www.esa-conference.ru

УДК 519.6: 532.5

Вычисление поля давления по полю скорости в гидродинамической задаче для прямоугольной каверны

Волосова Н.К., аспирант
Басараб М.А., профессор, д.ф. - м.н.
Московский государственный технический университет МГТУ им. Н.Э. Баумана
Волосов К.А., профессор, д.ф. - м.н.
Волосова А.К., к.ф.- м.н.
МИИТ, г. Москва;
Пастухов Д.Ф., к. ф.-м. н., доц.
Пастухов Ю.Ф., к. ф.-м. н., доц.
Полоцкий государственный университет

Аннотация. *Рассматривается гидродинамическая задача для прямоугольной каверны в диапазоне чисел Рейнольдса 1000-600. Показано, что алгоритм решения задачи в явном виде, не содержащим поля давления, может иметь гладкий профиль скорости на верхнем отрезке, построенном из кубических сплайнов. Описан алгоритм вычисления поля давления по системе уравнений Навье – Стокса. Получено, что вторичный нижний левый вихрь при уменьшении числа Рейнольдса деформируется, приобретает эллиптическую форму, дробится и диссипирует. Все разностные производные по координатам в задаче построены с 4 порядком погрешности.*

Ключевые слова: *плоская прямоугольная каверна, гидродинамическая задача, уравнения Навье-Стокса*

Calculation of the pressure field from the velocity field in the gidrodinamic problem for a rectangular cavity

Volosova N.K., Basarab M.A., Volosov K.A., Volosova A.K., Pastuhov D.F., Pastuhov YU.F.

Введение. Рассматривается задача интегрирования поля давления по полученному полю скоростей в гидродинамической задаче для прямоугольной каверны. Она является продолжением работ [1],[3],[4],[14],[15],[16]. Изучена динамика вторичных вихрей в диапазоне чисел Рейнольдса и вопросы гидродинамической устойчивости[6]-[14]. Результаты сравниваются с известной работой Фомина А.А., Фоминой Л.Н[5].

Постановка задачи. Рассмотрим классическую гидродинамическую задачу в прямоугольной области с системой уравнений в частных производных и начальными и краевыми условиями для физических полей[2],[1]. Обозначим $(u(x,y),v(x,y))$ вектор скорости жидкой частицы. Начало прямоугольной системы координат расположим в нижнем левом угле прямоугольника, направим ось y-вверх, ось x-вправо.

$$\begin{cases} \psi_{xx}+\psi_{yy}=-w(x,y),\ 0<x<L,\ \ 0<y<R\,, \\ w=v_x-u_y, \\ u=\psi_y; v=-\psi_x, \\ w_t+u\cdot w_x+v\cdot w_y=\nu\left(w_{xx}+w_{yy}\right), \\ \psi|_{\Gamma}\equiv 0, \Gamma\equiv(x=0,0\le y\le R)\cup(x=L,0\le y\le R)\cup(0\le x\le L,y=0)\cup(0\le x\le L,y=R), \\ v|_{\Gamma}\equiv 0, \\ u|_{\Gamma_1}=0, \Gamma_1=(x=0,0\le y\le R)\cup(x=L,0\le y\le R)\cup(0\le x\le L,y=0), u|_{\Gamma\backslash\Gamma_1}=u_{\max} \end{cases} \tag{1}$$

Отдельно рассмотрим 2 компоненты уравнения Навье-Стокса

$$\begin{cases} u_t+u\cdot u_x+v\cdot u_y=-\dfrac{1}{\rho}p_x+\nu\left(u_{xx}+u_{yy}\right), 0<x<L, 0<y<R \\ v_t+u\cdot v_x+v\cdot v_y=-\dfrac{1}{\rho}p_y+\nu\left(v_{xx}+v_{yy}\right) \end{cases} \tag{2}$$

Где в системе уравнений(1) обозначена $w=v_x-u_y$ - функция вихря, $\psi(x,y)$ - функция тока, определяющая поле скоростей формулой $u=\psi_y; v=-\psi_x, \psi|_{\Gamma}\equiv 0$. Вертикальная компонента скорости на границе каверны отсутствует $v|_{\Gamma}\equiv 0$, а горизонтальная имеет заданное распределение $u_0(x)$ на верхней стороне прямоугольника и направлена направо, а на остальной части границы равна нулю (условие прилипания). Для инициализации задачи(1) необходимо задать начальные физические поля (достаточно задать начальное поле горизонтальной и вертикальной компонент скорости), а также связь граничных значений вихря с приграничными значениями функции тока и краевыми значениями скорости. В системе уравнений (2) ρ, ν - плотность воды и ее кинематическая вязкость, $\overline{p}_{\bar{x}}, \overline{p}_{\bar{y}}$ горизонтальная и вертикальная компоненты градиента давления. Как было показано в работе[2], систему уравнений(1) можно решить независимо от системы(2), хотя 4-ое уравнение динамики вихря из(1) получено с учетом обоих уравнений(2).

Преобразуем системы уравнений (1) и (2), введя безразмерные переменные

$$\begin{cases} \overline{\psi}_{\bar{x}\bar{x}} + \overline{\psi}_{\bar{y}\bar{y}} = -\overline{w}(\bar{x},\bar{y}),\ 0 < \bar{x} = \dfrac{x}{L} < 1,\ \ 0 < \bar{y} = \dfrac{y}{L} < k = \dfrac{R}{L}, \overline{\psi} = \dfrac{\psi}{\psi_{\max}}, \psi_{\max} = Lu_{\max} \\ \overline{w} = \overline{v}_{\bar{x}} - \overline{u}_{\bar{y}},\ \ \overline{u} = \dfrac{u}{u_{\max}}, \overline{v} = \dfrac{v}{u_{\max}}\ \overline{w} = \dfrac{w}{w_{\max}}, w_{\max} = \dfrac{u_{\max}}{L} \\ \overline{u} = \overline{\psi}_{\bar{y}}; \overline{v} = -\overline{\psi}_{\bar{x}}, \\ \overline{w}_{\bar{t}} + \overline{u}\cdot\overline{w}_{\bar{x}} + \overline{v}\cdot\overline{w}_{\bar{y}} = \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\overline{w}_{\bar{x}\bar{x}} + \overline{w}_{\bar{y}\bar{y}}\right), 0 < \bar{t} = \dfrac{t}{T}, T = \dfrac{L}{u_{\max}}, \mathrm{Re} = \dfrac{u_{\max}L}{\nu} \\ \overline{\psi}\Big|_{\Gamma} \equiv 0, \overline{v}\Big|_{\Gamma} \equiv 0, \overline{u}\Big|_{\Gamma_1} = 0, \overline{u}\Big|_{\Gamma\backslash\Gamma_1} = 1 \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \overline{u}_{\bar{t}} + \overline{u}\cdot\overline{u}_{\bar{x}} + \overline{v}\cdot\overline{u}_{\bar{y}} = -\overline{p}_{\bar{x}} + \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\overline{u}_{\bar{x}\bar{x}} + \overline{u}_{\bar{y}\bar{y}}\right), 0 < \bar{x} < 1, 0 < \bar{y} < R/L = k, \overline{p} = p/\left(\rho u^2{}_{\max}\right) \\ \overline{v}_{\bar{t}} + \overline{u}\cdot\overline{v}_{\bar{x}} + \overline{v}\cdot\overline{v}_{\bar{y}} = -\overline{p}_{\bar{y}} + \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\overline{v}_{\bar{x}\bar{x}} + \overline{v}_{\bar{y}\bar{y}}\right), 0 < \overline{u} = u/u_{\max} \le 1, \overline{v} = v/u_{\max} \end{cases} \tag{4}$$

В дальнейшем штрихи над переменными и функциями в задаче(3),(4) из соображения удобства опускаем. k=1 если прямоугольник-квадрат. Опишем численный алгоритм решения задачи(2).

1.Инициализация.

