Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ И ПОДГОТОВКИ К КОНТРОЛЬНЫМ МЕРОПРИЯТИЯМ СТУДЕНТОВ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ 1-36 07 02 «ПРОИЗВОДСТВО ИЗДЕЛИЙ НА ОСНОВЕ ТРЕХМЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ» И 1-44 01 02 «ОРГАНИЗАЦИЯ ДОРОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ»

по курсу «МАТЕМАТИКА»

для студентов технических специальностей

Часть 2

Составление
В.С.ВАКУЛЬЧИК, А.П.МАТЕЛЕНОК, Т.И.ЗАВИСТОВСКАЯ

общая редакция
В.С.ВАКУЛЬЧИК

Новополоцк 2020

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

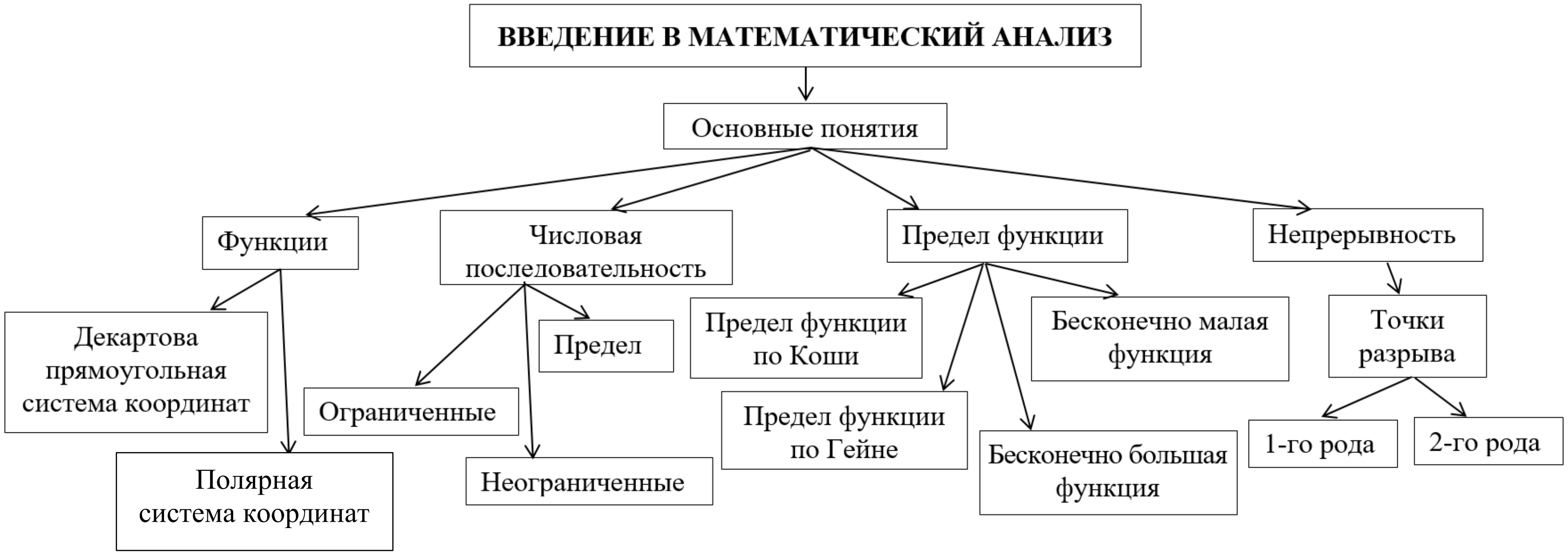
Рекомендованы к изданию учебно-методической комиссией
факультета компьютерных наук и электроники

Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной: методические указания для организации самостоятельной работы и подготовки к контрольным мероприятиям студентов специальностей 1-36 07 02 «Производство изделий на основе трехмерных технологий» и 1-44 01 02 «Организация дорожного движения» для студ. техн. спец. / сост. В.С.Вакульчик, А.П.Мателенок, Т.И.Завистовская, общ. ред. В.С.Вакульчик. – Новополоцк: ПГУ, 2020.

Изложены теоретические основы двух разделов курса высшей математики для студентов технических специальностей: «Введение в математический анализ.» «Дифференциальное исчисление функции одной переменной»; предложено соответствующее дидактическое обеспечение: графические схемы, информационные таблицы, обучающие задачи, трехуровневые тесты, глоссарий, спроектированы возможности использования информационных технологий для организации обучения математике. Предназначен для преподавателей и студентов указанных технических специальностей высших учебных заведений.

МЕТОДИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ПОДГОТОВКИ И ПРОВЕДЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОГО КОНТРОЛЯ ПО РАЗДЕЛУ 4: «ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

Графическая схема модуля



Информационная таблица

<table>
<tr>
<td>Переменная величина y называется функцией от независимой переменной x (аргумента), если указан закон (правило), по которому каждому элементу x некоторого множества ставится в соответствие единственный элемент y того же или другого множества</td>
<td rowspan="7">Алгоритмические предписания

1. При раскрытии неопределенности вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ можно числитель и знаменатель дроби разделить на величину, имеющую в данном процессе наибольший порядок неограниченного роста (бесконечности) (чаще – наивысшую степень переменной).

2. При раскрытии неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, содержащей отношение многочленов, можно:
разложить числитель и знаменатель дроби на множители;
разделить числитель и знаменатель на $(x - x_0)$.

3. При раскрытии неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, содержащей иррациональные выражения, можно:
перевести иррациональность из числителя в знаменатель (или наоборот) путем домножения на сопряженное выражение;
заменить переменную.

4. При раскрытии неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, содержащей тригонометрические выражения, можно воспользоваться первым замечательным пределом $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$.

5. При раскрытии неопределенности вида $\left(1^{\infty}\right)$ можно воспользоваться вторым замечательным пределом $\lim\limits_{y\to 0}\left(1+y\right)^{\frac{1}{y}}=e$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$.

6. При раскрытии неопределенностей вида $\left(\infty-\infty\right),\left(0\cdot\infty\right)$ необходимо воспользоваться сведением их к неопределенностям $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$</td>
</tr>
<tr>
<td>Известны следующие способы задания функции: аналитический, графический, табличный</td>
</tr>
<tr>
<td>Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число x_n, то говорят, что задана последовательность $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n,\ ...=\left\{x_n\right\}$</td>
</tr>
<tr>
<td>Число a называется пределом последовательности $\left\{x_n\right\}$, если для любого положительного $\varepsilon>0$ существует такой номер N, что для всех $n > N$ выполняется условие $\left|x_n-a\right|<\varepsilon$</td>
</tr>
<tr>
<td>(по Коши)
Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x\to a$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta_{\varepsilon}>0$, что для всех таких x, что $\left|x-a\right|<\delta_{\varepsilon}$, верно неравенство $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$</td>
</tr>
<tr>
<td>Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x\to\infty$, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $M>0$, что для всех x, удовлетворяющих $\left|x\right|>M$, выполняется неравенство $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$</td>
</tr>
<tr>
<td>Функция $f(x)$, определенная в x_0 и в некоторой ее окрестности, называется непрерывной в точке x_0, если предел функции и ее значение в этой точке равны, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$</td>
</tr>
<tr>
<td>Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, но не является непрерывной в самой точке x_0, то она называется разрывной функцией, а точка x_0 – точкой разрыва</td>
<td rowspan="2">В полярной системе всякая точка M имеет две координаты: расстояние ρ от полюса O до точки M, т.е. $\rho=\left|\overline{OM}\right|$, и угол φ, который образует радиус-вектор $\overline{OM}$ с осью Op. Числа ρ и φ называются полярными координатами точки M. Они изменяются в границах $0\le\rho<+\infty$, $0\le\varphi\le 2\pi$</td>
</tr>
<tr>
<td>Точка x_0 называется точкой разрыва 1-го рода, если в этой точке функция $f(x)$ имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)\ne\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$</td>
</tr>
</table>

Базовый минимум к разделу «Введение в математический анализ»

Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{4}{x^2} \;-\dfrac{1}{x-2}\right)$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{4}{x^2} \;-\frac{1}{x-2}\right)=\left(\frac{4}{4-4}-\frac{1}{2-2}\right) \;=\left(\frac{4}{0}-\frac{1}{0}\right)=(\infty-\infty).$$

Преобразуем заданное выражение и получим:

$$\frac{4}{x^2-4} \;-\frac{1}{x-2}=\frac{4-(x-2)}{(x+2)(x+2)}=\frac{2-x}{(x-2)(x+2)}=-\frac{(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{-1}{x+2}$$

,

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{-1}{x+2}\right)=-\frac{1}{2+2}=-\frac{1}{4}.$$

Ответ: $-\dfrac{1}{4}$.

2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x-4}$.

Решение. Имеем $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x-4}=\dfrac{16-24+8}{4-4}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Разложим на множители $x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$, а при подстановке получим $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-2)(x-4)}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}(x-2)=2$.

Ответ: 2.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x+5}{x^3+x^2-1}$;

Решение. Числитель и знаменатель дроби – бесконечно большие функции, поэтому имеем неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Для её раскрытия разделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень х, т.е. на x^3.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3}}{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}=\frac{2-0+0}{1+0-0}=2.$$

Ответ: 2.

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+2}{x^2+3x-1}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{5x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\dfrac{0+0}{1+0-0}=0.$

Ответ: 0.

5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-x-2}{x^2-5x+1}=\left(\dfrac{0}{0}\right).$

Решение. Пользуясь разложением квадратного трехчлена на множители, получим:

$$\lim_{x\to1}\frac{3(x-1)\left(x+\frac{2}{3}\right)}{4(x-1)\left(x-\frac{1}{4}\right)}=\frac{3}{4}\lim_{x\to1}\frac{x+\frac{2}{3}}{x-\frac{1}{4}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1+\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{5}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{5}{3}$.

6) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}=\left(\dfrac{0}{0}\right).$

Решение. Избавиться от иррациональности в знаменателе и раскрыть неопределенность поможет домножение числителя и знаменателя дроби на выражение, сопряженное знаменателю, т.е. на ($\sqrt{x+1}+2$).

$$\lim_{x\to3}\frac{\left(x^2-9\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{x+1-4}=\lim_{x\to3}\sqrt{x+1}+2=24$$

Ответ: 24.

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin7x}{2x}=\left(\dfrac{0}{0}\right).$

Решение. Вынесем $\dfrac{1}{2}$ за знак предела, преобразуем выражение и воспользуемся первым замечательным пределом, получим:

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 7x}{7x}\right)\cdot 7=\frac{1}{2}\cdot 7=\frac{7}{2}.$$

Ответ: $\frac{7}{2}$.

8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 8x}=\left(\frac{0}{0}\right)$.

Решение. Преобразуем выражение и воспользуемся первым замечательным пределом, получим: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\sin 5x}{5x}\right)\cdot 5}{\left(\frac{\sin 8x}{x}\right)\cdot 8}=\frac{5}{8}$.

Ответ: $\frac{5}{8}$.

9) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{5}{x}}=\left(1^{\infty}\right)$

Решение. Неопределенность такого вида будем раскрывать с помощью второго замечательного предела. Для этого числитель и знаменатель дроби, стоящей в показателе умножим на 3.

$$\lim_{x\to 0}\left[(1+3x)^{\frac{1}{3\cdot x}}\right]^{5\cdot 3}=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}\cdot 15},$$

где $\alpha=3x$.

Получаем: e^{15}.

Ответ: e^{15}.

10) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{x}=\left(1^{\infty}\right)$$

Решение. Преобразуем выражение, чтобы была возможность воспользоваться вторым замечательным пределом:

$$\frac{x-3+3+2}{x-3}=\frac{x-3}{x-3}+\frac{5}{x-3}=1+\frac{5}{x-3}.$$

Пусть $\alpha=\frac{5}{x-3}$, где $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x-3}=0$. Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x-3}\right)^{x}=\lim_{\alpha\to 0}\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\cdot\alpha\cdot x}=e^{\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ \alpha\to 0}}\alpha\cdot x}.$$

Учитывая, что $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$, получим $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{5x}{x-3}}=e^5$. *Ответ*: e^5.

II. Для заданных функций найти эквивалентные в соответствующем процессе величины:

1) $4x^2-3x+5 \underset{x\to\infty}{\sim} 4x^2$, т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2-3x+5}{4x^2}=1$, а это означает, что функции эквивалентны.

2) $3-2x+x^2 \underset{x\to\infty}{\sim} x^2$ можно доказать аналогично, как в предыдущем случае.

3) $\sin 5x \underset{x\to 0}{\sim} 5x$, т.к. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=1$.

4) $\sin\frac{x}{2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}$, т.к. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1$.

5) $1-\cos 2x \underset{x\to 0}{\sim} 2(\sin x)^2 \underset{x\to 0}{\sim} 2x^2$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(\sin x)^2}{2x^2}=1$.

6) $e^{5x}-1 \underset{x\to 0}{\sim} 5x$ т.к. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{5x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\begin{matrix} e^{5x}-1=y, y\to 0 \\ e^{5x}=1+y, x\to 0 \\ 5x=\ln(1+y) \end{matrix}\right|=$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}}=\frac{1}{\ln e}=1.$$

III. Вычислить с помощью эквивалентных:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin 5x)^2}{x^2}$.

Решение. $\sin 5x \underset{x\to 0}{\sim} 5x$, поэтому $\lim\limits_{x\to 0}\frac{25x^2}{x^2}=25$. *Ответ*: 25.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin\frac{x}{2}}{x}$.

Решение. $\arcsin\frac{x}{2} \underset{x\to0}{\sim} \frac{x}{2}$, поэтому $\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{x}{2}}{x}=\frac{1}{2}$. *Ответ*: $\frac{1}{2}$.

3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}5x}{\arcsin 2x}$;

Решение. Т.к. $\operatorname{arctg}5x \underset{x\to0}{\sim} 5x$, $\arcsin 2x \underset{x\to0}{\sim} 2x$, то $\lim\limits_{x\to0}\frac{5x}{2x}=\frac{5}{2}$.

Ответ: $\frac{5}{2}$.

4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\ \cos 4x}{(\sin x)^2}$.

Решение. Учитывая, что $1-\cos 4x \underset{x\to0}{\sim} 2(\sin 2x)^2 \underset{x\to0}{\sim} 8x^2$, а

$(\sin x)^2 \underset{x\to0}{\sim} x^2$, получим: $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 4x}{(\sin x)^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{8x^2}{x^2}=8$.

IV. 1) Установить область непрерывности функций и найти точки разрыва функций: а) $y=\frac{2x+1}{2x-1}$, б) $y=5^{\frac{5}{x}}$, в) y= ln(5+x).

Решение.

а) $y=\frac{2x+1}{2x-1}$, т.к. дробно-рациональная функция определена на всей числовой прямой, кроме точки, где $2x$-1=0 , получаем точку разрыва $x=\frac{1}{2}$. *Ответ*: $x=\frac{1}{2}$ – точка разрыва.

б) $y=5^{\frac{5}{x}}$.

Данная функция определена и непрерывна на всей числовой прямой кроме точки, где x=0.

Ответ: x=0 – точка разрыва.

