Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет»

А. П. Мателенок

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Электронный учебно-методический комплекс

В четырех частях

Часть 1

Элементы линейной алгебры.
Введение в математический анализ.
Дифференциальное исчисление функции одной переменной.
Элементы векторной алгебры

Текстовое электронное издание

Новополоцк
Полоцкий государственный университет
2019

Об издании – 1, 2

1 – дополнительный титульный экран – сведения об издании

УДК 51(075.8)
ББК 22.11я73
М34

Одобрено и рекомендовано к изданию методической комиссией механико-технологического факультета (протокол № 5 от 16.05.2019)

Кафедра высшей математики

РЕЦЕНЗЕНТЫ:
канд. пед. наук, доц., зав. кафедрой медицинской и биологической физики Витебского государственного ордена Дружбы народов медицинского университета
И. А. ГОЛЕНОВА;
канд. физ.-мат. наук, доц., зав. кафедрой высшей математики Полоцкого государственного университета
А. А. КОЗЛОВ

Мателенок, А. П.

М34 Высшая математика [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс : в 4 ч. / А. П. Мателенок. – Новополоцк : Полоц. гос. ун-т, 2019. – Ч. 1 : Элементы линейной алгебры. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной. Элементы векторной алгебры. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).

ISBN 978-985-531-674-0.

Электронный учебно-методический комплекс включен в Государственный регистр информационного ресурса. Регистрационное свидетельство № 3271918537 от 06.06.2019 г.

Содержит краткие теоретические сведения, примеры практических занятий с набором задач, специальные дидактические средства: графические схемы, информационные таблицы, глоссарии, алгоритмические предписания, обучающие задачи, решение нулевых вариантов контрольных работ, фонд профессионально ориентированных задач.

Предназначен для студентов специальности 1-48 01 03 «Химическая технология природных энергоносителей и углеродных материалов». Может быть полезен для студентов технических специальностей, а также преподавателей вузов, колледжей и техникумов.

УДК 51(075.8)
ББК 22.11я73

№ госрегистрации 3271918537
ISBN 978-985-531-674-0
ISBN 978-985-531-673-3 (общ.)

2 – дополнительный титульный экран – производственно-технические сведения

Для создания текстового электронного издания «Высшая математика» часть 1 «Элементы линейной алгебры. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной. Элементы векторной алгебры» использованы текстовый процессор Microsoft Word и программа Adobe Acrobat XI Pro для создания и просмотра электронных публикаций в формате PDF.

Редактор *Т. А. Дарьянова*
Компьютерный дизайн *М. С. Мухоморовой*

Подписано к использованию 20.12.2019.
Объем издания 8,6 Мб. Тираж 3 экз. Заказ 1060.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования «Полоцкий государственный университет».

Свидетельство о государственной регистрации
издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/305 от 22.04.2014.

ЛП № 02330/278 от 08.05.2014.

211440, ул. Блохина, 29,
г. Новополоцк,
Тел. 8 (0214) 59-95-41, 59-95-44
http://www.psu.by

СОДЕРЖАНИЕ

ПОСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебная программа курса «Высшая математика» предназначена для студентов специальности 1-48 01 03 «Химическая технология природных энергоносителей и углеродных материалов». Для изучения дисциплины в первом семестре в соответствии с учебным планом предусмотрено 180 ч: лекции – 36 ч, практические занятия – 36 ч, самостоятельная работа – 108 ч.

Дисциплина «Высшая математика» состоит из семи модулей:

1. Элементы линейной алгебры.
2. Введение в математический анализ.
3. Дифференциальное исчисление функции одной переменной.
4. Элементы векторной алгебры.
5. Элементы аналитической геометрии.
6. Неопределенный интеграл.
7. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных.