Зададим гладкий профиль скорости, в отличие от профиля в работе[1] с 2 точками излома первой производной, кубическими сплайнами на краях верхней стороны прямоугольной каверны по непрерывности формулой

$$u(x,k) \equiv u_0(x) = \begin{cases} -2\left(\dfrac{x}{\tau}\right)^3 + 3\left(\dfrac{x}{\tau}\right)^2, 0 \le x \le \tau, \\ 1, \tau \le x \le 1-\tau, \\ -2\left(\dfrac{1-x}{\tau}\right)^3 + 3\left(\dfrac{1-x}{\tau}\right)^2, 1-\tau \le x \le 1, \end{cases} \tag{5}$$

В граничных точках сплайнов $x = 0, \tau, 1$ имеем

$$u_0(0) = u_0'(0) = u_0'(\tau) = u_0'(1-\tau) = u_0'(1) = u_0(0) = 0, u_0(\tau) = u_0(1-\tau) = 1.$$

Начальное поле горизонтальной скорости определим ее профилем на верхнем отрезке прямоугольника $u_0(x)$, которое линейно уменьшается до нуля на его нижнем отрезке y=0. Поле скорости в формуле(5) изменяет знак в интервале $0 \le y_m \le 1$.

$$u(x_n, y_m) = -u_0(x_n)\left(\frac{y_m}{k}\right)\sin\left(\frac{3\pi y_m}{2k}\right), x_n = nh_1, y_m = mh_2, h_1 = \frac{1}{n_1}, h_2 = \frac{k}{n_2}, \tau = \frac{n_0}{n_1}. \tag{5}$$

Поскольку мы используем модель несжимаемой жидкости в прямоугольной кювете постоянной геометрической формы, то центр масс жидкости не перемещается по оси x. Однако для начального приближения потребуем, чтобы поле горизонтальной компоненты скорости $u(x,y)$ хотя бы меняло знак по оси y. Найдем начальное поле вертикальной скорости несжимаемой жидкости, используя интегральную формулу трапеции

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow v(x_n, y_m) = -\int_0^{y_m} \frac{\partial u}{\partial x}(x_n, y)dy \Leftrightarrow v(x_n, y_m) = -h_2\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}(x_n, y_m) + \sum_{k=1}^{m-1}\frac{\partial u}{\partial x}(x_n, y_k)\right) =$$

$$= -h_2\left(\frac{1}{2}\frac{u(x_{n+1}, y_m) - u(x_{n-1}, y_m)}{2h_1} + \sum_{k=1}^{m-1}\frac{u(x_{n+1}, y_k) - u(x_{n-1}, y_k)}{2h_1}\right), m = \overline{2, n_2 - 1}, n = \overline{1, n_1 - 1} \tag{6}$$

$$v(x_n, y_1) = -h_2\frac{\partial u}{\partial x}(x_n, y_1), n = \overline{1, n_1 - 1}$$

При интегрировании использовано условие прилипания жидкости на дне. Затем инициализируем поле вихря во внутренних точках по начальному полю скоростей (со вторым порядком погрешности).

$$w = v_x - u_y \Leftrightarrow w(x_n, y_m) = \frac{v(x_{n+1}, y_m) - v(x_{n-1}, y_m)}{2h_1} - \frac{v(x_n, y_{m+1}) - v(x_n, y_{m-1})}{2h_2}, n = \overline{1, n_1 - 1}, m = \overline{1, n_2 - 1} \quad (7)$$

Из работ [1],[3],[4] используем формулу аппроксимации уравнения Пуассона на 9-точечном симметричном шаблоне с четвертым порядком погрешности $O(h^4)$

$$\frac{1}{h^2}\left(\frac{-10}{3}u_{m,n} + \frac{2}{3}(u_{m-1,n} + u_{m+1,n} + u_{m,n-1} + u_{m,n+1}) + \frac{1}{6}(u_{m-1,n-1} + u_{m+1,n-1} + u_{m-1,n+1} + u_{m+1,n+1})\right) = f_{m,n} + \frac{h^2}{12h^2}(f_{m-1,n} + f_{m,n-1} + f_{m+1,n} + f_{m,n+1} - 4f_{m,n}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{-10}{3}u_{m,n} + \frac{2}{3}(u_{m-1,n} + u_{m+1,n} + u_{m,n-1} + u_{m,n+1}) + \frac{1}{6}(u_{m-1,n-1} + u_{m+1,n-1} + u_{m-1,n+1} + u_{m+1,n+1})\right) = \frac{h^2}{12}(f_{m-1,n} + f_{m,n-1} + f_{m+1,n} + f_{m,n+1} + 8f_{m,n}) \quad (8)$$

Для решения Пуассона $\psi_{xx} + \psi_{yy} = -w(x, y)$ за конечное число элементарных операций матричным методом[3],[4] нужно модифицировать его правую часть в 4 угловых узлах

$$\begin{cases}
\frac{-10}{3}\psi_{1,n_1-1} + \frac{2}{3}(\psi_{2,n_1-1} + \psi_{1,n_1-2} + \psi_{1,n_1} + \psi_{0,n_1-1}) + \frac{1}{6}(\psi_{2,n_1-2} + \psi_{0,n_1-2} + \psi_{2,n_1} + \psi_{0,n_1}) = \frac{-h^2}{12}(8w_{1,n_1-1} + w_{0,n_1-1} + w_{2,n_1-1} + w_{1,n_1-2} + w_{1,n_1}) \\
\overline{w_{1,n_1-1}} \equiv \frac{-h^2}{12}(8w_{1,n_1-1} + w_{0,n_1-1} + w_{2,n_1-1} + w_{1,n_1-2} + w_{1,n_1}) - \frac{2}{3}(\psi_{1,n_1} + \psi_{0,n_1-1}) - \frac{1}{6}(\psi_{0,n_1-2} + \psi_{2,n_1} + \psi_{0,n_1}) \\
\frac{-10}{3}\psi_{n_2-1,1} + \frac{2}{3}(\psi_{n_2-2,1} + \psi_{n_2-1,2} + \psi_{n_2-1,0} + \psi_{n_2,1}) + \frac{1}{6}(\psi_{n_2-2,2} + \psi_{n_2,2} + \psi_{n_2-2,0} + \psi_{n_2,0}) = \frac{-h^2}{12}(8w_{n_2-1,1} + w_{n_2,1} + w_{n_2-2,1} + w_{n_2-1,0} + w_{n_2-1,2}) \\
\overline{w_{n_2-1,1}} \equiv \frac{-h^2}{12}(8w_{n_2-1,1} + w_{n_2,1} + w_{n_2-2,1} + w_{n_2-1,0} + w_{n_2-1,2}) - \frac{2}{3}(\psi_{n_2-1,0} + \psi_{n_2,1}) - \frac{1}{6}(\psi_{n_2,2} + \psi_{n_2-2,0} + \psi_{n_2,0}) \\
\frac{-10}{3}\psi_{n_2-1,n_1-1} + \frac{2}{3}(\psi_{n_2-2,n_1-1} + \psi_{n_2-1,n_1-2} + \psi_{n_2-1,n_1} + \psi_{n_2,n_1-1}) + \frac{1}{6}(\psi_{n_2-2,n_1-2} + \psi_{n_2,n_1-2} + \psi_{n_2-2,n_1} + \psi_{n_2,n_1}) = \frac{-h^2}{12}(8w_{n_2-1,n_1-1} + w_{n_2,n_1-1} + w_{n_2-2,n_1-1} + w_{n_2-1,n_1} + w_{n_2-1,n_1-2}) \\
\overline{w_{n_2-1,n_1-1}} \equiv \frac{-h^2}{12}(8w_{n_2-1,n_1-1} + w_{n_2,n_1-1} + w_{n_2-2,n_1-1} + w_{n_2-1,n_1} + w_{n_2-1,n_1-2}) - \frac{2}{3}(\psi_{n_2-1,n_1} + \psi_{n_2,n_1-1}) - \frac{1}{6}(\psi_{n_2,n_1-2} + \psi_{n_2-2,n_1} + \psi_{n_2,n_1}) \\
\frac{-10}{3}\psi_{1,1} + \frac{2}{3}(\psi_{2,1} + \psi_{1,2} + \psi_{1,0} + \psi_{0,1}) + \frac{1}{6}(\psi_{2,2} + \psi_{0,2} + \psi_{2,0} + \psi_{0,0}) = \frac{-h^2}{12}(8w_{1,1} + w_{0,1} + w_{2,1} + w_{1,0} + w_{1,2}) \\
\overline{w_{1,1}} \equiv \frac{-h^2}{12}(8w_{1,1} + w_{0,1} + w_{2,1} + w_{1,0} + w_{1,2}) - \frac{2}{3}(\psi_{1,0} + \psi_{0,1}) - \frac{1}{6}(\psi_{0,2} + \psi_{2,0} + \psi_{0,0})
\end{cases} \quad (9)$$