в) y= ln(5+x).

Область определения функции состоит из точек, где выполняется неравенство 5+x >0 или x >-5, для этих точек функция будет непрерывной. Точек разрыва нет.

2) Исследовать функцию на непрерывность.

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & \text{если } -1\le x\le 0\\ 1+x^2, & \text{если } \ 0<x\le 2\\ x-3, & \text{если } \ x>2\end{cases}$$

Решение. Внутри каждого интервала из области определения $D(y)=$[-1;+∞) функция непрерывна. Значит, возможными точками разрыва могут быть точки «склеивания» графиков элементарных функций x=0; x=2. Вычислим $y(0)=1$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0-\\ x<0}}\sqrt{1-x^2}=1$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0+\\ x>0}}\sqrt{1-x^2}=1$.

Таким образом, по определению, функция непрерывна в точке x=0.

Вычислим далее $y(2)=5$; $\lim\limits_{\substack{x\to 2-\\ x<2}}1+x^2=5$; $\lim\limits_{\substack{x\to 2+\\ x>2}}1+x^2=5$.

Таким образом, по определению, функция непрерывна в точке x=5.

Графиком на 1-ом участке интервала будет часть окружности $x^2+y^2=1$, где y≥0, На интервале 2-ом: (0;2] имеем параболу $y=x^2+1$, $y(0)=1$; $y(2)=5$. На 3-ем интервале: (2;+∞) – часть прямой.

Задания для самостоятельного решения.

I. Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+1}{4x^2-5x+1}$; *Ответ*: 0,3.

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$; *Ответ*: -4.

3) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+3x-1}{x^2+5x+3}$; *Ответ*: 1.

4) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3+1}{5+x^2+x^3}$; *Ответ*: 2.

5) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x+7}{x^2+3x+10}$; *Ответ*: 0.

6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$; *Ответ*: $\dfrac{1}{6}$.

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 10x}{2}$; *Ответ*: 5.

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{\sin 10x}$; *Ответ*: $\dfrac{8}{13}$.

9) $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{x}}$; *Ответ*: e^5.

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+1}\right)^x$; *Ответ*: e^4.

II. Для заданных функций найти эквивалентные в соответствующем процессе величины:

1) $5x^2\text{-}3x+7 \underset{x\to\infty}{\sim}$; *Ответ*: $5x^2$.

2) $7\text{-}2x+x^3 \underset{x\to\infty}{\sim}$; *Ответ*: x^3.

3) $\sin\dfrac{x}{3} \underset{x\to\infty}{\sim}$; *Ответ*: $\dfrac{x}{3}$.

4) $1\text{-}\cos 4x \underset{x\to\infty}{\sim}$; *Ответ*: $8x^2$.

5) $\sin x^2 \underset{x\to\infty}{\sim}$; *Ответ*: x^2.

6) $e^{2x}\text{-}1 \underset{x\to\infty}{\sim}$; *Ответ*: $2x$.

III. Вычислить с помощью эквивалентных:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{x^2}$; *Ответ*: 9.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arcctg}\frac{x}{3}}{x}$; *Ответ*: $\dfrac{1}{3}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arcctg} 7x}{\operatorname{arcctg} 12x}$; *Ответ*: $\dfrac{7}{12}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\sin^2 2x}$; *Ответ*: $\dfrac{1}{2}$.

IV. 1. Установить область непрерывности функций и найти их точки разрыва:

а) $y=\dfrac{7x+5}{x+5}$; *Ответ*: $(-\infty;-5)\cup(-5;+\infty)$ x=-5.

б) $y=3^{\frac{4}{x}}$; *Ответ*: $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ x=0.

в) $y=\ln(x-2)$; *Ответ*: $(2;+\infty)$ нет точек разрыва.

2. Исследовать на непрерывность и сделать схематический чертеж.

$$y=\begin{cases} x-1, & x\le 0 \\ x^2, & 0<x<2 \\ 2x, & x\ge 2 \end{cases}$$

Ответ: x=0 – точка разрыва I рода.

МЕТОДИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ПОДГОТОВКИ И ПРОВЕДЕНИЯ ИТОГОВОГО КОНТРОЛЯ ПО РАЗДЕЛУ 2

Контрольная работа
Вариант 0

1. Вычислить: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-8x-3}{x^2-x-6}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-8x-3}{x^2-x-6}=\dfrac{3\cdot 9-8\cdot 3-3}{3^2-3-6}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

$$\left|\begin{array}{l} 3x^2-8x-3=0;\ x_1=3;\ \ x_1\cdot x_2=\dfrac{-3}{3}=-1\ \Rightarrow\ x_2=-\dfrac{1}{3};\\ 3x^2-8x-3=3(x-3)\left(x+\dfrac{1}{3}\right);\\ x^2-x-6=0;\quad x_1=3;\ x_1\cdot x_2=\dfrac{-6}{1}=-6\ \Rightarrow\ x_2=-2;\\ x^2-x-6=(x-3)(x+2)\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(3x+1)}{(x-3)(x+2)}=\lim_{x\to 3}\frac{3x+1}{x+2}=\frac{10}{5}=2.$$

Ответ: 2.

2. Вычислить: $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+3x-2}{3x^2+2x+8}$;

Решение. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+3x-2}{3x^2+2x+8}=\dfrac{2\cdot 4-3\cdot 2-2}{3\cdot 4-2\cdot 2+8}=\left(\dfrac{0}{16}\right)=0$.

Ответ: 0.

3. Вычислить: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^5-4x^4-1}{x^3-1}$;

Решение. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^5-4x^4-1}{x^3-1}=\dfrac{5\cdot 1-4\cdot 1-1}{1-1}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

$$
\left|\begin{array}{l|l}
5x^5-4x^4-1 & \underline{(x-1)} \\
\underline{-(5x^5-5x^4)} & (5x^4+x^3+x^2+x+1) \\
\quad x^4-1 & \\
\underline{-(x^4-x^3)} & \\
\quad x^3-1 & \\
\underline{-(x^3-x)} & \\
\quad x-1 & \\
\underline{-(x-1)} & \\
\qquad 0 &
\end{array}\right| =
$$

$=x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\left(5x^4+x^3+x^2+x+1\right)}{\cancel{(x-1)}\left(x^2+x+1\right)}=\frac{9}{3}=3.$$

Ответ: 3.

4. Вычислить: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x^2-4}$;

Решение.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x-2}-2}{x^2-4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{3x-2}-2\right)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}{\left(\sqrt{3x-2}+2\right)\left(x^2-4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3x-2-4}{\left(\sqrt{3x-2}+2\right)\left(x^2-4\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{3x-6}{\left(\sqrt{3x-2}+2\right)\left(x^2-4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3\cancel{(x-2)}}{\left(\sqrt{3x-2}+2\right)\cancel{(x-2)}\,(x+2)}=\frac{3}{4\cdot 4}=\frac{3}{16}$$

.

Ответ: $\dfrac{3}{16}$.

5. Вычислить: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+3x^4-x+1}{5x^3-8x^5-9x^8}$;

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2+3x^4-x+1}{5x^3-8x^5-9x^8}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{7x^2}{x^8}+\dfrac{3x^4}{x^8}-\dfrac{x}{x^8}+\dfrac{1}{x^8}}{\dfrac{5x^3}{x^8}-\dfrac{8x^5}{x^8}-\dfrac{9x^8}{x^8}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\underbrace{\dfrac{7}{x^6}}_{\to 0}+\underbrace{\dfrac{3}{x^4}}_{\to 0}-\underbrace{\dfrac{1}{x^7}}_{\to 0}+\underbrace{\dfrac{1}{x^8}}_{\to 0}}{\underbrace{\dfrac{5}{x^5}}_{\to 0}-\underbrace{\dfrac{8}{x^3}}_{\to 0}-9}=\frac{0}{-9}=0.$$

Ответ: 0.

6. Вычислить: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{3x^2}$;

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 7x}{3x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{7x}{2}}{3x^2}=\frac{2}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\underbrace{\left(\frac{\sin\dfrac{7x}{2}}{\dfrac{7}{2}x}\right)^2}_{\to 1}\cdot\frac{49}{4}=\frac{2}{3}\cdot\frac{49}{4}=\frac{49}{6}$$

.

Ответ: $\dfrac{49}{6}$.

7. Вычислить: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-3}{4x+5}\right)^{x-3}$;

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-3}{4x+5}\right)^{x-3}=\left|\begin{matrix}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x-3}{4x+5}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-\dfrac{3}{x}}{4+\dfrac{5}{x}}=1, \\ \lim\limits_{x\to\infty}(x-3)=\infty\end{matrix}\right|=\left(1^\infty\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{4x-3}{4x+5}-1\right)\right)^{x-3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-8}{4x+5}\right)^{x-3}=$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\left[\left(1+\frac{-8}{4x+5}\right)^{\frac{4x+5}{-8}}\right]^{\frac{-8}{4x+5}}\right)^{x-3} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-8(x-3)}{4x+5}} = e^{-8\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-3}{4x+5}} = e^{-8\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{3}{x}}{4+\frac{5}{x}}} = e^{\frac{-8}{4}} = e^{-2}$$

.

Ответ: e^{-2}

8. Вычислить: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+3}{3x-4}\right)^{2x-1}$;

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+3}{3x-4}\right)^{2x-1} = \left|\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x+3}{3x-4} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{5+\frac{3}{x}}{3-\frac{4}{x}} = \frac{5}{3} \\ \lim\limits_{x\to\infty}(2x-1) = \infty \end{array}\right| =$$

$$= \left(\frac{5}{3}\right)^{\infty} = \left[\begin{array}{ll} +\infty, & \text{если } x\to+\infty \\ 0, & \text{если } x\to-\infty \end{array}\right..$$

Ответ: $\left[\begin{array}{ll} +\infty, & \text{если } x\to+\infty \\ 0, & \text{если } x\to-\infty \end{array}\right..$

9. Вычислить: $\lim\limits_{x\to\infty}(x-2)\left[\ln(7x-3)-\ln(7x+4)\right]$;

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}(x-2)\left[\ln(7x-3)-\ln(7x+4)\right] = \lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{7x-3}{7x+4}\right)^{x-2} =$$

$$=\left|\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x-3}{7x+4}\right)^{x-2}=\left(1^{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\left(\dfrac{7x-3}{7x+4}-1\right)\right]^{x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\dfrac{-7}{7x+4}\right]^{x-2}=\\ =\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{-7}{7x+4}\right)^{\frac{7x+4}{-7}}\right]^{\frac{-7(x-2)}{7x+4}}=e^{-7\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-2}{7x+4}}=e^{\frac{-7}{7}}=e^{-1}>0\end{array}\right|=$$

$$=\ln\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7x-3}{7x+4}\right)^{x-2}=\ln e^{-1}=-1.$$

Ответ: -1.

10. Вычислить: $\lim\limits_{x\to 3}\left(4x-11\right)^{\frac{x+1}{x^2-9}}$;

Решение.

$$\lim_{x\to 3}\left(4x-11\right)^{\frac{x+1}{x^2-9}}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to 3}\left(\left[1+\left(4x-12\right)\right]^{\frac{(4x-12)\cdot(x+1)}{x^2-9}}\right)=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 3}\frac{4(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+3)}}=e^{4\cdot\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+1}{x+3}}=e^{4\cdot\frac{4}{6}}=e^{\frac{8}{3}}.$$

Ответ: $e^{\frac{8}{3}}$.

11. Вычислить: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\left(1+\cos x\right)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}$;

Решение. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\left(1+\cos x\right)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\left|\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{2}=y;\quad y\to 0\\ x=\frac{\pi}{2}+y\quad x\to\frac{\pi}{2}\end{array}\right|=$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\ln\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+y\right)\right)}{y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{\ln\left(1-\sin y\right)}{y^2}=\left|\ln\left(1+\left(-\sin y\right)\right)\underset{y\to 0}{\sim}\left(-\sin y\right)\right|=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{-\sin y}{y^2}=-\lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin y}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}=\left|\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1\right|=-\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}=-\infty.$$

Ответ: $-\infty$.

12. Исследовать на непрерывность $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & \dfrac{\pi}{2}<x<\pi\\ 2, & x\ge\pi\end{cases}$.

Решение.

1) Внутри промежутков задания функция представлена непрерывными функциями.

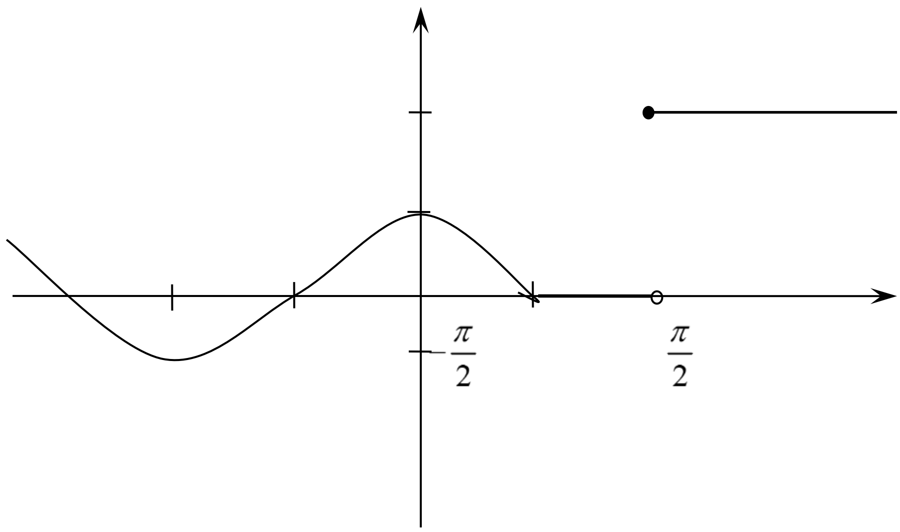
Значит, возможными точками разрыва могут быть $x=\dfrac{\pi}{2}$; $x=\pi$.

2) Имеем:
$$\left.\begin{array}{l} f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\dfrac{\pi}{2}=0\\ \lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}-0\\ x<\frac{\pi}{2}}} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x=0\\ \lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}+0\\ x>\frac{\pi}{2}}} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}0=0\end{array}\right] \Rightarrow$$

при $x=\dfrac{\pi}{2}$ - функция непрерывна.

3)
$$\left.\begin{array}{l} f(\pi)=2\\ \lim\limits_{\substack{x\to\pi-0\\ x<\pi}} f(x)=\lim\limits_{x\to\pi}0=0\\ \lim\limits_{\substack{x\to\pi+0\\ x>\pi}} f(x)=\lim\limits_{x\to\pi}2=2\end{array}\right] \quad 0\ne2 \quad\Rightarrow$$

при $x = \pi$ функция терпит разрыв I рода.



