополоцк, 28–29 ноября 2019 г.)

Технический редактор *Т. А. Дарьянова*.
Компьютерная верстка *Т. А. Дарьяновой*.
Компьютерный дизайн обложки *Е. А. Балабуевой*.

Подписано к использованию 09.09.2020.
Объем издания: 21,05 Мб. Тираж 3 диска. Заказ 420.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования «Полоцкий государственный университет».

Свидетельство о государственной регистрации
издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/305 от 22.04.2014.

ЛП № 02330/278 от 08.05.2014.

211440, ул. Блохина, 29,
г. Новополоцк,
Тел. 8 (0214) 59-95-41, 59-95-44
<http://www.psu.by>