Высшая математика как дисциплина способствует формированию абстрактного, логического, алгоритмического мышления человека. В условиях высшего образования математические знания студентов служат средством обретения личностных смыслов, способом успешного освоения определенной деятельности, в частности профессиональной. Целью совершенствования математического образования (в соответствии с ведущим компетентностным подходом) является развитие таких профессионально важных качеств будущих инженеров, как способность к обучению и профессиональной деятельности, стремление к саморазвитию, творчеству и др.

Целями изучения высшей математики являются: обучение студентов знаниям по математике и информационной деятельности; организация и управление самостоятельной познавательной деятельностью; формирование познавательной самостоятельности и академических, социально-личностных, профессиональных компетенций.

Задачами изучения математики являются:

– овладение основами фундаментальных теоретических знаний по математике; формирование умений применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и прикладных задач;

– обучение математической деятельности;

– развитие интеллектуального потенциала студентов и способностей их к логическому и алгоритмическому мышлению;

– обучение основным математическим методам научного познания;

– обучение методам обработки и анализа результатов.

В результате изучения курса высшей математики студент должен

знать:

– место математики в системе естественных наук, общность ее понятий и представлений;

– основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории поля, векторной алгебры, теории дифференциальных уравнений;

– основные понятия и методы теории вероятностей;

уметь:

– выполнять действия над матрицами и векторами, вычислять пределы функций;

– применять методы дифференциального исчисления для исследования функций;

– составлять и использовать математические модели для анализа и решения производственных задач предприятий и учреждений химико-технологического комплекса;

– проводить первичную математическую обработку результатов эксперимента, анализировать полученные результаты;

владеть:

– основными методами линейной алгебры и аналитической геометрии;

– методами исследования функций и построения их графиков;

– методами интегрирования функций;

– методами решения дифференциальных уравнений первого порядка и линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Подготовка специалиста при обучении математике должна обеспечивать формирование следующих групп компетенций:

1) *академических компетенций:*

– АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач.

– АК-2. Владеть системным и сравнительным анализом.

– АК-4. Уметь работать самостоятельно.

– АК-5. Быть способным порождать новые идеи (обладать креативностью).

– АК-6. Владеть междисциплинарным подходом при решении проблем.

– АК-7. Иметь навыки, связанные с использованием технических устройств, управлением информацией и работой с компьютером.

– АК-8. Обладать навыками устной и письменной коммуникации.

– АК-10. Уметь учиться, повышать свою квалификацию в течение всей жизни.

– АК-11. Обладать культурой мышления, способностью к обобщению, постановке цели и выбору путей ее достижения.

2) *социально-личностных компетенций:*

– СЛК-2. Быть способным к социальному взаимодействию.

– СЛК-3. Обладать способностью к межличностным коммуникациям.

– СЛК-6. Уметь работать в коллективе.

3) *профессиональных компетенций:*

– ПК-1. Использовать современные информационные и компьютерные технологии при разработке химико-технологических процессов.

– ПК-6. Владеть методами моделирования и оптимизации химико-технологических процессов.

– ПК-16. Работать с научной, нормативно-справочной и специальной литературой, выбирать оптимальные варианты проведения научно-исследовательских работ.

– ПК-17. Проводить обработку, анализ и интерпретацию полученных результатов научных исследований для публикаций, презентаций, докладов, отчетов.

– ПК-32. Разрабатывать новые и оптимизировать существующие технологические процессы переработки природных энергоносителей на основе математического моделирования.

Для проверки степени усвоения учебного материала предусматривается текущий и итоговый контроль. Текущий контроль включает проверку усвоения студентами материала в процессе проведения практических занятий, а также выполнение практических заданий в рамках внеаудиторных контрольных работ. Итоговый контроль осуществляется на экзамене, проводимом в конце первого семестра.

Форма итогового контроля знаний – экзамен. Итоговая экзаменационная отметка (*ИЭ*) учитывает отметку по результатам промежуточного контроля (*П*) и экзаменационную отметку (*Э*).