АНАЛОГИЧНЫЙ ВАРИАНТ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - x - 6}$ *Ответ*: $\frac{1}{7}$.
2. $\lim\limits_{x \to -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{3x^2 + 2x - 8}$ *Ответ*: 1.
3. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{7x^5 - 6x^4 - 1}{x^3 - 1}$ *Ответ*: $\frac{11}{3}$.
4. $\lim\limits_{x \to -3} \frac{\sqrt{x+4} - 1}{\sqrt{3-2x} - 3}$ *Ответ*: $-\frac{3}{2}$.
5. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{7x^8 + 3x^4 - x + 1}{5x^3 - 8x - 9x^8}$ *Ответ*: $-\frac{7}{9}$.
6. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos 3x}{\cos x}$ *Ответ*: 0.
7. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x-3}{x+9} \right)^{x-2}$ *Ответ*: e^{-12}.
8. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{8x+1}{3x+7} \right)^{3x-1}$ *Ответ*: $\begin{cases} +\infty, \text{ если x} \to +\infty \\ 0, \text{ если x} \to -\infty \end{cases}$.
9. $\lim\limits_{x \to 1} (2x-1)^{\frac{x+1}{x^2-1}}$ *Ответ*: e^2.
10. $\lim\limits_{x \to \infty} x\left(\ln(x-3) - \ln(x+3)\right)$ *Ответ*: -6.
11. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+\cos x)}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$ *Ответ*: -1.

12.Исследовать функцию на непрерывность

$$F(X)=\begin{cases} 1-x, x\in(-\infty;0] \\ \frac{1}{x}, x\in(0;2) \\ \frac{x}{4}, x\in[2;+\infty) \end{cases}$$

Ответ: при $x=0$ - функция терпит разрыв II рода, при $x=2$ функция непрерывна.

ТРЕХУРОВНЕВЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ К РАЗДЕЛУ «ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

Уровень I

I. Вычислить:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$; **Ответ:** 0.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{n+1}+3^{n+1}}{5^n+3^n}$; **Ответ:** 5.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x^2-6}{2x^4-x+2}$; **Ответ:** 1,5.

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7-3x}{5x^3+2x^2-1}$; **Ответ:** 0.

5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-x-6}$; **Ответ:** $\dfrac{1}{7}$.

6) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$; **Ответ:** $\dfrac{1}{10}$.

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$; **Ответ:** $\dfrac{2}{3}$.

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\operatorname{arctg} x}$; **Ответ:** 5.

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 8x}$; **Ответ:** $\dfrac{1}{4}$.

10) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$; **Ответ:** e^2.

11) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+3)\left[\ln(x+2)-\ln x\right]$. **Ответ:** 4.

II. Для заданных функций найти эквивалентные в соответствующем процессе величины:

1) $20+5x-8x^2+5x^3 \underset{x\to\infty}{\sim}$; **Ответ:** $5x^3$.

2) $3x+x^3 \underset{x\to 0}{\sim}$; **Ответ:** $3x$.

3) $x^2 \operatorname{tg} x \underset{x\to 0}{\sim}$; **Ответ:** x^3.

4) $\sqrt{x}+\sin x \underset{x\to 0}{\sim}$; **Ответ:** $\sqrt{x}$.

5) $\operatorname{tg} x+2x \underset{x\to 0}{\sim}$; **Ответ:** $3x$.

6) $1-\cos 5x \underset{x\to 0}{\sim}$; **Ответ:** $\dfrac{25x^2}{2}$.

7) $e^{2x}-1 \underset{x\to 0}{\sim}$; **Ответ:** $2x$.

8) $\ln\left(5x^2+3x+1\right) \underset{x\to 0}{\sim}$. **Ответ:** $3x$.

III. Вычислить с помощью эквивалентных:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{x^2}$; **Ответ:** $\dfrac{1}{4}$.

2) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}(6x-3)}{\sin(2x-1)}$; **Ответ:** 3.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{\sin 7x}$; **Ответ:** 0.

4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{e^{x+1}-1}{2x+2}$; **Ответ:** $\dfrac{1}{2}$.

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 7x}{5x^2-3x}$. **Ответ:** $-\dfrac{7}{3}$.

IV.

1. Установить область непрерывности функций и найти их точки разрыва:

а) $y=\dfrac{7x+4}{7x-4}$; **Ответ:** $x=\dfrac{4}{7}$, точка разрыва 2-го рода

$D(y)=\left(-\infty;\dfrac{4}{7}\right)\cup\left(\dfrac{4}{7};+\infty\right)$.

б) $y=2^{\frac{1}{x+5}}$; **Ответ:** $x=-5$, точка разрыва 2-го рода,

$D(y)=(-\infty;-5)\cup(-5;+\infty)$.

в) $\ln\left(1-x^2\right)$. **Ответ:** $D(y)=(-1;1)$.

2. Исследовать на непрерывность и сделать схематический чертеж:

$$f(x)=\begin{cases} x-3, & x<0, \\ x+1, & 0\le x\le 4, \\ x^2+3, & x>4. \end{cases}$$

IV. Найти соответствие между условием и графиком. Ответ представить в виде:

1) – …; 2) – …; 3) – …; 4) – …; 5) – …; 6) – …

1. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$.

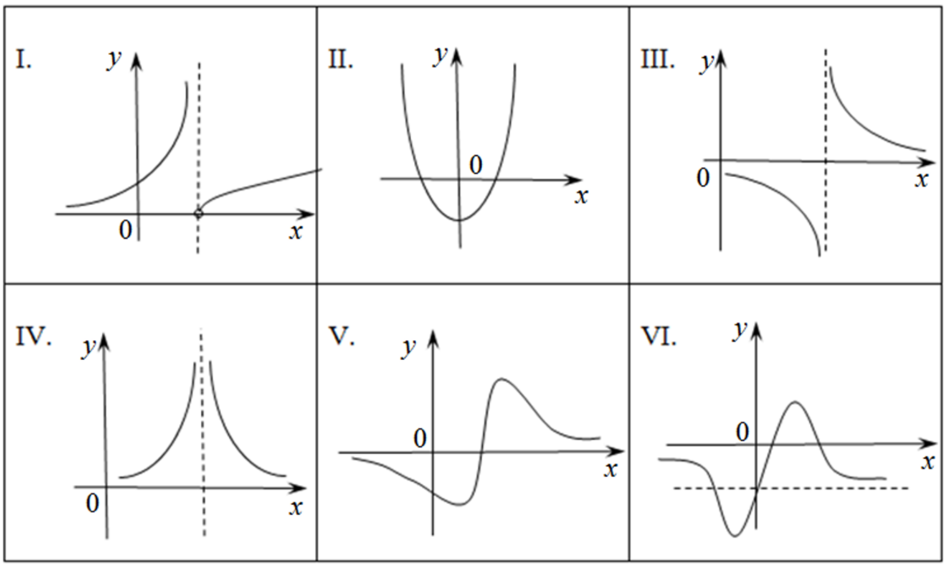
2. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$.

3. $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=+\infty, \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty, \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty. \end{cases}$

5. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-1$.

6. $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-1, \\ \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0. \end{cases}$



Уровень II

I. Вычислить:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$. **Ответ:** $\dfrac{4}{3}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[4]{n^5+2}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2}-\sqrt{n^3+1}}$. **Ответ:** 0.

3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^3-8x+8}$. **Ответ:** $-\dfrac{1}{4}$.

4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}{3x^4-5x^3+2x^2-x+1}$. **Ответ:** $\dfrac{1}{2}$.

5. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x-2-\sqrt{4x^2-x-2}}{x^2-3x+2}$. **Ответ:** $\dfrac{1}{2}$.

6. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^3-2x-1}{\sqrt{3x^3+9}-\sqrt{4x^3+8}}$. **Ответ:** $-\dfrac{28\sqrt{3}}{3}$.

7. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos 3x}{\sin 2x}$. **Ответ:** .$-\dfrac{3}{2}$

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\cos x}-\sqrt{2}\cos x}{\sqrt{3+\cos x}-2\cos x}$. **Ответ:** $\dfrac{3\sqrt{2}}{7}$.

9. $\lim\limits_{x\to +\infty} \operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. **Ответ:** $\dfrac{\pi}{4}$.

10. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{(2x+1)^{10}}{3x^{10}-7x^9+3x^2-2}$. **Ответ:** $\dfrac{2^{10}}{3}$.

11. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^x-e}{x-1}$. **Ответ:** e.

12. $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)^{\frac{1}{2x}}$. **Ответ:** 1.

13. $\lim\limits_{x\to \infty}\left((2x+1)\left(\ln(3x+1)-\ln(3x-2)\right)\right)$. **Ответ:** 2.

II. Для заданных функций найти эквивалентные в соответствующем процессе величины:

1. $\sqrt{x+\sqrt{x^2+\sqrt{x^3+1}}} \underset{x\to\infty}{\sim}$. **Ответ:** $\sqrt{2x}$.

2. $\sqrt[7]{1-3x-5x^2}-1 \underset{x\to0}{\sim}$. **Ответ:** $-\dfrac{3}{7}$.

3. $1-\cos^3 2x \underset{x\to0}{\sim}$. **Ответ:** $6x^2$.

4. $a^{3x}-\cos 9x \underset{x\to0}{\sim}$. **Ответ:** $3x\ln a$.

5. $\ln\left(3-2e^{2x}\right) \underset{x\to0}{\sim}$. **Ответ:** $-4x$.

6. $\left(x^3-2x^5\right)\lg\left(1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}\right) \underset{x\to0}{\sim}$. **Ответ:** $\dfrac{x^5}{4\ln 10}$.

7. $e^{2x}-e^{\pi} \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim}$. **Ответ:** 0.

III. Вычислить с помощью эквивалентных:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^4}+2\sqrt[3]{1+x^6}}{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2}$. **Ответ:** $\dfrac{3}{4}$.

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(2e^{x\sin x}-1\right)}{\ln\cos x}$. **Ответ:** -4.

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+2x}\cdot\sqrt[4]{1+3x}}{x}$. **Ответ:** $\dfrac{1}{2}$.

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2\left(1-\cos x\right)}$. **Ответ:** 1.

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\cos x}+e^{\cos 2x}-2e^{\cos 4x}}{x^2}$. **Ответ:** $-\dfrac{27}{2}$.

6. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\arcsin\left(4-x\right)}{5^{4-x}-1}$. **Ответ:** $\log_5 e$.

7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^2 2x}{x\cdot\arcsin x}$. **Ответ:** 2.

IV. Доказать по определению, что:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{3n}=1$.

2. $\lim\limits_{x\to 5}\left(2x^2-5x\right)=25$.

Уровень III

I. Вычислить:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2010\sqrt{2010\sqrt{2010\ldots}}}$. **Ответ:** 2010.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot\sin\dfrac{2x+1}{x^2+4x^3}$. **Ответ:** $\dfrac{1}{2}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\ln\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}$. **Ответ:** $\dfrac{1}{2}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg}x\ln\left(x+\sqrt{x+1}\right)$. **Ответ:** $\dfrac{1}{2}$.

5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}-0}\left(\cos x-\sin x\right)\sqrt{\operatorname{tg}2x}$; **Ответ:** 0.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{4}{3}}\left(\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)$. **Ответ:** $\dfrac{1}{3}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3}{1-\cos x\sqrt{\cos x}}-\dfrac{1}{1-\sqrt{\cos x}}$. **Ответ:** 1.

8. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(\dfrac{1}{1+2\cos 2x}-\dfrac{\sqrt{3}}{2\sin 3x}\right)$. **Ответ:** $-\dfrac{1}{3}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+\sin x\right)^{\frac{1}{x}}$. **Ответ:** e^2.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{\ln\cos x}}$. **Ответ:** 0.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$. **Ответ:** $e^{-\frac{1}{2}}$.

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$. **Ответ:** e.

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+5}{x^2+x+1}\right)^{x}$. **Ответ:** e^2.

14. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x-1}{2x-3}\right)^{\frac{4}{x^2-4}}$. **Ответ:** e^{-1}.

15. $\lim\limits_{x\to +0}\left(\frac{x-1}{2x-3}\right)^{\frac{1}{x}}$. **Ответ:** 0.

16. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x-1}{2x-3}\right)^{3x}$. **Ответ:** 1.

II. Доказать по определению, что:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2}=0$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos n\alpha}{n-1}=0$.

III. Исследовать на непрерывность:

1. $f(x)=x^2\cdot\sin\frac{1}{x}$.

Ответ: $x=0$ – точка устранимого разрыва.

2. $f(x)=\begin{cases} x\cdot\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

Ответ: $x=0$ – точка непрерывности.

IV. Выделить главную часть функций:

1. $y=\sqrt[5]{x^2-3}-1$ при $x\to 2$.

Ответ: $\frac{4}{5}(x-2)$.

2. $y=\ln\left(x^2-x-1\right)$ при $x\to 2$.

Ответ: $3\cdot(x-2)$.

3. $y=\ln\left(\frac{x^2+2x+4}{x^2-x-1}\right)$ при $x\to\infty$.

Ответ: $\frac{3}{x}$.

4. $y=\ln(\cos ax+\sin bx)$ при $x\to 0$.

Ответ: bx.

5. $y=\sqrt[3]{\cos 2x}-1$ при $x\to 0$.

Ответ: $-\dfrac{2x^2}{3}$.

V. Вычислить с помощью эквивалентных:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{\ln x}$. **Ответ:** e.

2. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^x-e^a}{\ln x-\ln a}$. **Ответ:** $a\cdot e^a$.

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3^x-\sqrt{8+x}}{x-1}$. **Ответ:** 2.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{2x^2+10x-1}-\sqrt[7]{2x^2+10x-1}}{x}$. **Ответ:** $\dfrac{4}{7}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x}-x\right)^{\frac{1}{x}}$. **Ответ:** $e^{-\frac{1}{2}}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+x\sin 10x}-1}{x^2}$. **Ответ:** 2.

7. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$. **Ответ:** $\dfrac{1}{e}$.

VI. Построить графики функций:

1. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^{2n}x$.

2. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}\quad (x\ge 0)$.