И в граничных узлах, расположенных на 4 граничных отрезках

$$\begin{cases}
-\frac{10}{3}\psi_{1,n} + \frac{2}{3}(\psi_{1,n-1} + \psi_{2,n} + \psi_{1,n+1} + \psi_{0,n}) + \frac{1}{6}(\psi_{2,n-1} + \psi_{2,n+1} + \psi_{0,n-1} + \psi_{0,n+1}) = -\frac{h^2}{12}(8w_{1,n} + w_{0,n} + w_{2,n} + w_{1,n-1} + w_{1,n+1}) \\
\overline{w_{1,n}} = -\frac{h^2}{12}(8w_{1,n} + w_{0,n} + w_{2,n} + w_{1,n-1} + w_{1,n+1}) - \frac{2}{3}\psi_{0,n} - \frac{1}{6}(\psi_{0,n-1} + \psi_{0,n+1}), n = \overline{2, n_1 - 2} \\
-\frac{10}{3}\psi_{n_2-1,n} + \frac{2}{3}(\psi_{n_2-1,n-1} + \psi_{n_2-2,n} + \psi_{n_2-1,n+1} + \psi_{n_2,n}) + \frac{1}{6}(\psi_{n_2-2,n-1} + \psi_{n_2-2,n+1} + \psi_{n_2,n-1} + \psi_{n_2,n+1}) = -\frac{h^2}{12}(8w_{n_2-1,n} + w_{n_2,n} + w_{n_2-2,n} + w_{n_2-1,n-1} + w_{n_2-1,n+1}) \\
\overline{w_{n_2-1,n}} = -\frac{h^2}{12}(8w_{n_2-1,n} + w_{n_2,n} + w_{n_2-2,n} + w_{n_2-1,n-1} + w_{n_2-1,n+1}) - \frac{2}{3}\psi_{n_2,n} - \frac{1}{6}(\psi_{n_2,n-1} + \psi_{n_2,n+1}), n = \overline{2, n_1 - 2} \\
-\frac{10}{3}\psi_{m,1} + \frac{2}{3}(\psi_{m-1,1} + \psi_{m,2} + \psi_{m+1,1} + \psi_{m,0}) + \frac{1}{6}(\psi_{m-1,2} + \psi_{m+1,2} + \psi_{m-1,0} + \psi_{m+1,0}) = -\frac{h^2}{12}(8w_{m,1} + w_{m-1,1} + w_{m+1,1} + w_{m,0} + w_{m,2}) \\
\overline{w_{m,1}} = -\frac{h^2}{12}(8w_{m,1} + w_{m-1,1} + w_{m+1,1} + w_{m,0} + w_{m,2}) - \frac{2}{3}\psi_{m,0} - \frac{1}{6}(\psi_{m-1,0} + \psi_{m+1,0}), m = \overline{2, n_2 - 2} \\
-\frac{10}{3}\psi_{m,n_1-1} + \frac{2}{3}(\psi_{m-1,n_1-1} + \psi_{m,n_1-2} + \psi_{m+1,n_1-1} + \psi_{m,n_1}) + \frac{1}{6}(\psi_{m-1,n_1-2} + \psi_{m+1,n_1-2} + \psi_{m-1,n_1} + \psi_{m+1,n_1}) = -\frac{h^2}{12}(8w_{m,n_1-1} + w_{m-1,n_1-1} + w_{m+1,n_1-1} + w_{m,n_1-2} + w_{m,n_1}) \\
\overline{w_{m,n_1-1}} = -\frac{h^2}{12}(8w_{m,n_1-1} + w_{m-1,n_1-1} + w_{m+1,n_1-1} + w_{m,n_1-2} + w_{m,n_1}) - \frac{2}{3}\psi_{m,n_1} - \frac{1}{6}(\psi_{m-1,n_1} + \psi_{m+1,n_1}), m = \overline{2, n_2 - 2} \\
\overline{w_{m,n}} = -\frac{h^2}{12}(8w_{m,n} + w_{m-1,n} + w_{m+1,n} + w_{m,n-1} + w_{m,n+1}) \quad \forall m \in \overline{2, n_2 - 2}, n \in \overline{2, n_1 - 2}
\end{cases} \quad (10)$$

Далее находим поле функции тока согласно работам[1],[3],[4] то есть матричные коэффициенты прогонки вперед

$$\psi_1^T = -A^{-1}B\psi_2^T + A^{-1}\overline{w_1^T} \Leftrightarrow \lambda_1 = -A^{-1}B, \nu_1 = A^{-1}\overline{w_1^T}, \quad (11)$$

ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

где $a_{m,n}=\begin{cases}-\dfrac{10}{3}, m=n; m=\overline{1,n_1-1}, n=\overline{1,n_1-1}\\ \dfrac{2}{3}, m=n+1\vee m=n-1\\ 0, m\geq n+2\vee m\leq n-2\end{cases}$, $\quad b_{m,n}=\begin{cases}\dfrac{2}{3}, m=n; m=\overline{1,n_1-1}, n=\overline{1,n_1-1}\\ \dfrac{1}{6}, m=n+1\vee m=n-1\\ 0, m\geq n+2\vee m\leq n-2\end{cases}$ (12)

$$\lambda_m=-\left(B\lambda_{m-1}+A\right)^{-1}B, \nu_m=\left(B\lambda_{m-1}+A\right)^{-1}\left(\overline{w_m^T}-B\nu_{m-1}\right), m=\overline{2,n_2-2} \quad (13)$$

Находим предпоследнюю строку матрицы поля функции тока

$$\psi_{n_2-1}^T=\left(B\lambda_{n_2-2}+A\right)^{-1}\left(\overline{w_{n_2-1}^T}-B\nu_{n_2-2}\right) \quad (14)$$

Найдем все остальные строки матрицы поля функции тока по формулам прогонки назад

$$\psi_m^T=\lambda_m\psi_{m+1}^T+\nu_m, m=\overline{n_2-2,1} \quad (15)$$

Итак, все начальные поля получены. Переходим к циклу.

2.Описание циклической части алгоритма

1.Задать краевые условия для полей

$$\psi^k{}_{0,n}=\psi^k{}_{n_2,n}=\psi^k{}_{m,0}=\psi^k{}_{m,n_1}=0, n=\overline{0,n_1}, m=\overline{0,n_2}, v^k{}_{0,n}=v^k{}_{n_2,n}=v^k{}_{m,0}=v^k{}_{m,n_1}=0, n=\overline{0,n_1}, m=\overline{0,n_2}$$

$$u^k{}_{0,n}=u^k{}_{m,0}=u^k{}_{m,n_1}=0, u^k{}_{n_2,n}=u_0(n), n=\overline{0,n_1}, m=\overline{0,n_2}$$

2.Модифицировать правую часть уравнения Пуассона для функции вихря $\overline{w^k{}_{m,n}}$ по формулам (9),(10). Решить уравнение Пуассона, или найти поле функции тока $\psi_{m,n}^{k+1}$ во внутренних точках по формулам (11)-(15).