Отметка промежуточного контроля за 1 семестр определяется как среднеарифметическая величина по результатам мероприятий промежуточного контроля по формуле

$$П = \frac{П_1 + П_2 + П_3 + П_4}{4}.$$

Итоговая отметка по дисциплине определяется по формуле

$$И_Э = 0{,}5П + 0{,}5Э.$$

Таблица 1. – Составляющие отметки промежуточного контроля по дисциплине (1 семестр)

Промежуточные контрольные мероприятия	Контрольная работа № 1 ($П_1$)	Контрольная работа № 2 ($П_2$)	Контрольная работа № 3 ($П_3$)	Контрольная работа № 4 ($П_4$)
Содержание контрольного мероприятия – название раздела (модуля)	Раздел 1. Элементы линейной алгебры	Раздел 2. Введение в математический анализ	Раздел 4. Векторная алгебра	Раздел 6. Неопределенный интеграл
Задания	Контрольное задание состоит из 5 задач	Контрольное задание из трех вопросов	Контрольное задание состоит из 5 задач	Контрольное задание состоит из 10 задач
Отметка контрольных мероприятий ($П_1$, $П_2$, $П_3$)	Каждый пункт оценивается в 2 балла	Каждый вопрос оценивается в 3,3 балла	1 задание – 2 балла; 2 задание – 2 балла; 3 задание – 1 балл; 4 задание – 2 балла; 5 задание – 3 балла	Каждый пункт оценивается в 1 балл

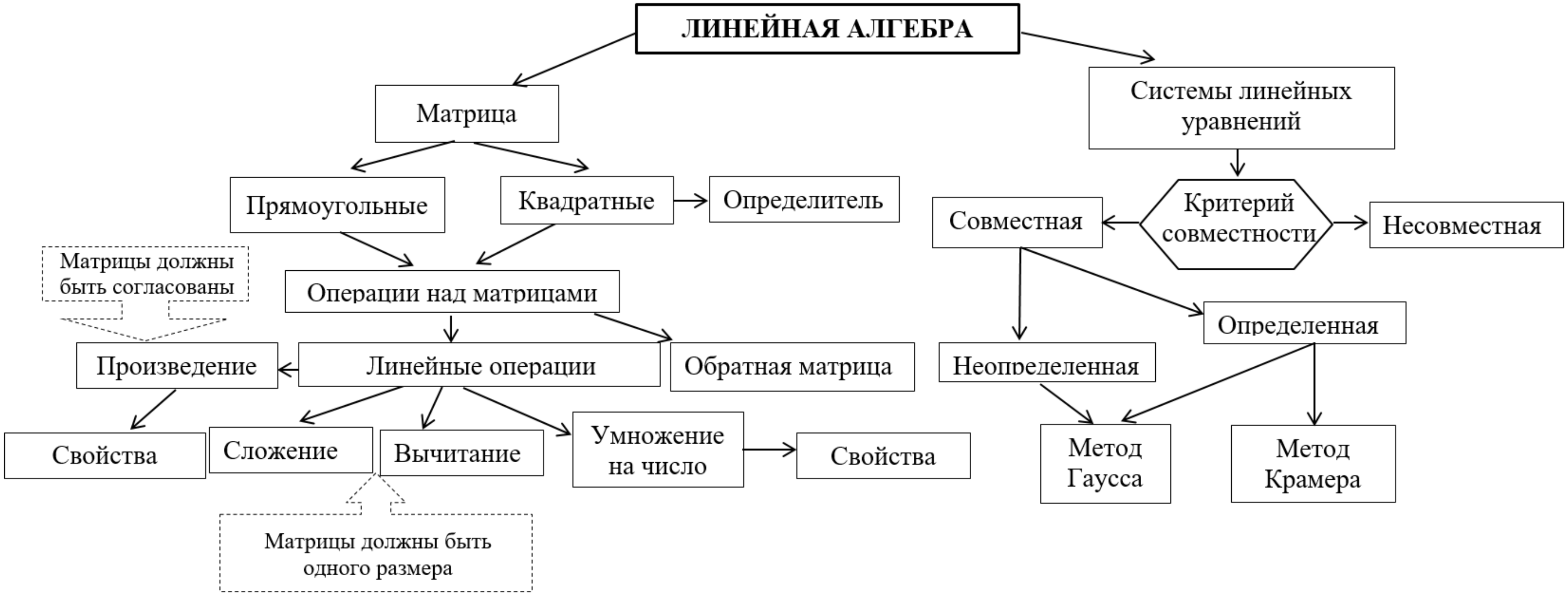
Таблица 2. – Составляющие итоговой отметки по дисциплине и их весовые коэффициенты