ГЛОССАРИЙ

Новые понятия	Содержание
1	*2*
Функция	правило, закон, по которому каждому элементу x (аргументу) некоторого множества X (области определения) соответствует единственный элемент y (зависимая переменная) другого множества $У$ (область значений функции)
Четная функция	функция f, у которой область определения симметрична относительно начала координат и для всех x из ее области определения $f(-x) = f(x)$
Нечетная функция	функция f, у которой область определения симметрична относительно начала координат и для всех x из ее области определения $f(-x) = -f(x)$
Функция монотонно возрастающая (убывающая) на интервале $(a,\ b) \in X$	функция $y = f(x)$, для которой большему значению аргумента из $(a,\ b)$ соответствует большее (меньшее) значение функции, т.е. для $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$
Ограниченная функция	функция, для которой в заданной области определения существует постоянное $k > 0$, такое, что $\lvert f(x) \rvert \le k$
Основные элементарные функции	1) *степенная* $y = x^p$, где p – действительное число; 2) *показательная* $y = a^x$, где a – положительное число, не равное 1; 3) *логарифмическая* $y = \log_a x$, где $a > 0$, не равно 1; 4) *тригонометрические* $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{ctg} x$ $y = \operatorname{tg} x$; обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$ $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$
Предел последовательности	число A, к которому можно приблизиться с любой степенью точности при стремлении номера члена последовательности к бесконечности, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$
Предел функции $y = f(x)$ *при стремлении аргумента* x *к фиксированному значению* x_0	число A, к которому может приблизиться значение функции y с любой наперед заданной точностью ε: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$

1	2
Два замечательных предела	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{y \to \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$
Функция $y = f(x)$ *непрерывна в точке* $x = x_0$	если существует значение функции в точке x_0 и ее предел в точке x_0 равен значению функции в этой точке $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, или ее предел справа равен пределу слева при $x \to x_0$ и равен значению функции в этой точке: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$ $\left(f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0)\right)$

ПРИЛОЖЕНИЕ

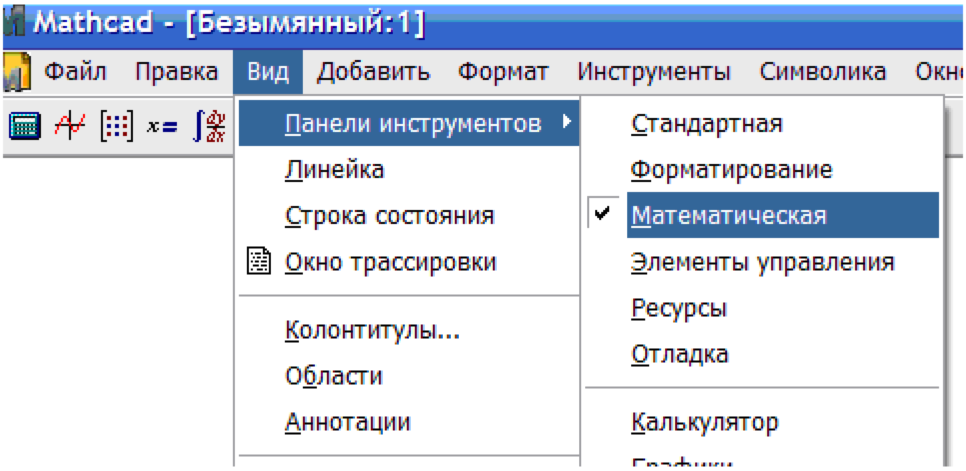
Решение задач по теме «Введение в математический анализ» с помощью математических пакетов Maple и Mathcad

Предлагаемые программы помогут Вам при проверке домашнего задания или, при необходимости, предоставят возможность быстрого вычисления пределов любой сложности, исследования функций на непрерывность и др.

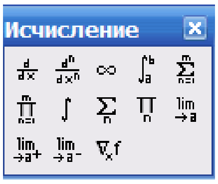
Рассмотрим один из наиболее популярных математических пакетов MathCAD.

Чтобы начать работать с приложением, вызовите панель Calculus (вычисления).

Выберите на панели вкладку ВИД → ПАНЕЛИ ИНСТРУМЕНТОВ → МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

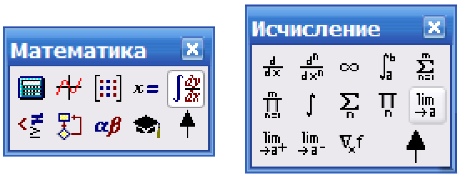


Появится панель 

, на данной вкладке необходимо выбрать панель «Исчисление» 

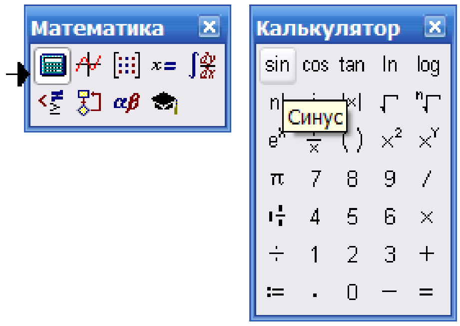
и продолжить работу.

Например, Вы хотите вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$. Для этого на вкладке «Исчисление» найдите значок предела

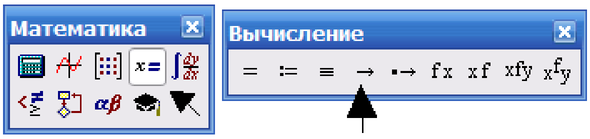


(на рисунке на него указывает стрелочка).

После этого появляется следующий символ $\lim\limits_{\blacksquare \to \blacksquare} \blacksquare$, в нашем примере $x \to 0$, поэтому нижние поля мы заполняем соответственно $\lim\limits_{x \to 0} \blacksquare$. Далее, используя вкладку «калькулятор»

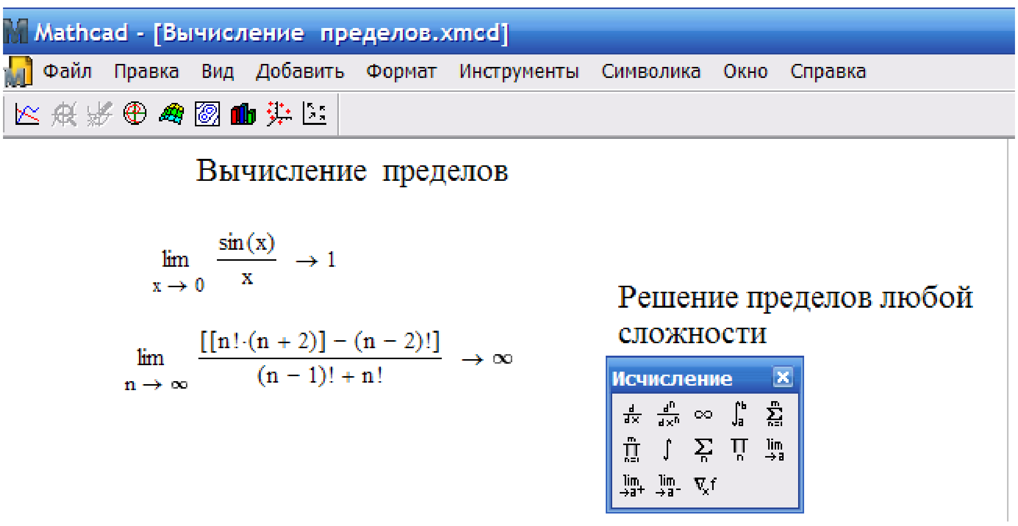


, заполним основное поле $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$. Затем выбираем «вычисление»



, на этой вкладке стрелочку и видим результат $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \to 1$.

Далее разобраны задачи наиболее часто встречаемые в теме «Введение в математический анализ».



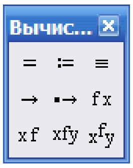
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \to 1$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{[[n! \cdot (n+2)] - (n-2)!]}{(n-1)! + n!} \to \infty$$

Исследовать на непрерывность

$$y = \frac{4 - x^2}{8 + x^3}$$

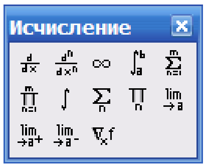
$$y(x) := \frac{(4 - x^2)}{8 + x^3}$$

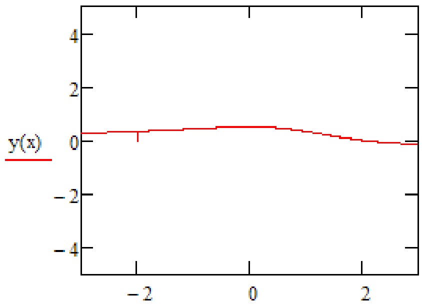


Предполагаемая точка разрыва x=-2

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{(4 - x^2)}{8 + x^3} \to \frac{1}{3}$$ исследуем слева

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{(4 - x^2)}{8 + x^3} \to \frac{1}{3}$$ исследуем справа





Построение графика

Рассмотрим несколько функций и убедимся, что они бесконечно малые

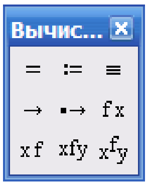
$f(x) := \sqrt{1 + x^2} - 1$ $\quad \lim_{x \to 0} f(x) \to 0$

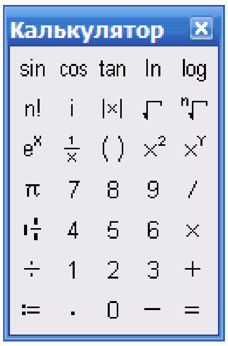
$p(x) := \exp(x^2) - 1$ $\quad \lim_{x \to 0} p(x) \to 0$

$u(x) := x \cdot \ln(1 + \sqrt{x})$ $\quad \lim_{x \to 0} u(x) \to 0$

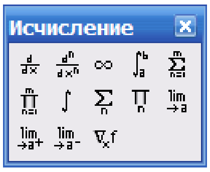
$v(x) := 1 - \cos(x^3)$ $\quad \lim_{x \to 0} v(x) \to 0$

$w(x) := x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad \lim_{x \to 0} w(x) \to 0$



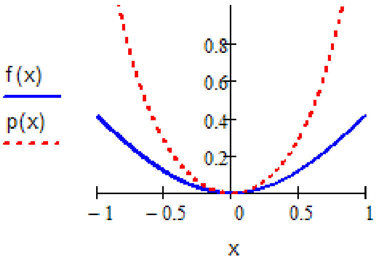


Все они бесконечно малые сравним некоторые из них

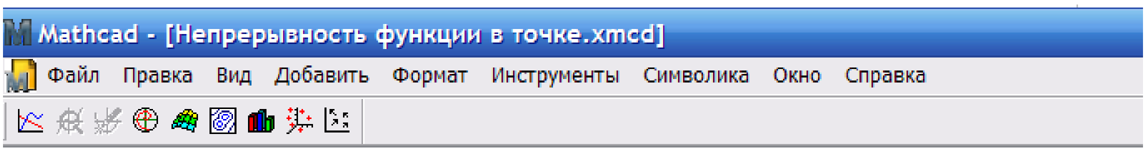


$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{p(x)} \to \frac{1}{2}$$

они одного порядка малости

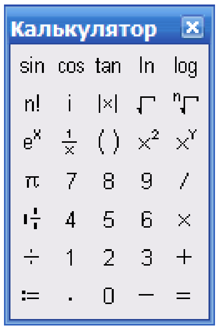


Строим графики



Убедимся в непрерывности функции в точке x=2

$y(x) := x^4 - 2$



Нейдём значение функции в точке

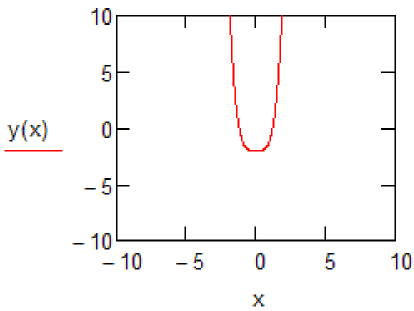
$y(2) = 14$

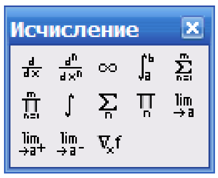
$$\lim_{x \to 2} y(x) \to 14$$

Вычиислим предел в этой точке

Функция непрерывна

Сироим график





Рассмотрим вычисление пределов любой сложности, исследование функций на непрерывность с помощью математического пакета **Maple.** Maple имеет несколько операторов для работы с пределами: Limit (функция, $x = a$) – отображает искомый предел, limit (функция, $x = a$) – выводит ответ. На разобранных примерах мы демонстрируем сочетание этих операторов.

Нужно помнить, что в выбранной программе очень важное место занимают операторы «:» – присвоить, «;» – окончание предложения.

Вычисление пределов

> $Limit\left(\frac{sin(10\cdot x)}{10\cdot x}, x=\pi\right)=limit\left(\frac{sin(x)}{x}, x=\pi\right);$

$$\lim_{x\to\pi}\left(\frac{1}{10}\,\frac{\sin(10\,x)}{x}\right)=0$$

> $Limit\left(sqrt\left(25\cdot x^2+x+2\right)\text{-}sqrt\left(25\cdot x^2\text{-}3\cdot x\right),\ x=\infty\right)=limit\left(sqrt\left(25\cdot x^2+x+2\right)-sqrt\left(25\cdot x^2-3\cdot x\right), x=\infty\right);$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{25\,x^2+x+2}-\sqrt{25\,x^2-3\,x}\right)=\frac{2}{5}$$

> $Limit\left(sin\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{sin(2\cdot x)}}, x=\pi\right)=limit\left(sin\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{sin(2\cdot x)}},\ x\ =\ \pi\right);$

$$\lim_{x\to\pi}\sin\left(\frac{1}{2}\,x\right)^{\left(\frac{1}{\sin(2\,x)}\right)}=1$$

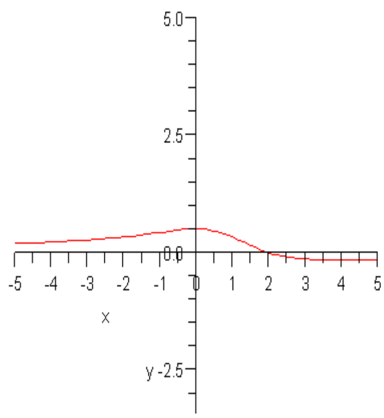
> $Limit\left(\frac{(4-x^2)}{8+x^3}, x=-2, left\right)=limit\left(\frac{(4-x^2)}{8+x^3}, x=-2, left\right)$; исследование функции на непрерывность в точке $x=-2$ слева

$$\lim_{x\to-2-}\left(\frac{4-x^2}{8+x^3}\right)=\frac{1}{3}$$

> $Limit\left(\frac{(4-x^2)}{8+x^3}, x=-2, right\right)=limit\left(\frac{(4-x^2)}{8+x^3}, x=-2, right\right)$; исследование функции на непрерывность в точке $x=-2$ справа

$$\lim_{x\to-2+}\left(\frac{4-x^2}{8+x^3}\right)=\frac{1}{3}$$

> $plot\left(\frac{(4-x^2)}{8+x^3}, x=-5..5, y=-5..5\right)$; построение графика функций



При необходимости Вы можете воспользоваться нашими примерами, просто введите свои данные в предложенные нами операторы.

МЕТОДИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ПОДГОТОВКИ И ПРОВЕДЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОГО КОНТРОЛЯ ПО РАЗДЕЛУ 3: «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

ГРАФИЧЕСКАЯ СХЕМА МОДУЛЯ

Информационная таблица *«Дифференциальные исчисления»*

Производной от функции $y = y(x)$ в точке x называется предел приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю, если этот предел существует, конечен и не зависит от способа стремления Δx к нулю.

$$\boxed{y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Таблица производных

степенная

1. $\left(u^n\right)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$;
2. $x' = 1$;
3. $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$;
4. $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u'$;

тригоно-метрические

5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;
6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;
7. $(\mathrm{tg}\, u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;
8. $(\mathrm{ctg}\, u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;

показательные

9. $\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$;
10. $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$;

логарифмическая

11. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$;
12. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$;

обрат-нотри-гоно-метри-

13. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
14. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
15. $(\mathrm{arctg}\, u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
16. $(\mathrm{arcctg}\, u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

гиперболические

17. $(\mathrm{sh}\, u)' = \mathrm{ch}\, u \cdot u'$;
18. $(\mathrm{ch}\, u)' = \mathrm{sh}\, u \cdot u'$;
19. $(\mathrm{th}\, u)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 u} \cdot u'$;
20. $(\mathrm{c\,th}\, u)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 u} \cdot u'$.