3.Найти поле скорости на следующем временном шаге во внутренних точках $u^{k+1}(x_n,y_m)\equiv u_{m,n}^{k+1}, v_{m,n}^{k+1}, m=\overline{1,n_2-1}, n=\overline{1,n_1-1}$ по формулам(16),(17)

$$v=-\psi_x \Leftrightarrow v_{m,n}^{k+1}=-\left(\frac{8\left(\psi^{k+1}{}_{m,n+1}-\psi^{k+1}{}_{m,n-1}\right)-\left(\psi^{k+1}{}_{m,n+2}-\psi^{k+1}{}_{m,n-2}\right)}{12h_1}\right), m=\overline{1,n_2-1}, n=\overline{2,n_1-2}$$

$$\begin{cases}v_{m,1}^{k+1}=-\dfrac{1}{h_1}\left(-\dfrac{1}{4}\psi^{k+1}{}_{m,0}-\dfrac{5}{6}\psi^{k+1}{}_{m,1}+\dfrac{3}{2}\psi^{k+1}{}_{m,2}-\dfrac{1}{2}\psi^{k+1}{}_{m,3}+\dfrac{1}{12}\psi^{k+1}{}_{m,4}\right)\\ v_{m,n1-1}^{k+1}=\dfrac{1}{h_1}\left(-\dfrac{1}{4}\psi^{k+1}{}_{m,n1}-\dfrac{5}{6}\psi^{k+1}{}_{m,n1-1}+\dfrac{3}{2}\psi^{k+1}{}_{m,n1-2}-\dfrac{1}{2}\psi^{k+1}{}_{m,n1-3}+\dfrac{1}{12}\psi^{k+1}{}_{m,n1-4}\right)\end{cases}, m=\overline{1,n_2-1} \quad (16)$$

$$u=\psi_y \Leftrightarrow u_{m,n}^{k+1}=\frac{8\left(\psi^{k+1}{}_{m+1,n}-\psi^{k+1}{}_{m-1,n}\right)-\left(\psi^{k+1}{}_{m+2,n}-\psi^{k+1}{}_{m-2,n}\right)}{12h_2}, m=\overline{2,n_2-2}, n=\overline{1,n_1-1}$$

$$\begin{cases}u_{1,n}^{k+1}=\dfrac{1}{h_2}\left(-\dfrac{1}{4}\psi^{k+1}{}_{0,n}-\dfrac{5}{6}\psi^{k+1}{}_{1,n}+\dfrac{3}{2}\psi^{k+1}{}_{2,n}-\dfrac{1}{2}\psi^{k+1}{}_{3,n}+\dfrac{1}{12}\psi^{k+1}{}_{4,n}\right)\\ u_{n2-1,n}^{k+1}=-\dfrac{1}{h_2}\left(-\dfrac{1}{4}\psi^{k+1}{}_{n1,n}-\dfrac{5}{6}\psi^{k+1}{}_{n1-1,n}+\dfrac{3}{2}\psi^{k+1}{}_{n1-2,n}-\dfrac{1}{2}\psi^{k+1}{}_{n1-3,n}+\dfrac{1}{12}\psi^{k+1}{}_{n1-4,n}\right)\end{cases}, n=\overline{1,n_1-1} \quad (17)$$

Формулы(16),(17) имеют четвертый порядок аппроксимации во всех внутренних узлах, а разбиение этого множества внутренних узлов на области (квадрат на прямоугольник и 2 параллельных отрезка его большим сторонам) в (16),(17) является наиболее оптимальным. В то время как в работе[1] в пункте 3 алгоритма поле скорости имело второй порядок погрешности.

4.Найти граничные значения функции вихря в граничных точках согласно[2] со вторым порядком точности

$$\begin{cases}w^{k+1}{}_{m,0}=\dfrac{7\psi^{k+1}{}_{m,0}-8\psi^{k+1}{}_{m,1}+\psi^{k+1}{}_{m,2}}{2h_1^2}-3\dfrac{v^{k+1}{}_{m,0}}{h_1}, m=\overline{1,n_2-1}\\ w^{k+1}{}_{m,n_1}=\dfrac{7\psi^{k+1}{}_{m,n_1}-8\psi^{k+1}{}_{m,n_1-1}+\psi^{k+1}{}_{m,n_1-2}}{2h_1^2}+3\dfrac{v^{k+1}{}_{m,n_1}}{h_1}, m=\overline{1,n_2-1}\\ w^{k+1}{}_{0,n}=\dfrac{7\psi^{k+1}{}_{0,n}-8\psi^{k+1}{}_{1,n}+\psi^{k+1}{}_{2,n}}{2h_2^2}+3\dfrac{u^{k+1}{}_{0,n}}{h_2}, n=\overline{1,n_1-1}\\ w^{k+1}{}_{n_2,n}=\dfrac{7\psi^{k+1}{}_{n_2,n}-8\psi^{k+1}{}_{n_2-1,n}+\psi^{k+1}{}_{n_2-2,n}}{2h_2^2}-3\dfrac{u^{k+1}{}_{n_2,n}}{h_2}, n=\overline{1,n_1-1}\\ w^{k+1}{}_{0,0}=\dfrac{w^{k+1}{}_{0,1}+w^{k+1}{}_{1,0}}{2}, w^{k+1}{}_{n_2,0}=\dfrac{w^{k+1}{}_{n_2,1}+w^{k+1}{}_{n_2-1,0}}{2}, w^{k+1}{}_{0,n_1}=\dfrac{w^{k+1}{}_{0,n_1-1}+w^{k+1}{}_{1,n_1}}{2}, w^{k+1}{}_{n_2,n_1}=\dfrac{w^{k+1}{}_{n_2,n_1-1}+w^{k+1}{}_{n_2-1,n_1}}{2}\end{cases} \quad (18)$$

Формулы(18) дают второй порядок погрешности аппроксимации[1], [2].

Имея поле вихря в граничных точках, можно решить параболическое уравнение динамики вихря $w^{k+1}{}_{m,n}$ на следующем временном слое k+1 во внутренних точках $n=\overline{1,n_1-1}, m=\overline{1,n_2-1}$.

5. $$w_t+v\cdot w_x+u\cdot w_y=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(w_{xx}+w_{yy}\right)\Leftrightarrow w^{k+1}{}_{m,n}=w^k{}_{m,n}+\frac{\tau}{\mathrm{Re}\cdot h^2}\left(-\frac{10}{3}w^k{}_{m,n}+\frac{2}{3}\left(w^k{}_{m-1,n}+w^k{}_{m+1,n}+w^k{}_{m,n-1}+w^k{}_{m,n+1}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{6}\left(w^k{}_{m-1,n-1}+w^k{}_{m-1,n+1}+w^k{}_{m+1,n-1}+w^k{}_{m+1,n+1}\right)\right)-\tau\left(u^{k+1}_{m,n}\cdot w_x{}^k{}_{m,n}+v^{k+1}_{m,n}\cdot w_y{}^k{}_{m,n}\right) \quad (19)$$

Где первые производные функции вихря в формуле(19) определяются формулами с 4-м порядком погрешности

$$w_x{}^k{}_{m,n}=\begin{cases}\frac{1}{12h}\left(w^k{}_{m,n-2}-w^k{}_{m,n+2}+8\left(w^k{}_{m,n+1}-w^k{}_{m,n-1}\right)\right)+O\left(h^4\right), m=\overline{1,n_2-1},\ n=\overline{2,n_1-2}\\ \frac{1}{h}\left(\frac{-1}{4}w^k{}_{m,0}-\frac{5}{6}w^k{}_{m,1}+\frac{3}{2}w^k{}_{m,2}+\frac{1}{2}w^k{}_{m,3}+\frac{1}{12}w^k{}_{m,4}\right)+O\left(h^4\right), m=\overline{1,n_2-1},\ n=1\\ -\frac{1}{h}\left(\frac{-1}{4}w^k{}_{m,n1}-\frac{5}{6}w^k{}_{m,n1-1}+\frac{3}{2}w^k{}_{m,n1-2}+\frac{1}{2}w^k{}_{m,n1-3}+\frac{1}{12}w^k{}_{m,n1-4}\right)+O\left(h^4\right), m=\overline{1,n_2-1},\ n=n_1-1\end{cases}$$

$$w_y{}^k{}_{m,n}=\begin{cases}\frac{1}{12h}\left(w^k{}_{m-2,n}-w^k{}_{m+2,n}+8\left(w^k{}_{m+1,n}-w^k{}_{m-1,n}\right)\right)+O\left(h^4\right), m=\overline{2,n_2-2},\ n=\overline{1,n_1-1}\\ \frac{1}{h}\left(\frac{-1}{4}w^k{}_{0,n}-\frac{5}{6}w^k{}_{1,n}+\frac{3}{2}w^k{}_{2,n}+\frac{1}{2}w^k{}_{3,n}+\frac{1}{12}w^k{}_{4,n}\right)+O\left(h^4\right), n=\overline{1,n_1-1},\ m=1\\ -\frac{1}{h}\left(\frac{-1}{4}w^k{}_{n2,n}-\frac{5}{6}w^k{}_{n2-1,n}+\frac{3}{2}w^k{}_{n2-2,n}+\frac{1}{2}w^k{}_{n2-3,n}+\frac{1}{12}w^k{}_{n2-4,n}\right)+O\left(h^4\right), n=\overline{1,n_1-1},\ m=n_2-1\end{cases} \quad (20)$$

Формулы(20) также оптимально используют деление внутренних точек квадрата на прямоугольник и 2 параллельных большим сторонам отрезков.