Составляющие итоговой оценки	k	$П$	$(1 – k)$	$Э$
	0,5	Таблица 2	0,5	*

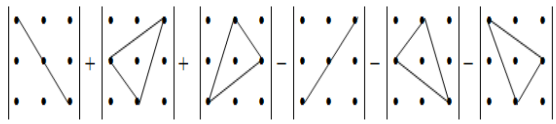
*Отметка, полученная студентом на экзамене за письменный/устный ответ по билету. Билет включает 1 теоретический вопрос и 2 практических задания.

Модуль 1
ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Графическая схема



Информационная таблица

Матрицей порядка $m \times n$ называется *прямоугольная таблица*, состоящая из элементов произвольной природы и содержащая m строк и n столбцов	Каждой *квадратной* числовой матрице *A* порядка n можно поставить в соответствие определенное *число*, которое называется определителем матрицы *A*
Рангом матрицы называется наивысший порядок отличного от нуля минора матрицы	1.  2. $\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$
Действия над матрицами	**Решение СЛАУ**
Суммой (разностью) матриц является матрица, элементами которой являются соответственно сумма (разность) элементов исходных матриц: $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$	Рассмотрим систему, содержащую m уравнений с n неизвестными: $x_1, x_2, ..., x_n$: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$ (1)
Операция *умножения (деления)* матрицы любого размера на произвольное число сводится к умножению (делению) каждого элемента матрицы на это число	*Решением* системы (1) называется совокупность n чисел: $x_1 = \overline{x}_1,\ x_2 = \overline{x}_2,\ ...,\ x_n = \overline{x}_n$, которые обращают каждое из уравнений этой системы в тождества
Произведением матриц называется матрица, элементы которой могут быть вычислены по следующим формулам: $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$	*Теорема Крамера*. Если основной определитель $\Delta \neq 0$, то данная система имеет единственное решение, которое находится по формулам $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta},\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$
Матрица A^{-1} называется *обратной матрицей A*, если выполняется условие $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где *E* – единичная матрица того же порядка, что и матрица *A*. Квадратная матрица *A* называется *невырожденной*, если ее определитель $\det A \neq 0$. В противном случае матрица *A* называется *вырожденной.* Квадратная невырожденная матрица имеет обратную матрицу A^{-1}, причем $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{n2} \\ \multicolumn{4}{c}{..............................} \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn} \end{pmatrix}$	**Элементарные преобразования** а) перестановка местами каких-либо строк матрицы; б) умножение или деление (сокращение) какой-либо строки матрицы на число, отличное от нуля; в) умножение какой-либо строки матрицы на число k и прибавление к другой строке **Метод Гаусса** 1. Привести к ступенчатому виду матрицу $\overline{A}$. 2. Вычислить и сравнить $r(A),\ r(\overline{A})$: – $r(A) \neq r(\overline{A})$ – система несовместна; – $r(A) = r(\overline{A})$ – система совместна, выделим базисные и свободные переменные и найдем решение системы

ЛЕКЦИОННЫЙ КУРС

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Определение. *Матрицей* порядка $m \times n$ называется *прямоугольная таблица*, состоящая из элементов произвольной природы и содержащая m строк и n столбцов Место каждого элемента однозначно определяется номерами строки и столбца, на пересечении которых он находится. Элементы матрицы обозначаются a_{ij}, где i – номер строки, а j – номер столбца.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \triangleright$$

ОСНОВНЫЕ ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ

Матрица может состоять как из одной строки, так и из одного столбца. Вообще говоря, матрица может состоять даже из одного элемента.