Правила дифференцирования

1. $c' = 0$; **2.** $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

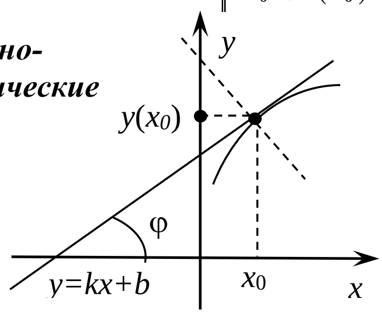
3. $(uv)' = u'v + uv'$; **4.** $(cu)' = cu'$;

5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$; **6.** $f_x'(u(x)) = f_u' \cdot u_x'$.

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'}, \quad y_{xx}'' = \frac{(y_x')_t'}{x_t'}, \quad if \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

$$y_x' = -\frac{F_x'}{F_y'}, \qquad if \;\; F(x;y) = 0$$

Геометрический смысл производной: производная от функции $y = f(x)$ в точке x_0 есть тангенс угла наклона касательной, проведённой к графику функции в точке $x_0 : y'(x_0) = \mathrm{tg}\,\alpha = k$.



$$\boxed{y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)}$$

- уравнение касательной.

$$\boxed{y = y(x_0) - \frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)}$$

- уравнение нормали

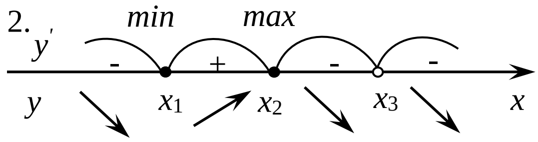
Механический смысл производной: производная от функции S, равная $S'(t)$, где $S(t)$-путь, пройденный материальной точкой за время t, есть мгновенная скорость материальной точки в определенный момент времени. $S = S(t)$, $v_{мгн}(t_0) = S'(t_0)$

I. ***Монотонность, экстремум***

1. Найти критические точки

$y' = 0$ | y' - не существует

2.



II. ***Наибольшее и наименьшее значения***

1. Найти критические точки.
2. Вычислить $f(x)$ в критических точках, попавших в отрезок.
3. Вычислить $f(x)$ на концах отрезка
4. Выбрать $f_{наиб.}$ и $f_{наим.}$

Базовый минимум к разделу

1. Найти производную данной функции:

а) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$; б) $y=e^x\cos x$;

в) $y=\dfrac{x}{4^x}$; г) $y=\sqrt[3]{x^2}-x\sqrt[4]{x}$.

Р е ш е н и е. а) Применяя формулы $\left(u/v\right)'=\left(u'v-uv'\right)/v^2$ и $x'=1$, $c'=0$, получаем

$$y'=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'=\frac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{1\cdot(x-1)-(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2}.$$

б) Применяя формулы $\left(uv\right)'=u'v+uv'$, $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$, находим

$$y'=\left(e^x\right)'\cos x+e^x\left(\cos x\right)'=e^x\cos x+e^x(-\sin x)=$$

$$=e^x(\cos x-\sin x).$$

в) Используя формулы $\left(u/v\right)'=\left(u'v-uv'\right)/v^2$, $\left(a^x\right)'=a^x\ln a$, $x'=1$, получаем

$$y'=\left(\frac{x}{4^x}\right)'=\frac{(x)'\cdot 4^x-x\cdot(4^x)'}{4^{2x}}=\frac{4^x-x\cdot 4^x\ln 4}{4^{2x}}=$$

$$=\frac{4^x\left(1-x\ln 4\right)}{4^{2x}}=\frac{1-x\ln 4}{4^x}.$$

г) Имеем

$$y=\sqrt[3]{x^2}-x\sqrt[4]{x}=x^{2/3}-x^{5/4}.$$

Тогда

$$y'=\frac{2}{3}x^{-1/3}-\frac{5}{4}x^{1/4}.$$

2. Найти производную функции:

а) $y=tgx\cdot\log_3 x$; б) $y=\dfrac{e^x-\ln x}{e^x+\ln x}$; в) $y=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$.

Р е ш е н и е. Применяя правила дифференцирования и используя таблицу производных, находим:

а)

$$y' = (tgx \cdot \log_3 x)' = (tgx)' \log_3 x + tgx(\log_3 x)' = \frac{\log_3 x}{\cos^2 x} + \frac{tgx}{x \ln 3};$$

б)

$$y' = \left(\frac{e^x - \ln x}{e^x + \ln x} \right)' = \frac{(e^x - \ln x)'(e^x + \ln x) - (e^x - \ln x)(e^x + \ln x)'}{(e^x + \ln x)^2} =$$

$$= \frac{(e^x - 1/x)(e^x + \ln x) - (e^x - \ln x)(e^x + 1/x)}{(e^x + \ln x)^2} =$$

$$= \frac{e^{2x} - e^x / x + e^x \ln x - \ln x / x - e^{2x} + \ln x \cdot e^x - e^x / x + \ln x / x}{(e^x + \ln x)^2} =$$

$$= \frac{2e^x \ln x - 2e^x / x}{(e^x + \ln x)^2} = \frac{2e^x (\ln x - 1/x)}{(e^x + \ln x)^2};$$

в)

$$y' = \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x} \right)' = \frac{(\sin x)'(1 + \cos x) - \sin x(1 + \cos x)'}{(1 + \cos x)^2} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot (1 + \cos x) - \sin x \cdot \sin x}{(1 + \cos x)^2} = \frac{1 + \cos x}{(1 + \cos x)^2} = \frac{1}{1 + \cos x}.$$

3. Найти производную данной функции:

а) $y = 5^{2x-3}$; б) $y = \ln \sin x$;

в) $y = \sin^2 x$; г) $y = arctg\sqrt{x}$.

Р е ш е н и е. а) Введем обозначение $2x - 3 = u$. Тогда $y = 5^u$, и, применив формулу для производной сложной функции, получим:

$$y' = \left(5^u\right)' = 5^u \ln 5 \cdot u' = 5^{2x-3} \ln 5 \cdot (2x - 3)' = 5^{2x-3} \ln 5 \cdot 2.$$

б) Пусть $u = \sin x$, тогда $y = \ln u$. Имеем:

$$y' = \left(\ln u\right)' = \frac{1}{u} u' = \frac{1}{\sin x} (\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = ctgx.$$

в) Если $u = \sin x$, то $y = u^2$ и

$$y' = \left(u^2\right)' = 2uu' = 2\sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x.$$

г) Если $u=\sqrt{x}$, то $y=arctgu$ и

$$y'=(arctgu)'=\frac{1}{1+u^2}u'=$$

$$=\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{1+x}\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}.$$

4. Найти производную данной функции:

а) $y=\ln tg\frac{2x+1}{4}$; б) $y=\log_2(\log_3(\log_5 x))$;

в) $y=e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}$; г) $y=10^{1-\sin^4 3x}$;

д) $y=\arcsin^2(\ln(x^3+6))$.

Р е ш е н и е. а) Пусть $u=tg\frac{2x=1}{4}$, тогда $y=\ln u$ и

$$y'=\frac{1}{u}u'=\frac{1}{tg\frac{2x+1}{4}}\left(tg\frac{2x+1}{4}\right)'=\frac{1}{tg\frac{2x+1}{4}}\frac{1}{\cos^2\frac{2x+1}{4}}\times$$

$$\times\left(\frac{2x+1}{4}\right)'=\frac{1}{\sin\frac{2x+1}{4}\cdot\cos\frac{2x+1}{4}}\frac{1}{2}=\frac{1}{\sin\frac{2x+1}{2}}.$$

б) Запишем данную функцию в виде $y=\log_2 u$, где $u=\log_3(\log_5 x)$. Тогда

$$y'=\frac{1}{u\ln 2}u'=\frac{1}{\log_3(\log_5 x)\cdot\ln 2}\cdot(\log_3(\log_5 x))'=$$

$$=\frac{1}{\log_3(\log_5 x)\cdot\ln 2}\cdot\frac{1}{\log_5 x\cdot\ln 3}\cdot(\log_5 x)'=$$

$$=\frac{1}{\log_3(\log_5 x)\cdot\ln 2}\cdot\frac{1}{\log_5 x\cdot\ln 3}\cdot\frac{1}{x\ln 5}.$$

в) Записав данную функцию в виде $y=e^u$, где $u=\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}$, имеем

$$y'=e^u u'=e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}\left(\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}\right)'=$$

$$=e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}\left(\ln(ax^2+bx+c)\right)'=$$

$$= \frac{e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}}{2\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}} \cdot \frac{1}{ax^2+bx+c} \cdot \left(ax^2+bx+c\right)' =$$

$$= \frac{e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}}{2\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}} \cdot \frac{1}{ax^2+bx+c} \cdot \left(2ax+b\right) =$$

$$= \frac{e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}}{2\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}} \cdot \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}.$$

г) Пусть $u = 1 - \sin^4 3x$, тогда $y = 10^u$ и

$$y' = 10^u \ln 10 \cdot u' = 10^{1-\sin^4 3x} \ln 10 \cdot \left(1 - \sin^4 3x\right)' =$$

$$= 10^{1-\sin^4 3x} \ln 10 \cdot \left(-4\sin^3 3x\right)\left(\sin 3x\right)' =$$

$$= 10^{1-\sin^4 3x} \ln 10 \cdot \left(-4\sin^3 3x\right)\cos 3x \cdot 3 =$$

$$= -12 \ln 10 \cdot 10^{1-\sin^4 3x} \cdot \sin^3 3x \cdot \cos 3x.$$

д) Если $u = \arcsin \ln(x^3+6)$, то $y = u^2$ и

$$y' = 2uu' = 2\arcsin(\ln(x^3+6)) \cdot \left(\arcsin \ln(x^3+6)\right)' =$$

$$= 2\arcsin(\ln(x^3+6)) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\ln^2(x^3+6)}} \left(\ln(x^3+6)\right)' =$$

$$= 2\arcsin(\ln(x^3+6)) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\ln^2(x^3+6)}} \frac{1}{x^{3+6}} \left(x^3+6\right)' =$$

$$= 2\arcsin(\ln(x^3+6)) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\ln^2(x^3+6)}} \frac{1}{x^3+6} \left(x^3+6\right)' =$$

$$= 2\arcsin(\ln(x^3+6)) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\ln^2(x^3+6)}} \frac{3x^2}{x^3+6} =$$

$$= \frac{6x^2 \arcsin(\ln(x^3+6))}{(x^3+6)\sqrt{1-\ln^2(x^3+6)}}.$$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1.1 – 1.6 найти производную указанной функции.

1.1 $y=\dfrac{(x+2)^2}{x^{3/2}}$. $\left(Ответ: y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{2}{x\sqrt{x}}-\dfrac{6}{x^2\sqrt{x}}.\right)$

1.2 $y=\dfrac{x^2-3x+5}{x}$. $\left(Ответ: y'=(x^2-5)/x^2.\right)$

1.3 $y=\dfrac{\arccos x}{1-x^2}$. $\left(Ответ: y'=\dfrac{2x\arccos x-\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^2}.\right)$

1.4 $y=x\ln x-x$. $\left(Ответ: y'=\ln x.\right)$

1.5 $y=3^x\arcsin x$. $\left(Ответ: y'=\dfrac{3^x}{\sqrt{1-x^2}}+3^x\ln 3\cdot\arcsin x.\right)$

1.6 $y=(1+x^2)arctgx$. $\left(Ответ: y'=1+2xarctgx.\right)$

В задачах 2.1 – 2.9 найти производную сложной функции .

2.1 $y=\sqrt{3x^3-x^2-5}$. $\left(Ответ: y'=\dfrac{x(9x-2)}{2\sqrt{3x^3-x^2+5}}.\right)$

2.2 $y=(2x+3x^2)^{-3/4}$. $\left(Ответ: y'=\dfrac{-3(1+3x)}{2\sqrt[4]{(2x+3x^2)^7}}.\right)$

2.3 $y=\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$. $\left(Ответ: y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}.\right)$

2.4 $y=\dfrac{\sqrt{5-x^2}}{5+x}$. $\left(Ответ: y'=\dfrac{-5(x+1)}{(5+x)^2\sqrt{5-x^2}}.\right)$

2.5 $y=\cos^4 x$. $\left(Ответ: y'=-4\cos^3 x\cdot\sin x.\right)$

2.6 $y=4^{\cos x}$. $\left(Ответ: y'=-4^{\cos x}\ln 4\cdot\sin x.\right)$

2.7 $y=\sqrt{e^x}$. $\left(Ответ: y'=\dfrac{1}{2}\sqrt{e^x}.\right)$

2.8 $y=\ln\sin x+\dfrac{1}{2}\cos^2 x$. $\left(Ответ: y'=\dfrac{\cos^3 x}{\sin x}.\right)$

2.9 $y=arctg\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$. $\left(Ответ: y'=-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}.\right)$

В задачах 3.1 – 3.4 найти производную данной функции.