Для устойчивого интегрирования уравнения(19) нужно использовать достаточно малый временной шаг $\tau\le\frac{\mathrm{Re}\cdot h^2}{4}$ [2], мы использовали шаг $\tau=\frac{\mathrm{Re}\cdot h^2}{100}$ и 5000 интервалов в цикле на сетке $n_1=n_2=100$.

6. Наконец, новому индексу поля вихря нужно присвоить старый индекс и перейти к пункту 1 цикла.

$$w^{k+1}{}_{m,n}\to w^k{}_{m,n}, k\to k+1, m=\overline{0,n_2}, n=\overline{0,n_1}, k=0,n_0-1$$

Итак, на всех этапах цикла все производные имеют точность $O\left(h^4\right)$, кроме формулы(18) для граничных значений вихря $O\left(h^2\right)$. Кроме того уравнение динамики вихря (19) имеет точность первого порядка по времени или второй порядок[2] погрешности по координате $O(\tau)=O\left(h^2\right)$.

Можно предположить, что порядок аппроксимация задачи заключен между $O\left(h^2\right)$ и $O\left(h^4\right)$. В работе [1] как и в данной работе для построения поля линий тока по полю скорости использовалась линейная аппроксимация его значений в любой точке по значениям скорости в 4 узловых точках окружающих данную точку $(x_n,y_m),(x_{n+1},y_m),(x_n,y_{m+1}),(x_{n+1},y_{m+1}), x_n\le x\le x_{n+1}, y_m\le y\le y_{m+1}$.

$$\begin{cases}u(x,y)=\left(u_{m,n}\frac{(x_{n+1}-x)}{h_1}+u_{m,n+1}\frac{(x-x_n)}{h_1}\right)\frac{(y_{m+1}-y)}{h_2}+\left(u_{m+1,n}\frac{(x_{n+1}-x)}{h_1}+u_{m+1,n+1}\frac{(x-x_n)}{h_1}\right)\frac{(y-y_m)}{h_2}\\ v(x,y)=\left(v_{m,n}\frac{(x_{n+1}-x)}{h_1}+v_{m,n+1}\frac{(x-x_n)}{h_1}\right)\frac{(y_{m+1}-y)}{h_2}+\left(v_{m+1,n}\frac{(x_{n+1}-x)}{h_1}+v_{m+1,n+1}\frac{(x-x_n)}{h_1}\right)\frac{(y-y_m)}{h_2}\end{cases} \quad (21)$$

Дифференциал дуги линии тока определяется по найденному полю скоростей $u^{n_0}(x_n,y_m)\equiv u^{n_0}_{m,n},v^{n_0}_{m,n}, m=\overline{1,n_2-1}, n=\overline{1,n_1-1}$ на конечном временном слое n_0 дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{u(x,y)}=\frac{dy}{v(x,y)} \quad (22)$$

Используя(21),(22), получим связь соседних точек линии тока (h_3 -дифференциал дуги линии тока - геометрический шаг, который не связан с шагом основной равномерной сетки) по формуле

$$x^{l+1}=x^l+h_3\frac{u(x,y)}{\sqrt{u(x,y)^2+v(x,y)^2}}, y^{l+1}=y^l+h_3\frac{v(x,y)}{\sqrt{u(x,y)^2+v(x,y)^2}}, l=1,2,... \quad (23)$$

Рисунки поля линий тока получены программой с помощью формул(21),(22),(23).

Первые производные давления найдем из системы уравнений(4). Примем, что после всех вычислений по циклу алгоритмом 2)-6) можно считать физические поля скорости, давления, вихря стационарными, тогда из системы уравнений(4) имеем

$$\begin{cases} \overline{p}_{\overline{x}} = -\overline{u}\cdot\overline{u}_{\overline{x}} - \overline{v}\cdot\overline{u}_{\overline{y}} + \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\overline{u}_{\overline{x}\overline{x}} + \overline{u}_{\overline{y}\overline{y}}\right), 0 < \overline{x} < 1, 0 < \overline{y} < R/L = k, \overline{p} = p/\left(\rho u^2{}_{\max}\right) \\ \overline{p}_{\overline{y}} = -\overline{u}\cdot\overline{v}_{\overline{x}} - \overline{v}\cdot\overline{v}_{\overline{y}} + \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\overline{v}_{\overline{x}\overline{x}} + \overline{v}_{\overline{y}\overline{y}}\right), 0 < \overline{u} = u/u_{\max} \le 1, \overline{v} = v/u_{\max} \end{cases} \qquad (24)$$

В формулах (24) дискретный оператор Лапласа с точностью $O\left(h^4\right)$ для функций $\Delta\overline{u}, \Delta\overline{v}$ имеет вид

$$\begin{cases} \Delta\overline{u}_{m,n} = \dfrac{1}{h^2}\left(\dfrac{-1}{3}\overline{u}_{m,n} + \dfrac{2}{3}\left(\overline{u}_{m,n-1} + \overline{u}_{m,n+1} + \overline{u}_{m-1,n} + \overline{u}_{m+1,n}\right) + \dfrac{1}{6}\left(\overline{u}_{m-1,n-1} + \overline{u}_{m+1,n-1} + \overline{u}_{m-1,n+1} + \overline{u}_{m+1,n+1}\right)\right), m = \overline{1, n_2 - 1},\ n = \overline{1, n_1 - 1} \\ \Delta\overline{u}_{m,0} = \dfrac{1}{h^2}\left(\dfrac{15}{4}\overline{u}_{m,0} - \dfrac{77}{6}\overline{u}_{m,1} + \dfrac{107}{6}\overline{u}_{m,2} - 13\overline{u}_{m,3} + \dfrac{61}{12}\overline{u}_{m,4} - \dfrac{5}{6}\overline{u}_{m,5}\right), m = \overline{0, n_2},\ n = 0 \\ \Delta\overline{u}_{m,n1} = \dfrac{1}{h^2}\left(\dfrac{15}{4}\overline{u}_{m,n1} - \dfrac{77}{6}\overline{u}_{m,n1-1} + \dfrac{107}{6}\overline{u}_{m,n1-2} - 13\overline{u}_{m,n1-3} + \dfrac{61}{12}\overline{u}_{m,n1-4} - \dfrac{5}{6}\overline{u}_{m,n1-5}\right), m = \overline{0, n_2},\ n = n_1 \\ \Delta\overline{u}_{0,n} = \dfrac{1}{h^2}\left(\dfrac{15}{4}\overline{u}_{0,n} - \dfrac{77}{6}\overline{u}_{1,n} + \dfrac{107}{6}\overline{u}_{2,n} - 13\overline{u}_{3,n} + \dfrac{61}{12}\overline{u}_{4,n} - \dfrac{5}{6}\overline{u}_{5,n}\right), n = \overline{0, n_1},\ m = 0 \\ \Delta\overline{u}_{n_2,n} = \dfrac{1}{h^2}\left(\dfrac{15}{4}\overline{u}_{n_2,n} - \dfrac{77}{6}\overline{u}_{n_2-1,n} + \dfrac{107}{6}\overline{u}_{n_2-2,n} - 13\overline{u}_{n_2-3,n} + \dfrac{61}{12}\overline{u}_{n_2-4,n} - \dfrac{5}{6}\overline{u}_{n_2-5,n}\right) + \\ + \dfrac{1}{h^2}\left(-\dfrac{5}{2}\overline{u}_{n_2,n} + \dfrac{4}{3}\left(\overline{u}_{n_2,n+1} + \overline{u}_{n_2,n-1}\right) + \dfrac{1}{12}\left(\overline{u}_{n_2-2,n+2} + \overline{u}_{n_2-2,n-2}\right)\right), n = \overline{2, n_1 - 2},\ m = n_2 \end{cases} \qquad (25)$$