3.1 $y=\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\sqrt{1-x^2}$. $\left(\textit{Ответ}: y'=\dfrac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}.\right)$

3.2 $y=\arccos\sqrt{1-2x}+\sqrt{2x-4x^2}$. $\left(\textit{Ответ}: y'=\sqrt{\dfrac{2}{x}-4}.\right)$

3.3 $y=\ln\left(\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}\right)$. $\left(\textit{Ответ}: y'=\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}.\right)$

3.4 $y=\sqrt{4x-x^2}+4\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)$. $\left(\textit{Ответ}: y'=-\sqrt{\dfrac{4}{x}-1}.\right)$

МЕТОДИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ПОДГОТОВКИ И ПРОВЕДЕНИЯ ИТОГОВОГО КОНТРОЛЯ ПО РАЗДЕЛУ3: «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

Внеаудиторная контрольная работа по теме «*Дифференциальное исчисление функции одной переменной*»

Вариант 0

1. Найти производные следующих функций

1.1. $y=\ln\operatorname{tg}\sqrt{\operatorname{arctg}2^{5x}}$;

$$y'_x=\frac{1}{\operatorname{tg}\sqrt{\operatorname{arctg}2^{5x}}}\cdot\frac{1}{\cos^2\sqrt{\operatorname{arctg}2^{5x}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg}2^{5x}}}\cdot\frac{1}{1+\left(2^{5x}\right)^2}\cdot 2^{5x}\ln 2\cdot 5.$$

1.2. $y=\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$;

Применим формулу: $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$$y'_x=\frac{-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\sqrt{1-x^2}-\arccos x\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{\left(1-x^2\right)}=\frac{-\sqrt{1-x^2}+x\cdot\arccos x}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\frac{x\cdot\arccos x-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}.$$

1.3. $y=\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\sqrt{1-x^2}$;

$$y'_x=\frac{\left(\arcsin x+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\sqrt{1-x^2}-x\cdot\arcsin x\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\frac{\left(1-x^2\right)\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}+x^2\cdot\arcsin x}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}-\frac{x}{1-x^2}=\frac{\arcsin x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}.$$

1.4. $xy=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$;

Эта функция задана неявно. По правилу дифференцирования неявной функции получим

$$\left(xy\right)'=\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)'\Rightarrow y+xy'=\frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{y-xy'}{y^2}\Rightarrow y'=\frac{y\left(1-x^2-y^2\right)}{x\left(1+x^2+y^2\right)}.$$

1.5. $y=\left(\cos x\right)^{\sin x}$;

Применение методов предварительного логарифмирования упрощает вычисление производной сложно- показательной функции. Логарифмируя, имеем

$$\ln y=\sin x\cdot\ln\cos x.$$

Дифференцируем обе части этого уравнения, не забывая что

$$y=y\left(x\right);\qquad \frac{1}{y}\cdot y'=\cos x\cdot\ln\cos x+\sin x\cdot\frac{1}{\cos x}\left(-\sin x\right).$$

Следовательно,

$$y'=\left(\cos x\right)^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln\cos x-\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right)=\left(\cos x\right)^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln\cos x-\operatorname{tg}x\sin x\right).$$

2. Найти производные второго порядка:

2.1. $y=\left(\arcsin x\right)^2$;

$$y'=2\arcsin x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$y''=2\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\arcsin x\frac{-\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}\right)=$$

$$=2\left(\frac{1}{1-x^2}+\frac{x\cdot\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}\left(1-x^2\right)}\right)=2\frac{\sqrt{1-x^2}+x\cdot\arcsin x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}.$$

2.2. $y=\begin{cases} x=t\cdot\ln t \\ y=\dfrac{\ln t}{t}\end{cases}$;

Функция задана параметрически,

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t};\qquad y''_{xx}=\left(y'_x\right)'_x=\frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t};$$

$$y'_t=\frac{\frac{1}{t}\cdot t-\ln t}{t^2}=\frac{1-\ln t}{t^2};$$

$$x'_t=\ln t+t\cdot\frac{1}{t}=\ln t+1;\qquad\qquad y'_x=\frac{1-\ln t}{t^2\left(1+\ln t\right)};$$

$$\left(y'_x\right)'_t=\frac{-\frac{1}{t}t^2\left(1+\ln t\right)-\left(1-\ln t\right)\left(2t\left(1+\ln t\right)+t^2\frac{1}{t}\right)}{t^4\left(1+\ln t\right)^2}=$$

$$=\frac{-t\left(1+\ln t\right)-\left(1-\ln t\right)t\left(3+2\ln t\right)}{t^4\left(1+\ln t\right)^2};$$

$$y''_{xx}=\frac{-t\left(1+\ln t\right)-\left(1-\ln t\right)t\left(3+2\ln t\right)}{t^4\left(1+\ln t\right)^3}.$$

3. Найти дифференциал функции:

3.1. $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$;

$$dy = f'(x)dx \qquad dy = \frac{1-(1+x)-(1-x)}{\frac{1-x}{1+x}\cdot(1-x^2)}dx = \frac{-2}{1-x^2}dx.$$

3.2. $y = e^{3x+2}$, $\quad x = \cos t$;

Учитывая свойства инвариантности дифференциала, имеем

$dy = e^{3x+2}\cdot 3(-\sin t)dt = -3e^{3\cos t+2}\sin t\cdot dt$.

4. Вычислим приближенное значение $\sin 45^0 06'$;

$\Delta y \approx dy$; $\quad \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$;

$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x; \Rightarrow f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$.

Эта формула дает возможность найти значение функции $f(x+\Delta x)$ в некоторой точке $x+\Delta x$, если известно значение функции $y = f(x)$ и ее производной в точке x.

Вычислим без таблиц $\sin 45^0 06'$.

$x = \frac{\pi}{4}$: $\quad \Delta x = \frac{\pi}{180}\cdot\frac{6}{60} = \frac{\pi}{1800}$: $\qquad f(x) = \sin x$; $\quad f'(x) = \cos x$;

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{1800}\right) \approx \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{1800} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{1800} \approx 0.7083$$

5. Показать, что функция $y = 3\sin x - 4\cos x$ удовлетворяет данному уравнению:

$y'' + y = 0$,

$y' = 3\cos x + 4\cos x$;

$y'' = -3\sin x + 4\cos x$.

После подстановки в уравнение, имеем

$-3\sin x + 4\cos x + 3\sin x - 4\cos x = 0; \quad \Rightarrow \ 0 = 0$.

6. Определить наибольшее и наименьшее значения, точки перегиба функции изгибающего момента $M(x)= x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ на отрезке $[-2;2]$.

1) Функция изгибающего момента $M(x)$ на данном отрезке достигает своего наибольшего (наименьшего) значения или в критических точках, или на концах этого отрезка.

$M'(x) = 3x^2 - 6x + 3$; $\qquad M'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$; $\quad x = 1 \in [-2;2]$,

$M(1) = 3$; $\quad M(-2) = -24$; $\qquad M(2) = 4$.

Сравнивая значения функции в этих точках, заключаем, что наименьшее значение функции m =-24 достигается при x =-2 (на левом конце отрезка), а наибольшее M = 4 в точке x = 2 (на правом конце отрезка).

2) Находим точки перегиба $M''(x) = 6x - 6;\quad M''(x) = 0 \Rightarrow x = 1$

$$M''(1+\varepsilon) > 0 \qquad M''(1-\varepsilon) < 0.$$

Так как $M''(x)$ при переходе x через x = 1 меняет знак, следовательно, x = 1 является точкой перегиба.

7. Исследовать функцию и построить ее график $y = \dfrac{2x^3}{x^2 - 4}$.

1) $D(y) = [-\infty;-2] \cup [-2;2] \cup [2;+\infty]$;

Прямые $x = \pm 2$ являются вертикальными асимптотами;

$$\lim_{x \to -2-0} \frac{2x^3}{x^2 - 4} = -\infty; \qquad \lim_{x \to -2-0} \frac{2x^3}{x^2 - 4} = +\infty;$$

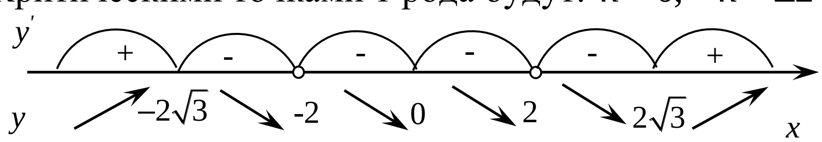
$$\lim_{x \to -2-0} \frac{2x^3}{x^2 - 4} = -\infty; \qquad \lim_{x \to -2-0} \frac{2x^3}{x^2 - 4} = +\infty;$$

2) Функция нечетная, график симметричен относительно начала координат, поэтому исследование функции достаточно провести на промежутке $[0;\infty]$. Функция не периодична.

3) Находим первую производную

$$y' = \frac{6x^2(x^2-4) - 2x^3 \cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^2} = \frac{2x^4 - 24x^2}{\left(x^2-4\right)^2} = \frac{2x^2\left(x^2-12\right)}{\left(x^2-4\right)^2}.$$

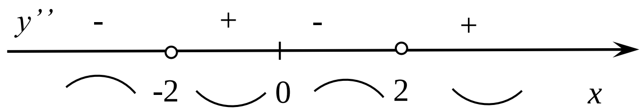
Критическими точками 1 рода будут: $x = 0, \quad x = \pm 2\sqrt{3}$.



$$y_{\max}\left(-2\sqrt{3}\right) = y\left(-2\sqrt{3}\right) = -6\sqrt{3},$$

$$y_{\max}\left(2\sqrt{3}\right) = 6\sqrt{3}$$

4) Вторая производная $y'' = \dfrac{16x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$ дает критическую точку второго рода x = 0.



$$y_{перег.} = y(0) = 0$$

5) Находим наклонную асимптоту
$y = kx + b$

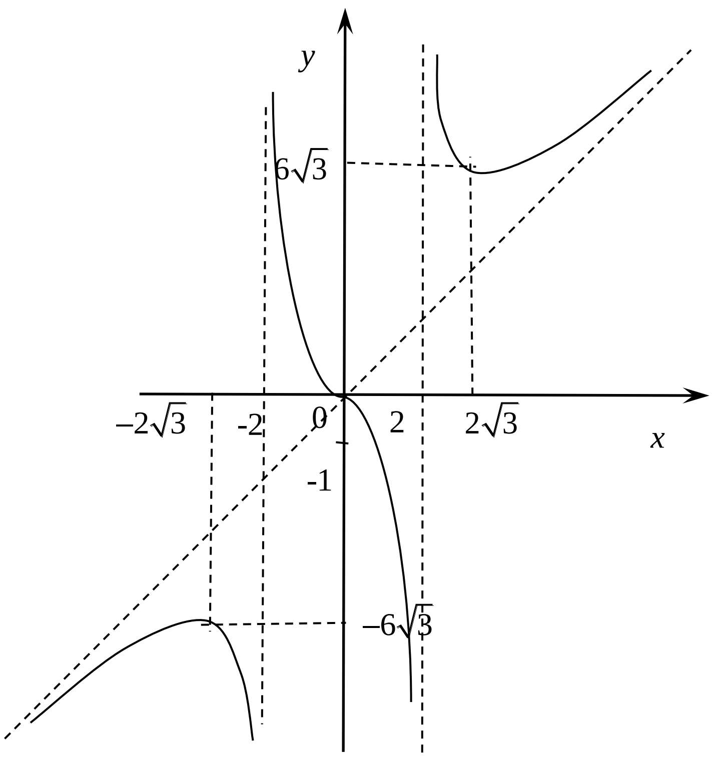
$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{\left(x^2-4\right)x} = 2;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3}{x^2-4}-2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-2x^3+8x}{x^2-4} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{8x}{x^2-4} = 0.$$

При $x\to-\infty$ k и b принимают те же значения, следовательно, график функции имеет наклонную асимптоту $y = 2x$.

6) График имеет одну точку пересечения с осями координат. Используя результаты исследования, строим график



8. Пользуясь правилом Лопиталя, вычислить пределы:

8.1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{e^{\frac{3}{x}}-1}$;

Это неопределенность типа $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Используя правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{e^{\frac{3}{x}}-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-2}{1+x^2}}{e^{\frac{3}{x}}\left(-\frac{3}{x^2}\right)}=\frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{\frac{3}{x}}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=\frac{2}{3}.$$

8.2. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln\left(e^x-1\right)}}$;

Это неопределенность типа $\left(0^0\right)$. Логарифмируя предварительно $y=x^{\frac{1}{(e^x-1)}}$, получаем равенство:

$$\ln y=\frac{1}{\ln\left(e^x-1\right)}\cdot\ln x \qquad \text{(неопределенность типа } \frac{\infty}{\infty}\text{)}.$$

Находим предел $\ln y$, после чего находим и предел y:

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln\left(e^x-1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{e^x}{e^x-1}}=\frac{e^x-1}{x\cdot e^x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1,$$

следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\ln y=1 \quad\Rightarrow \ln\lim_{x\to 0}y=1 \quad\Rightarrow \lim_{x\to 0}y=\lim_{x\to 0}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}=e^1=e.$$

Задачи для самостоятельного решения.

I. Пользуясь правилом Лопиталя, вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$ Ответ:2.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln 2x)^{\frac{1}{\ln x}}$ Ответ:1.

II. Определить наибольшее и наименьшее значение функции:

$y=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2$ на отрезке[-2,4].

Ответ: $y(3) = -9,25$-наименьшее значение функции, $y(-2) = \dfrac{16}{3}$ наибольшее значение функции.

III. Исследовать функции и построить их графики:

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 4}$$

IV. Вычислить приближенно значение следующих чисел:

1. $\operatorname{ctg} 46^0$ (с помощью дифференциала) Ответ: 0,98

V. Найти $\dfrac{dy}{dx}$:

1. $$y = \frac{1}{2}\ln \operatorname{tg} x + \ln\cos x + \left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)^3$$

Ответ: $$y' = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} - \operatorname{tg} x + 3\left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - x^2\right)\left(1 - x\right)}}$$

2. $$y = \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Ответ: $$y' = \frac{2\sqrt{1 - x^2} + 2x \cdot \arcsin x}{\sqrt{\left(1 - x^2\right)^3}}$$

3. $$y = \sin\sqrt{x} \cdot \ln\frac{1}{x} + e^{\cos^2 x} + \frac{4\ln x}{1 - \ln x}$$

Ответ: $$y' = \frac{\cos\sqrt{x} \cdot \ln x}{2\sqrt{x}} - \frac{\sin\sqrt{x}}{x} - e^{\cos^2 x}\cos 2x + \frac{4}{x\left(1 - \ln x\right)}$$

4. $y = x^{\ln^3 x}$

Ответ: $y' = x^{\ln^3 x} \cdot \dfrac{4\ln^3 x}{x}$

5. $y = xe^{-xy}$

Ответ: $y' = \dfrac{e^{-xy}(1-xy)}{1+xe^{-xy}}$

IX. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

1. $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$

Ответ: $y'' = \dfrac{-2\sqrt{1-x}-3x+9}{4}$

2. $\begin{cases} x = \operatorname{ctg} 2t \\ y = \sin^2 2t \end{cases}$

Ответ: $y'' = 0$

3. $\begin{cases} y = \cos^3 t \\ x = t + \dfrac{1}{2} \cdot \sin t \end{cases}$

Ответ: $y'' = \dfrac{2\cos 2t}{\cos t}$

VI. Показать, что функция $y = \dfrac{1+x}{1-x}$ удовлетворяет данному уравнению $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$.

ГЛОССАРИЙ

№ п/п	Новые понятия	Содержание
1	2	3
1	***Производная функции в точке*** x_0	предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при стремлении Δx к нулю: $y' = f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
2	***Функция имеет бесконечную производную.***	если для некоторого значения x выполняется одно из условий $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$ или $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$,
3	***Производной 2-го порядка от функции*** $y = f(x)$	называется производная от ее первой производной. Обозначают y'', $f''(x) = \left(f'(x)\right)'$, y''_{x^2}.
4	***Дифференциал функции*** $y = f(x)$ ***в точке*** x_0	произведение производной функции $f'(x_0)$ на приращение аргумента Δx, т.е. $dy = f'(x_0) \cdot \Delta x$, если x – независимая переменная, то $dy = f'(x_0) \cdot dx$.
5	***Геометрический смысл дифференциала заключается в следующем***	дифференциал функции $y = f(x)$ **в точке** x_0 равен приращению ординаты касательной при $x \to x_0$.
6	***Точка максимума (минимума) функции*** $y = f(x)$	точка x_0, для которой существует такая окрестность точки x_0, что для всех точек $x \neq x_0$, принадлежащих этой окрестности, выполняется неравенство $f(x_0) > f(x) \left(f(x_0) < f(x)\right)$.
7	***Асимптота к графику функции*** $y = f(x)$	прямая, к которой приближается точка $M(x, y)$, лежащая на графике, при неограниченном удалении ее от начала координат; асимптоты бывают наклонные $y = kx + b$ или вертикальные $x = a$, или горизонтальные $y = b$.

1	2	3
8	***Производной n-го порядка от функции*** $y=f(x)$	называется производная от ее производной (n-1)-го порядка. Приняты следующие обозначения: $$y^{(III)}, y^{(IY)}, \ldots, y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)', \ \frac{d^n y}{dx^n}.$$
9	***Свойство инвариантности*** **(*неизменности*)** ***дифференциала первого порядка*** **)**	Дифференциал функции равен произведению производной на дифференциал аргумента, независимо от того, является ли этот аргумент *независимой переменной* или *функцией* другой независимой переменной. $$dy=y'\cdot dx.$$
10	***Точкой локального минимума (максимума) функции*** $y=f(x)$	является точка x_0, если $\forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ выполняется неравенство $$f(x)\ge f(x_0), \ (f(x)\le f(x_0)).$$
11	***Точкой перегиба.***	называется точка, в которой функция меняет направление выпуклости
12	***Формула Тейлора***	позволяет приближать некоторую функцию $y=y(x)$, дифференцируемую n раз, к многочленам n-ой степени: $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$, где $$P_n(x)=y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{y^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n$$
13	***Остаточным членом, записанным в форме Пеано***	называется остаточный член $$R_n(x)=0\left((x-x_0)^n\right)$$
14	***Остаточным членом, записанным в форме Лагранжа***	называется остаточный член $$R_n(x)=\frac{y^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \text{ где } c\in(x_0, x)$$

Задачи профессионально ориентированного характера.

I. Сосуд с вертикальными стенками высотой H, наполненный невязкой жидкостью, стоит на горизонтальной плоскости. Определить местоположение отверстия, при котором дальность струи будет наибольшей, если скорость вытекающей жидкости по закону Торричелли равна $\sqrt{2gx}$, где x – расстояние от отверстия до поверхности жидкости; g – ускорение свободного падения.

Ответ: $H/2$.

II. Требуется изготовить открытый цилиндрический бак вместимостью V. Стоимость 1 м^2 материала, из которого изготавливается дно бака, составляет P_1 руб., а стоимость 1 м^2 материала, идущего на стенки бака, – P_2 руб. При каком отношении радиуса дна к высоте бака затраты на материал будут минимальны?

Ответ: P_2/P_1.

III. Лампа висит над центром круглого стола радиусом r. При какой высоте лампы над столом освещенность предмета, лежащего на его крае, будет наилучшей? (Освещенность прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей света и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света.)

Ответ: $r/\sqrt{2}$.

IV. По оси Ox движутся две материальные точки, законы движения которых $x = 3t^2 - 8$ и $x = 2t^2 + 5t + 6$. С какой скоростью удаляются эти точки друг от друга в момент встречи?

Ответ: 42 м/с, 33 м/с.

V. Полоса жести шириной a, имеющая прямоугольную форму, должна быть согнута в виде открытого кругового цилиндрического желоба так, чтобы его сечение имело форму сегмента. Каким должен быть центральный угол φ, опирающийся на дугу этого сегмента, чтобы вместимость желоба была наибольшей?

ПРИЛОЖЕНИЕ

Решение задач по теме «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ» с помощью математических пакетов Maple и Mathcad

Предлагаемые программы помогут Вам при проверке домашнего задания или, при необходимости, предоставят возможность быстрого вычисления производной любого порядка и сложности, исследования функций и постороения графиков и др.

Рассмотрим вычисление производной, исследование функций с построением графика с помощью математического пакета **Maple**. Maple имеет следующий оператор для вычисления производной: Diff (функция, *x*) – выводит ответ. Нужно помнить, что в выбранной программе очень важное место занимают операторы «:» – присвоить, «;» – окончание предложения.

> **Вычисление производной**

> $Diff(\sin(x^3), x) = diff(\sin(x^3), x);$

$$\frac{d}{dx}\sin(x^2) = 2\cos(x^2)\,x$$

> $Diff(\cos(2\cdot x)^2, x\$4) = diff(\cos(2\cdot x)^2, x\$4);$ **# после значка $ указывается порядок производной**

$$\frac{d^4}{dx^4}\left(\cos(2x)^2\right) = -128\sin(2x)^2 + 128\cos(2x)^2$$

> $simplify(\%);$ ***# упрощение выражения***

$$\frac{d^4}{dx^4}\left(\cos(2x)^2\right) = 256\cos(2x)^2 - 128$$

> $combine(\%);$ **# или так можно упростить выражение**

$$\frac{d^4}{dx^4}\left(\frac{1}{2}\cos(4x) + \frac{1}{2}\right) = 128\cos(4x)$$

> $D(\sin)(\pi): eval(\%);$ **# Вычисление призводной в точке, f(x) = sinx при x = π**

$$-1$$

Исследование графика функций

```
> y := x^3/(x-4);# проведём исследования данного графика функций
```

$$y := \frac{x^3}{x-4}$$

```
> readlib(iscont): readlib(discont): readlib(singular):
> iscont(y, x=-infinity..infinity);# проверяем функцию на непрерывность
```

$$false$$

```
> наша функция не является непрерывной, а следовательно, найдём точки разрыва
> discont(y, x);
```

$$\{4\}$$

```
> xr := convert(%, `+`);
```

$$xr := 4$$

```
> Существует вертикальная асимптота x = 4, найдём коэффициенты наклонной асимптоты
> k1 := limit(y/x, x=+infinity);
```

$$k1 := \infty$$

```
> b1 := limit(y-k1*x, x=+infinity);
```

$$b1 := \infty$$

```
> k2 := limit(y/x, x=-infinity);
```

$$k2 := -\infty$$

```
> b2 := limit(y-k2*x, x=-infinity);
```

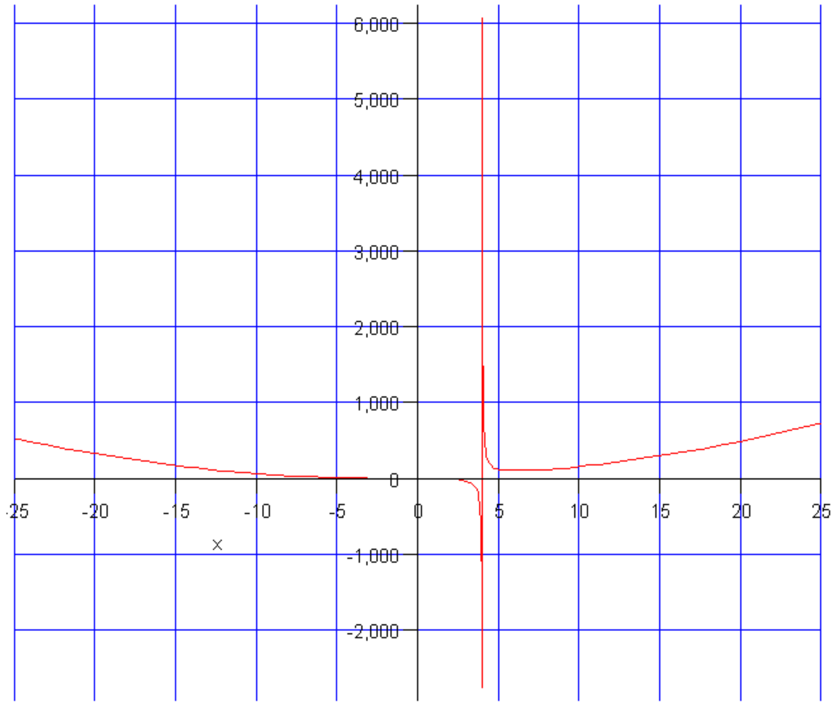
$$b2 := \infty$$

```
> Наклонной ассимптоты нет
> eadlib(extrema): readlib(maximize): readlib(minimize):
> extrema(y,{}, x,'s'); s; # найдём экстремумы
```

$$\{0, 108\}$$

$$\{\{x = 6\}, \{x = 0\}\}$$

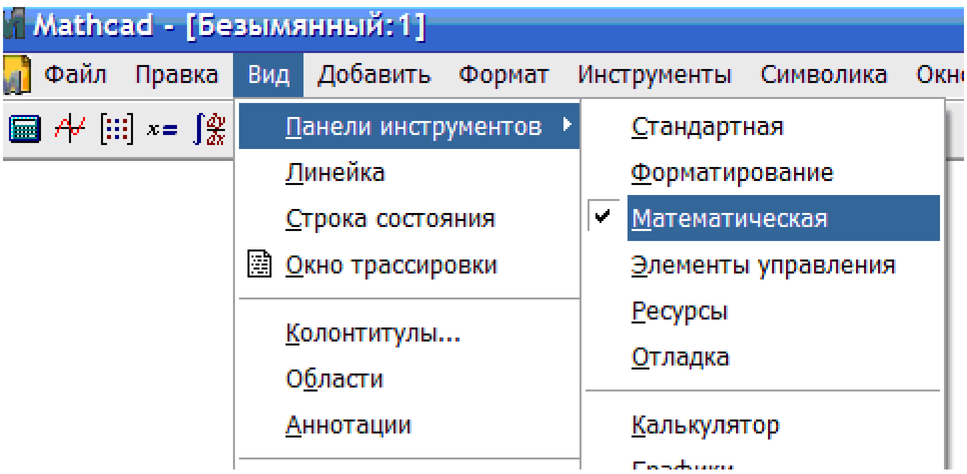
> plot(y, x = −25..25, axis =[gridlines =[10, color = blue]]);# Построим график функций



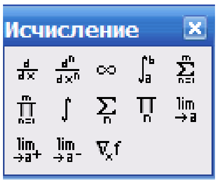
Рассмотрим один из наиболее популярных математических пакетов **MathCAD**.

Чтобы начать работать с приложением, вызовите панель Calculus (вычисления).

Выберите на панели вкладку ВИД → ПАНЕЛИ ИНСТРУМЕНТОВ → МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

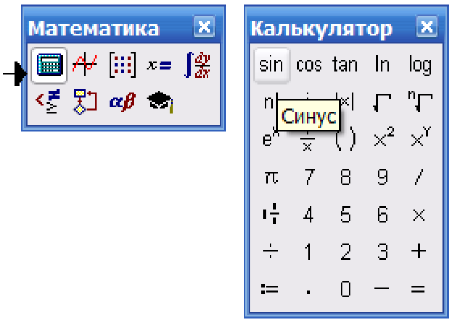


Появится панель 

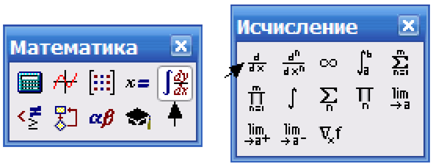
. На данной вкладке необходимо выбрать панель «Исчисление» 

и продолжить работу.

Например, Вы хотите вычислить производную функции $\frac{\sin x}{x}$. Для этого можно сначала задать функцию: ввести $y(x)$:=, выбрать вкладку «калькулятор»

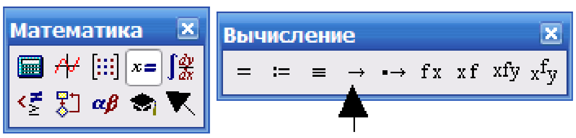


и с ее помощью набрать нужную функцию $y(x) := \frac{\sin(x)}{x}$. После этого используйте вкладки



.

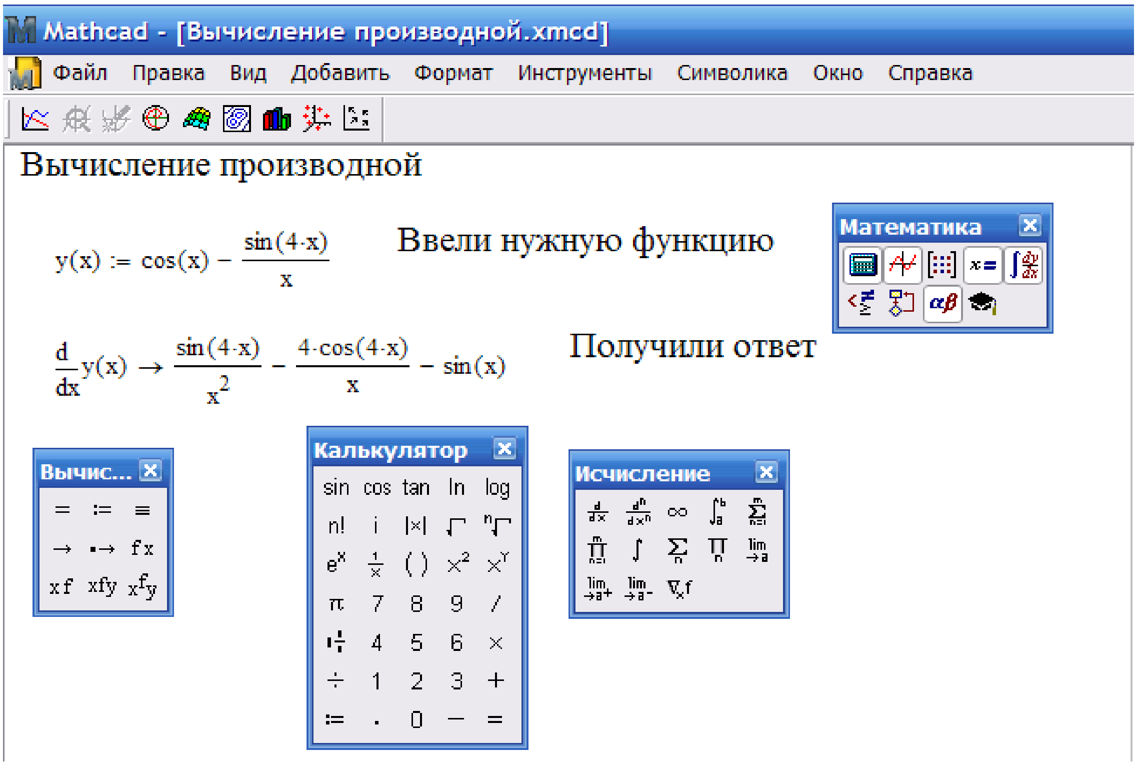
Появляется следующий символ $\frac{d}{d\blacksquare}$. Нижнее поле заполняется x, верхнее – $y(x)$. Получим $\frac{d}{dx}y(x)$. Теперь выбираете вкладку «вычисление», затем стрелочку



,

появляется результат $\frac{d}{dx}y(x) \rightarrow \frac{\cos(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2}$.

Далее разобраны задачи, наиболее часто встречаемые в теме «Дифференциальное исчисление функции одной переменной».