Производные первого порядка в (24) $\overline{u}_x, \overline{v}_y$ вычислены по формулам

$$\begin{cases} \left(\overline{u}_{m,n}\right)_x = \dfrac{1}{h}\left(\dfrac{2}{3}\left(\overline{u}_{m,n+1} - \overline{u}_{m,n-1}\right) - \dfrac{1}{12}\left(\overline{u}_{m,n+2} - \overline{u}_{m,n-2}\right)\right), m = \overline{0, n_2},\ n = \overline{2, n_1 - 2} \\ \left(\overline{u}_{m,1}\right)_x = \dfrac{1}{h}\left(-\dfrac{1}{4}\overline{u}_{m,0} - \dfrac{5}{6}\overline{u}_{m,1} + \dfrac{3}{2}\overline{u}_{m,2} - \dfrac{1}{2}\overline{u}_{m,3} + \dfrac{1}{12}\overline{u}_{m,4}\right), m = \overline{0, n_2},\ n = 1 \\ \left(\overline{u}_{m,n_1-1}\right)_x = -\dfrac{1}{h}\left(-\dfrac{1}{4}\overline{u}_{m,n_1} - \dfrac{5}{6}\overline{u}_{m,n_1-1} + \dfrac{3}{2}\overline{u}_{m,n_1-2} - \dfrac{1}{2}\overline{u}_{m,n_1-3} + \dfrac{1}{12}\overline{u}_{m,n_1-4}\right), m = \overline{0, n_2},\ n = n_1 - 1 \\ \left(\overline{u}_{m,0}\right)_x = \dfrac{1}{h}\left(-\dfrac{25}{12}\overline{u}_{m,0} + 4\overline{u}_{m,1} - 3\overline{u}_{m,2} + \dfrac{4}{3}\overline{u}_{m,3} - \dfrac{1}{4}\overline{u}_{m,4}\right), m = \overline{0, n_2},\ n = 0 \\ \left(\overline{u}_{m,n_1}\right)_x = -\dfrac{1}{h}\left(-\dfrac{25}{12}\overline{u}_{m,n_1} + 4\overline{u}_{m,n_1-1} - 3\overline{u}_{m,n_1-2} + \dfrac{4}{3}\overline{u}_{m,n_1-3} - \dfrac{1}{4}\overline{u}_{m,n_1-4}\right), m = \overline{0, n_2},\ n = n_1 \end{cases} \qquad (26)$$

Все дифференциальные операторы в(24),(25),(26) имеют точность $O\left(h^4\right)$.

Затем нужно проинтегрировать поле давления с помощью формулы Симпсона (давление интегрируется на узлы сетки с четными индексами (i,j)). Обозначим интегральные суммы по осям x, y($\overline{p}_{\overline{x}}, \overline{p}_{\overline{y}}$ находятся по(24)):

$$\begin{cases} I_x = \dfrac{h_1}{3}\left(\overline{p}_{\overline{x}\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2}} + \overline{p}_{\overline{x}\frac{n_1}{2},j} + 4\sum_{s=1}^{k_1}\overline{p}_{\overline{x}\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2}+2s-1} + 2\sum_{s=1}^{k_1-1}\overline{p}_{\overline{x}\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2}+2s}\right), k_1 = \left|\dfrac{j - \frac{n_1}{2}}{2}\right|, \\ I_y = \dfrac{h_2}{3}\left(\overline{p}_{\overline{y}\frac{n_1}{2},j} + \overline{p}_{\overline{y}i,j} + 4\sum_{s=1}^{k_2}\overline{p}_{\overline{y}\frac{n_1}{2}+2s-1,j} + 2\sum_{s=1}^{k_2-1}\overline{p}_{\overline{y}\frac{n_1}{2}+2s,j}\right), k_2 = \left|\dfrac{i - \frac{n_2}{2}}{2}\right| \end{cases} \qquad (27)$$

За начальную точку для поля давления удобно взять центр каверны $i = \dfrac{n_2}{2}, j = \dfrac{n_1}{2}, p_{\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2}} = 0$, во – первых, потому что во внутренних точках все операторы аппроксимируются с 4 порядком погрешности, а во-вторых, в угловой точке (начало координат) не определена нормаль для вычисления первой и второй производной на границе прямоугольника. Проведем две прямые параллельно сторонам каверны через ее центр, тогда давление в узле с индексами (i, j) интегрируется по восьми различным формулам:

$$\begin{cases} 1) i>\frac{n_2}{2}\wedge j>\frac{n_1}{2}: k_1=\frac{j-\frac{n_1}{2}}{2}, k_2=\frac{i-\frac{n_2}{2}}{2}, \bar{p}_{i,j}=I_x+I_y; 2) i<\frac{n_2}{2}\wedge j>\frac{n_1}{2}: k_1=\frac{j-\frac{n_1}{2}}{2}, k_2=\frac{\frac{n_2}{2}-i}{2}, \bar{p}_{i,j}=I_x-I_y \\ 3) i>\frac{n_2}{2}\wedge j<\frac{n_1}{2}: k_1=\frac{\frac{n_1}{2}-j}{2}, k_2=\frac{i-\frac{n_2}{2}}{2}, \bar{p}_{i,j}=-I_x+I_y; 4) i>\frac{n_2}{2}\wedge j<\frac{n_1}{2}: k_1=\frac{\frac{n_1}{2}-j}{2}, k_2=\frac{i-\frac{n_2}{2}}{2}, \bar{p}_{i,j}=-I_x+I_y \\ 5) i>\frac{n_2}{2}\wedge j=\frac{n_1}{2}: k_2=\frac{i-\frac{n_2}{2}}{2}, \bar{p}_{i,j}=I_y; 6) i<\frac{n_2}{2}\wedge j=\frac{n_1}{2}: k_2=\frac{\frac{n_2}{2}-i}{2}, \bar{p}_{i,j}=-I_y \\ 7) i=\frac{n_2}{2}\wedge j>\frac{n_1}{2}: k_1=\frac{j-\frac{n_1}{2}}{2}, \bar{p}_{i,j}=I_x; 8) i=\frac{n_2}{2}\wedge j<\frac{n_1}{2}: k_1=\frac{\frac{n_1}{2}-j}{2}, \bar{p}_{i,j}=-I_x \end{cases} \tag{28}$$

На рисунке 1 показаны профили давления на отрезках x=0.5 и y=0.5 для Re=1000, полученные по формулам (24)-(28).

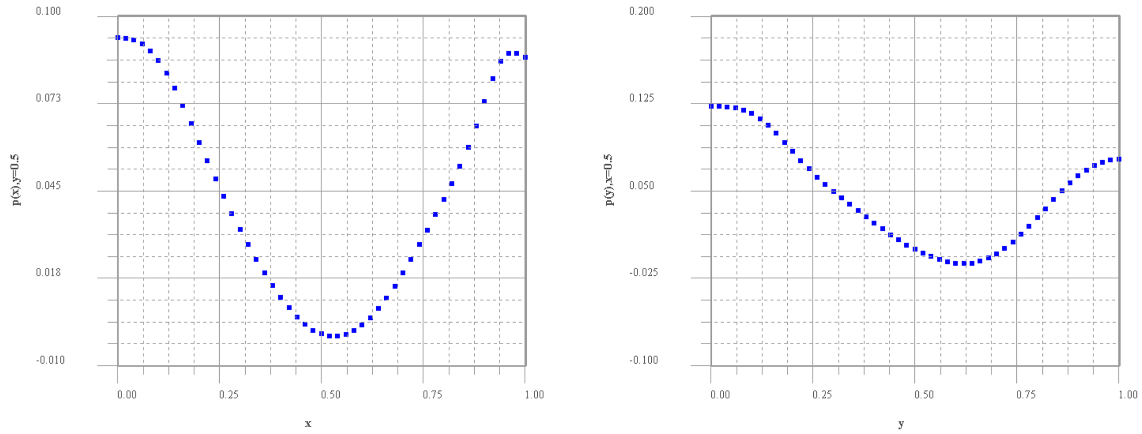

Рис.1. Зависимость давления на отрезках y=0.5 и x=0.5 для Re=1000

Отметим абсолютный минимум на обоих профилях давления Рис.1, а также то, что давление на левой стенке(x=0) на первом профиле больше чем на правой стенке(x=1). На втором профиле давление на дне(y=0) больше давления на верхней крышке(y=1), как в и работе[5]. Отметим, что на твердых неподвижных стенках $\partial p/\partial x\big|_{y=0.5,x=0}=\partial p/\partial x\big|_{y=0.5,x=1}=\partial p/\partial y\big|_{x=0.5,y=0}=\partial p/\partial y\big|_{x=0.5,y=1}=0$, что не противоречит Рис.1. В системе уравнений Навье – Стокса (4) не задано гидростатическое давление, так как оно одно не способно вызвать вихревое движение само по себе.