Mathcad - [Вычисление производной.xmcd]
Файл Правка Вид Добавить Формат Инструменты Символика Окно Справка
Вычисление производной
y(x) := cos(x) − sin(4·x)/x
Ввели нужную функцию
d/dx y(x) → sin(4·x)/x^2 − 4·cos(4·x)/x − sin(x)
Получили ответ
Математика
Вычис...
Калькулятор
Исчисление

Исследовать график функций

$$f(x) := \frac{x^2 + 6\cdot x + 9}{x + 4}$$

Найдём точки пересечения с координатными осями

$$f(0) = 2.25$$

$$\frac{x^2 + 6\cdot x + 9}{x + 4} \qquad \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Найдём асимптоты

$x + 4$ $\qquad -4 \qquad$ Исследуем точку x=-4

$$\lim_{x \to -4^+} f(x) \to \infty \qquad \lim_{x \to -4^-} f(x) \to -\infty$$

$$k := \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \to 1 \qquad k = 1$$

$$b := \lim_{x \to \infty} (f(x) - x) \to 2 \qquad b = 2$$

$y(x) := x + 2$ $\qquad$ наклонная асимптота

Вычислим первую производную

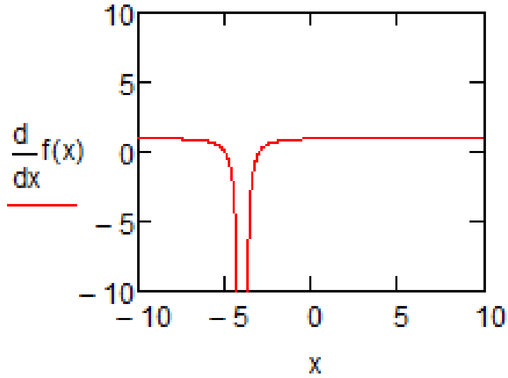
$$\frac{d}{dx}f(x) \rightarrow \frac{2\cdot x+6}{x+4} - \frac{x^2+6\cdot x+9}{(x+4)^2} = 0$$

$$\frac{2\cdot x+6}{x+4} - \frac{x^2+6\cdot x+9}{(x+4)^2}$$ преобразуем первую производную, вычислим ее значение при y=0

$$1 - \frac{1}{(x+4)^2} \qquad \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$f(-5) = -4$ $\qquad f(-3) = 0$ значение функции в точках экстремума

Строим график производной



(–5 , 4) – максимум

(–3 , 0) – минимум

Найдём вторую производную

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) \rightarrow \frac{2\cdot\left(x^2+6\cdot x+9\right)}{(x+4)^3} - \frac{2\cdot(2\cdot x+6)}{(x+4)^2} + \frac{2}{x+4}$$

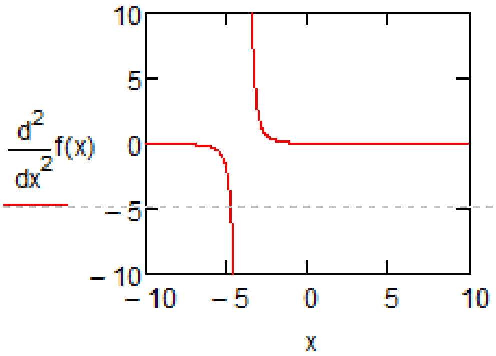
$$\frac{2\cdot\left(x^2+6\cdot x+9\right)}{(x+4)^3} - \frac{2\cdot(2\cdot x+6)}{(x+4)^2} + \frac{2}{x+4}$$

преобразуем вторую производную, вычислим ее значение при y=0

$$\frac{2}{(x+4)^3}$$

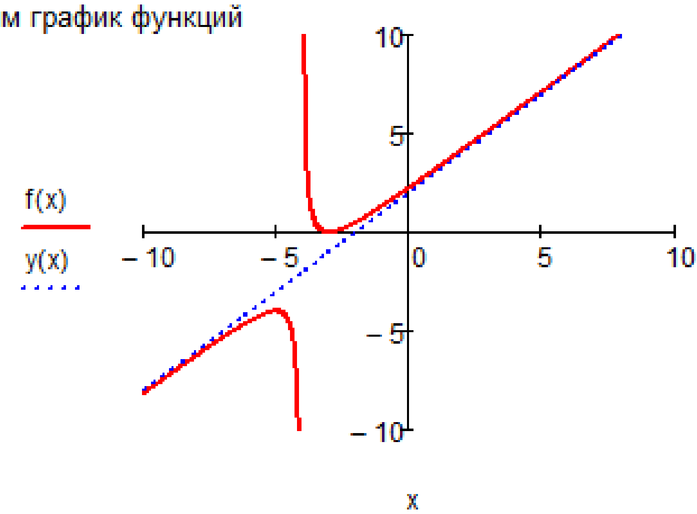
решений нет

Строим график второй производной



выпуклости и вогнутости видны из графика

Строим график функций



Записать уравнение касательной и нормали к графику функций y=x^3 в точке x=2

$$y(x) := x^3$$

Вычислим угловой коэффициент k=y'(2)

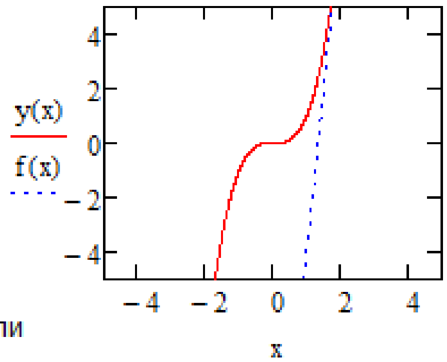
$$\frac{d}{dx}y(x) \rightarrow 3 \cdot x^2$$

$$k := 3 \cdot 2^2 = 12$$

Запишем уравнение касательной

$$f(x) := k \cdot (x - 2) + y(2)$$

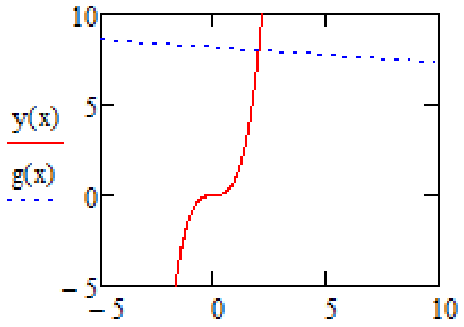
Строим график функций



Запишем уравнение нормали

$$n := \frac{-1}{k} \qquad n = -0.083$$

$$g(x) := n \cdot (x - 2) + y(2)$$



Приведем примеры решения творческих заданий междисциплинарного содержания в Mathcad.

5. Установить, при каком процентном содержании кислорода в газовой смеси скорость окисления оксида азота будет максимальной.

$2NO+O_2 =2NO_2$

$v=k*[NO]^2*[O_2]$

v-скорость реакции
x-концентрация NO
y-концентрация O_2
100-Вся газовая смесь
k-константа скорости реакции,не зависящяя от концентрации,а зависищая только от температуры.

$y=100-x$ $v=k*x^2(100-x)=k(100x^2-x^3)$ $v := k\cdot(100x^2 - x^3)$

Найдем 1-ую производную этой функции:

$$\frac{d}{dx}v \rightarrow k\cdot(200\cdot x - 3\cdot x^2)$$

Given

$$k\cdot(200\cdot x - 3\cdot x^2) = 0$$

$$\text{Find}(x) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \frac{200}{3} \end{pmatrix}$$

k-не может быть равно 0,значит x=66,7%

Что бы узнать какое из полученных значений x соответствует максимальной скорости окисления, найдем вторую производную функции

$$\frac{d^2}{dx^2}v \rightarrow -k\cdot(6\cdot x - 200)$$

Подставим значение x=0 во вторую производную найдем v=-k(6*0-200)=-k*(-200)=200k,>0,т.е скорость окисления минимальна при покцентрации окиси азота равной 0.

Подставим значение x=66.7% во вторую производную,найдем v=-k(6*66.7-200)=-k*400.2+200k=-200.2k,<0,значит функция имеет максимально значение при 66,7% содержании окиси азота в смеси,т е 33,3% содержание O_2 в смеси.

6. Пусть в газовой смеси, помимо оксида азота и кислорода содержатся и другие компоненты, не принимающие участия в химической реакции (инертные вещества). Определить, при каком стехиометрическом отношении *y:x* скорость окисления по формуле: $2NO+O_2=2NO_2$, будет максимальной.

$2NO+O_2=2NO_2 \quad v=k*[NO]^2*[O_2]$

v-скорость реакции
x-концентрация NO
y-концентрация O_2
100-Вся газовая смесь
k-константа скорости реакции,не зависящяя от концентрации,а зависищая только от температуры.
z-концентрация инертных компанентов.

$x+y+z=100 \qquad y=100-z-x$

$v=kx^2(100-z-x)=k((100-z)x^2-x^3)$

$$v := k\cdot\left[(100-z)x^2-x^3\right]$$

$$\frac{d}{dx}v \rightarrow -k\cdot\left[2\cdot x\cdot(z-100)+3\cdot x^2\right]$$

Given

$$-k\cdot\left[2\cdot x\cdot(z-100)+3\cdot x^2\right] = 0$$

$$\mathrm{Find}(x) \rightarrow \left(0 \quad \frac{200}{3} - \frac{2\cdot z}{3} \right)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}v \rightarrow -k\cdot(6\cdot x + 2\cdot z - 200)$$

Максимум скорость окисления будет при $x = \frac{200}{3} - \frac{2\cdot z}{3}$

т к y=100-z-x тогда

$$x = \frac{200}{3} - \frac{2\cdot z}{3}$$

$$y := (100 - z) - \frac{2}{3}\cdot(100 - z)$$

$y \text{ simplify } \rightarrow \frac{100}{3} - \frac{z}{3}$ либо y=1/3*(100-z)

$$L := \frac{y}{x}$$

$$L(z) := \frac{\frac{100-z}{3}}{\frac{2(100-z)}{3}}$$

$$L(z) \text{ simplify } \rightarrow \frac{1}{2}$$

1. Пусть газ состоящий из оксида азота и инертного газа, смешивают с воздухом, концентрация кислорода в котором составляет 20,8 %. Определить, какой объем воздуха необходимо добавить к объему оксида азота, чтобы обеспечить максимальную скорость окисления последнего. (Выполнить решение задачи в Mathcad)

Решение:
Рассмотрим смесь монооксида азота и инертного газа объемом 1 л. Пусть объем монооксида азота - x л.
Пусть добаили z л воздуха. Учитывая, что объемная доля кислорода в воздухе 0,208 (т.е. объем O_2 равен 0,208z л), найдем концентрации монооксида азота и кислорода после смешения:

$$[NO] = \frac{x}{1+z}, \quad [O_2] = \frac{0{,}208z}{1+z}.$$

$$v = k^*[NO]^*[O_2]$$

Для упрощения расчетов примем, что k = x = 1, тогда:

$$k := 1$$

$$x := 1$$

$$v(z) := k\cdot\left(\frac{x}{1+z}\right)^2\cdot\frac{0.208z}{1+z} \text{ simplify } \rightarrow \frac{0.208\cdot z}{(z+1.0)^3}$$

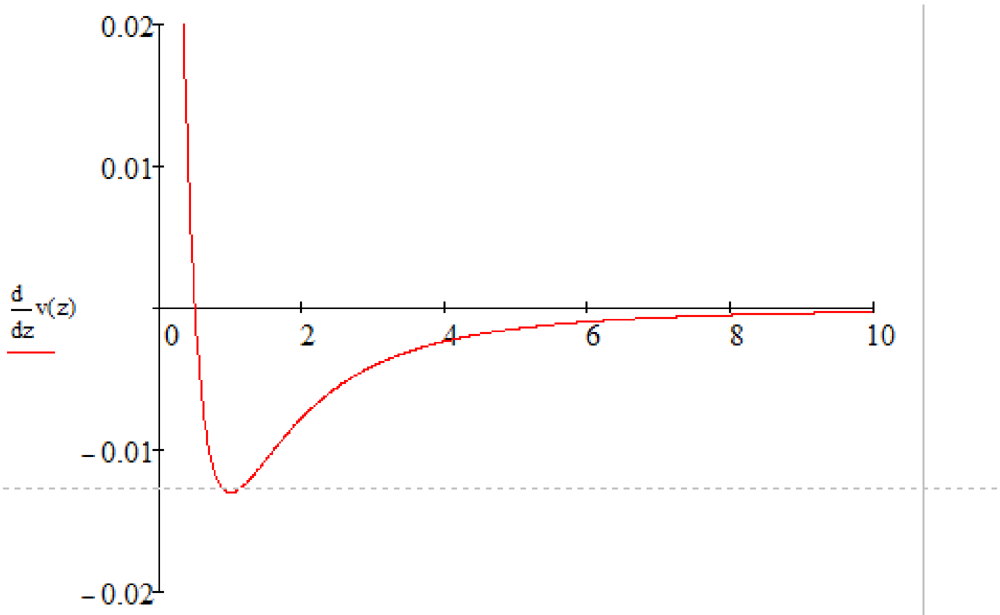
Найдем первую производную полученного выражения для нахождения скорости реакции:

$$\frac{d}{dz}v(z) \rightarrow \frac{0.208}{(z+1.0)^3} - \frac{0.624\cdot z}{(z+1.0)^4}$$

Найдем при каком z значение первой производной равно 0:

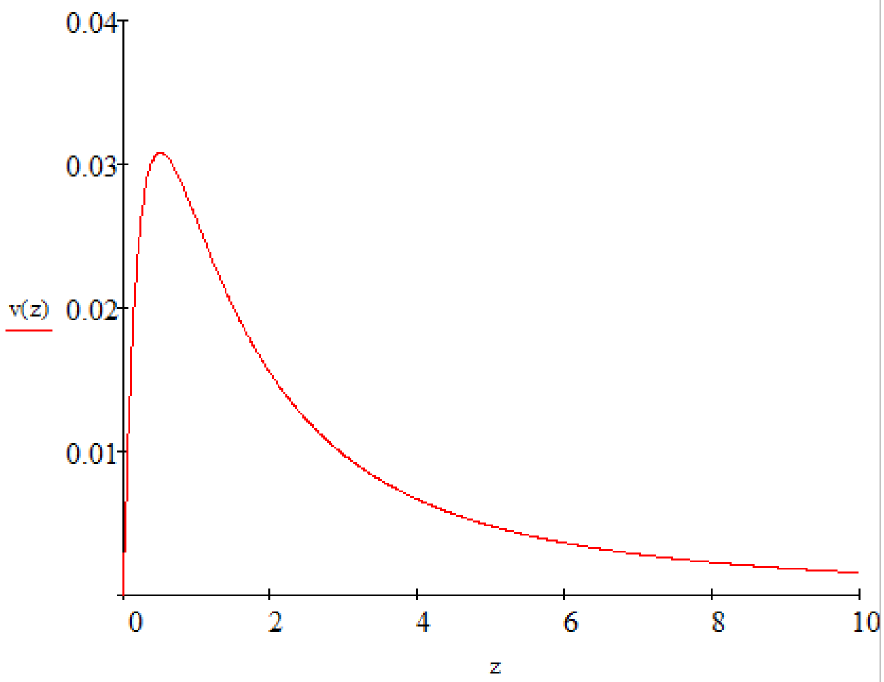
$$\frac{0.208}{(z+1.0)^3} - \frac{0.624\cdot z}{(z+1.0)^4} \text{ solve}, z \rightarrow 0.5$$

Построим график первой производной для определения какой точкой экстремума является найденная точка z = 0.5:



Как видно из графика, при переходе через точку z = 0.5, первая производная меняет свой знак с "+" на "-", значит z = 0.5 - точка максимума

Таким образом, при добавлении 0,5 л воздуха к одному объему смеси монооксида азота и инертного газа наблюдается максимальная скорость окисления NO. Приведем график зависимости скорости окисления от объема добавленного воздуха:



В точке z = 0.5 наблюдается максимум скорости окисления.

Ответ: z = 0,5.