Отметим, что в работе Фомина А.А., Фоминой Л.Н. [5] колебание значений давления составило 0.05 и 0.1 соответственно на отрезках x=0.5 и y=0.5 для чисел Рейнольдса 10000-20000. На Рис.1 колебания профилей давления соответственно равны 0.125 и 0.1(безразмерное время равно 15 масштабов) для числа Рейнольдса 1000. Отметим также, что на поверхностях поля давления Рис. 1-7 все безразмерные величины не превосходят 1,как и следует ожидать из теории размерностей и подобия. А структура поля давления соответствует структуре в работе Д. Б. Гурова и др. Численное моделирование течений жидкости в каверне на основе квазигидронамической системы уравнений (для числа Рейнольдса 1000) .

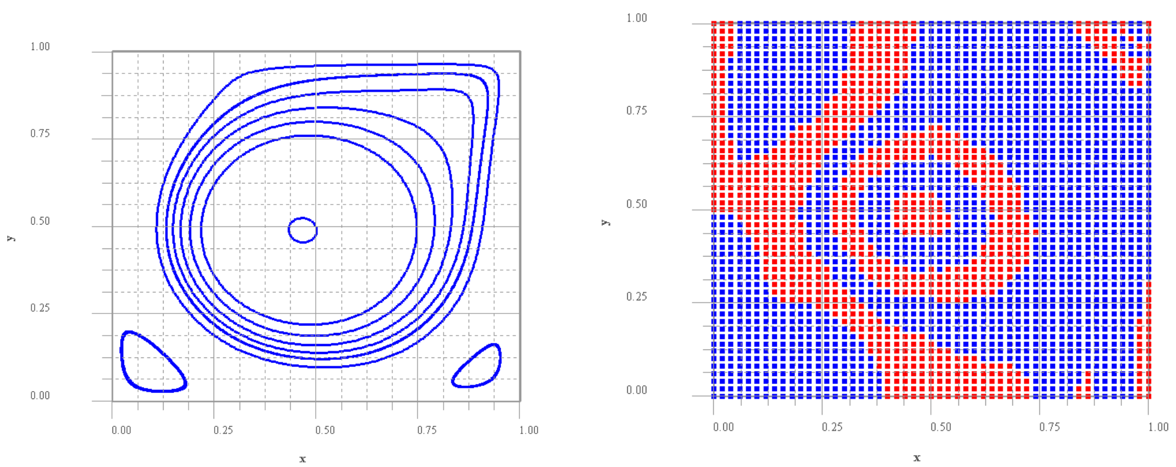

Рис. 2. Поле линий тока и поле давления для числа Рейнольдса Re=1000

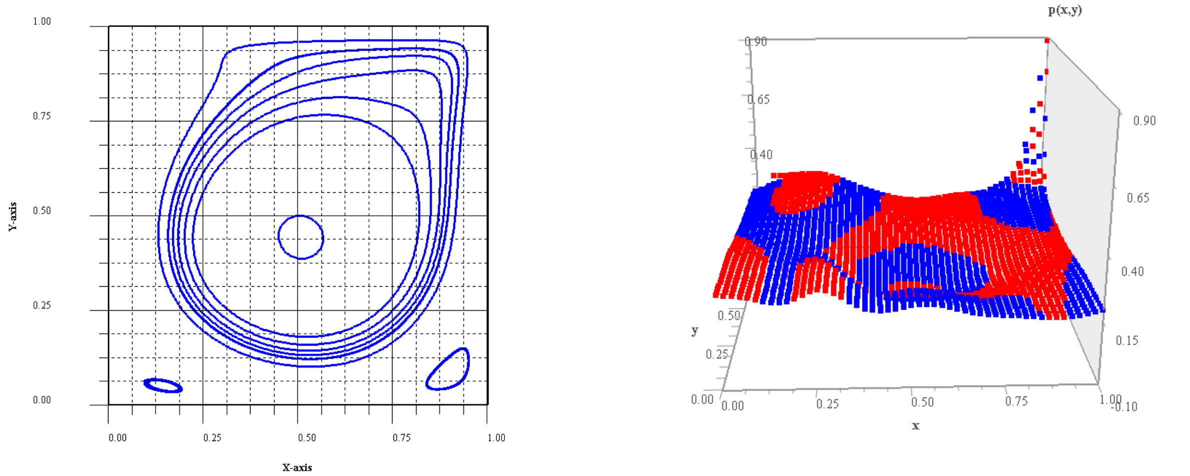

Рис. 3. Поле линий тока и поле давления для числа Рейнольдса Re=800

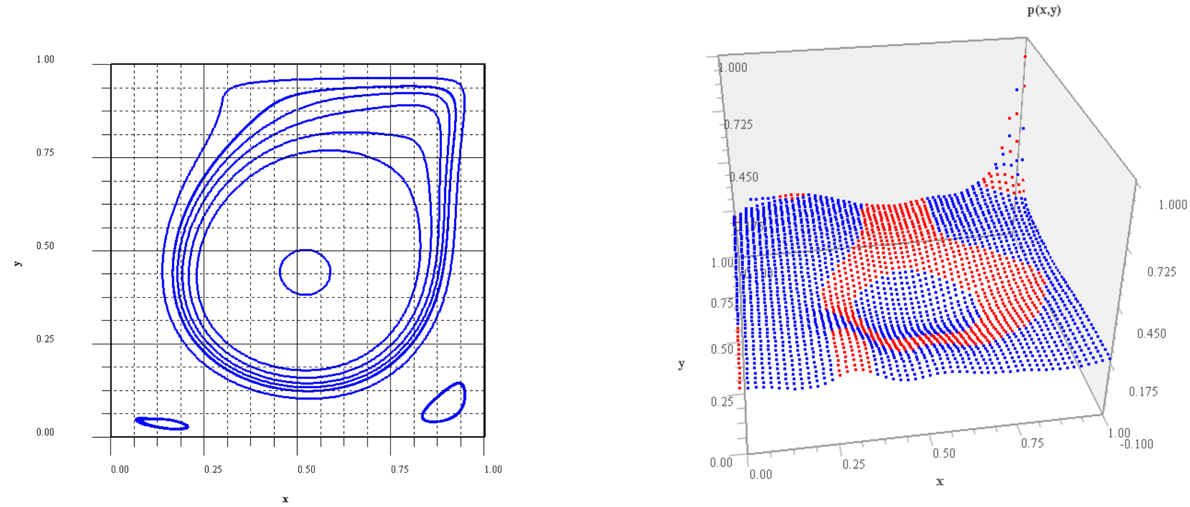

Рис. 4. Поле линий тока и поле давления для числа Рейнольдса Re=770

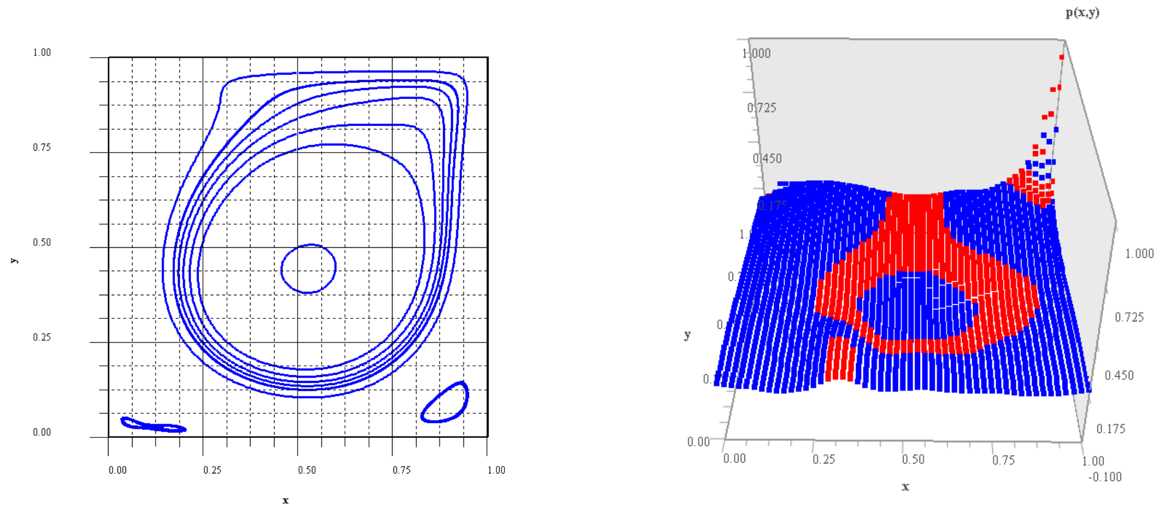

Рис. 5. Поле линий тока и поле давления для числа Рейнольдса Re=750

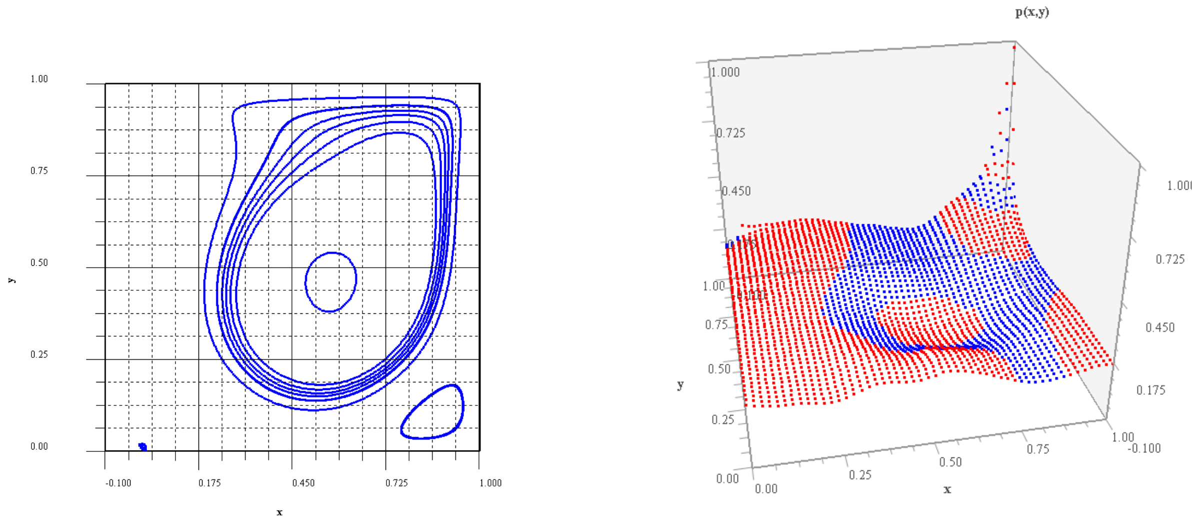

Рис. 6. Поле линий тока и поле давления для числа Рейнольдса Re=600

На рисунках 2-6 показана динамика деформации вторичных вихрей у дна при квазистатическом уменьшении скорости на верхней крышке каверны и соответственно числах Рейнольдса от 1000 до 600(безразмерное время 15 масштабов). При числе Re=1000 у дна каверны расположены два вторичных симметричных вихря (Рис.2). На рисунках 2-6 левый нижний вторичный вихрь(x=0.3,y=0) расположен в области максимума давления. Правый нижний вихрь(x=0.87,y=0) расположен в области минимума давления с небольшим градиентом. Из рисунков и системы уравнений(4) следует, что правый нижний вихрь более устойчив чем левый, так как окружающая среда действует с силой направленной против градиента давления, удерживает правый вихрь у дна в области минимума. Левый вихрь градиентные силы отталкивают к левой стенке и одновременно поворачивают его ось симметрии против часовой стрелки, как на рисунках 3,4, сплющивая вихрь в эллипс при Re=800,770. При Re=750(Рис.5) на левом вихре появляется перемычка, возможно, происходит его дробление на части и дальнейшая диссипация, так что при Re=600 левый вторичный вихрь исчезает (Рис.6).

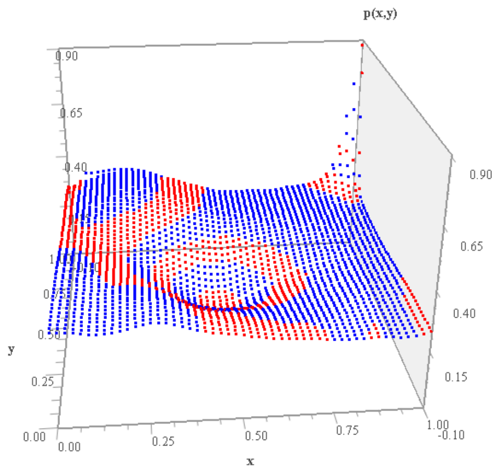

Рис. 7. Поверхность поля давления для числа Рейнольдса Re=1000

Отметим, что в задаче (1)-(25) разностные производные имеют 4-ый порядок аппроксимации $O(h^4)$. Гидродинамическую систему уравнений(1)-(2) необходимо исследовать на устойчивость относительно волновых возмущений (уравнение Орра-Зоммерфельда). В реальной системе всегда возникают возмущения, пусть даже малой амплитуды. Перспективные методы для решения нелинейных уравнений в частных производных (методы параметризации) разработал д.ф.-м.н., профессор К.А. Волосов[6]-[12]. Важность полученных результатов К.А. Волосовым для исследования гидродинамических задач указывали академики В.И. Арнольд и В.П. Маслов.

Литература:

1. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. О роли профиля скорости на верхнем отрезке в гидродинамической задаче для прямоугольной каверны// Евразийское Научное Объединение. – 2020. № 5-1 (63). С. 11-17.

2. A. Salih Streamfunction - Vorticity Formulation//Department of Aerospace Engineering Indian Institute of Space Science and Technology, Thiruvananthapuram-Mach 2013. p.10.
3. Волосова Н.К. О конечных методах решения уравнения Пуассона на прямоугольнике с краевым условием Дирихле // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2020. – № 4. – С. 78–92.
4. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Модифицированное разностное уравнение К.Н. Волкова для уравнения Пуассона на прямоугольнике с шестым порядком погрешности// Евразийское Научное Объединение. – 2020. № 3-1 (61). С. 4-11.
5. Фомин А.А., Фомина Л.Н. Численное моделирование течения жидкости в плоской каверне при больших числах Рейнольдса//Вычислительная механика сплошных сред.2014.Т.7.№4.С 363-377.
6. Волосов К.А., Данилов В.Г., Колобов Н.А., Маслов В.П. Доклады академии наук СССР. 1986. Т.33. С.517
7. Volosov K.A.,Danilov V.G., Maslov V.P. Structure of a weak discontinuity of solutions of quasilinear degenerate parabolic equations// Mathematical Notes. 1988. Т.43. №6. С. 479-485.
8. Danilov V.G., Maslov V.P., Volosov K.A. Mathematical modeling of heat and mass transfer//Originally published in Russian/Dordrecht,1995.
9. Волосов К.А. Одевание решений для некоторых неинтегрируемых задач и некоторые инвариантные свойства анзаца метода Хироты//Дифференциальные уравнения. 2005. Т 41.№ 11.С. 1572-1575.
10. Волосов К.А. О собственных функциях структур, описываемых моделью “мелкой воды” на плоскости// Фундаментальная и прикладная математика. 2006. Т. 12.№ 6. С. 17-32.
11. Волосов К.А. Построение решений квазилинейных параболических уравнений в параметрическом виде// Дифференциальные уравнения, 2007, Т.43, №.4., С.492-497.
12. Волосов К.А. Новый метод построения решений уравнений с частными производными в параметрической форме// Известия Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена. 2007. Т.7. № 26. С. 13-20.
13. Волосов К.А. Конструкция решений квазилинейных уравнений с частными производными// Сибирский журнал индустриальной математики 2008, т.11, н.2(34), С. 29-39 .
14. Пастухов Д.Ф. Аппроксимация уравнения Пуассона на прямоугольнике повышенной точности / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 62–77.
15. Вакуленко С.П., Волосова Н.К., Пастухов Д.Ф. Способы передачи QR-кода в стеганографии/ С.П. Вакуленко, Н.К. Волосова, Д.Ф. Пастухов //Мир транспорта. – 2018. Т.16. № 5(78). С. 14-25.
16. Пастухов Д.Ф., Волосова Н.К., Волосова А.К. Некоторые методы передачи QR-кода в стеганографии/ Д.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова, А.К. Волосова //Мир транспорта. – 2019. Т.17. № 3(82). С. 16-39.