Определение. Если число столбцов матрицы равно числу строк ($m = n$), то матрица называется *квадратной*.

Определение. Матрица вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E$$

называется *единичной матрицей*.

Определение. Если $a_{mn} = a_{nm}$, то матрица называется *симметричной.*

Пример. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ – симметричная матрица.

Определение. Квадратная матрица вида $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется *диагональной* матрицей.

Сложение и вычитание матриц сводится к соответствующим операциям над их элементами. Самым главным свойством этих операций является то, что они *определены только для матриц одинакового размера*. Таким образом, возможно определить операции сложения и вычитания матриц.

Определение. *Суммой (разностью)* матриц является матрица, элементами которой являются соответственно сумма (разность) элементов исходных матриц.

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij},$$
$$C = A + B = B + A.$$

Операция *умножения (деления)* матрицы любого размера на произвольное число сводится к умножению (делению) каждого элемента матрицы на это число.

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & ... & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & ... & \alpha a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & ... & \alpha a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\alpha(A + B) = \alpha A \pm \alpha B,$$
$$A(\alpha \pm \beta) = \alpha A \pm \beta A.$$

Свойства линейных операций

1. $Am\times n + Bm\times n = Bm\times n + Am\times n$.
2. $(Am\times n + Bm\times n) + Cm\times n = Am\times n + (Bm\times n + Cm\times n)$.
3. $\alpha(Am\times n + Bm\times n) = \alpha Am\times n + \alpha Bm\times n$.
4. $Am\times n + (-Am\times n) = 0 \quad m\times n$.
5. $Am\times n + 0m\times n = Am\times n$.
6. $0 \cdot Am\times n = 0\ m\times n$.
7. $(\alpha \cdot \beta)A\ m\times n = \alpha\ (\beta Am\times n) = \beta(\alpha Am\times n)$.
8. $\alpha A\ m\times n = Am\times n \cdot \alpha$.
9. $1 \cdot A\ m\times n = Am\times n$.

Пример

Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, найти $2A + B$.

$$2A = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3 \\ 2\cdot 0 & 2\cdot 1 & 2\cdot(-4) \\ 2\cdot 1 & 2\cdot(-2) & 2\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & -8 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix},$$

$$2A + B = \begin{pmatrix} 2+1 & 4+3 & 6+4 \\ 0+5 & 2+7 & -8+8 \\ 2+1 & -4+2 & 6+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 5 & 9 & 0 \\ 3 & -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 5 & 9 & 0 \\ 3 & -2 & 10 \end{pmatrix}$.

ОПЕРАЦИЯ УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ

Определение. *Произведением* матриц называется матрица, элементы которой могут быть вычислены по следующим формулам:

$$A \cdot B = C,$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Из приведенного определения видно, что операция умножения матриц определена только для матриц, *число столбцов первой из которых равно числу строк второй.*

Свойства операции умножения матриц

1. Умножение матриц *не коммутативно*, т.е. $AB \neq BA$, даже если определены оба произведения. Однако, если для каких-либо матриц соотношение $AB = BA$ выполняется, то такие матрицы называются *перестановочными.*

Самым характерным примером может служить единичная матрица, которая является перестановочной с любой другой матрицей того же размера.

Перестановочными могут быть только квадратные матрицы одного и того же порядка.

$$A \cdot E = E \cdot A = A.$$

Очевидно, что для любых матриц выполняются следующее свойство:

$$A \cdot O = O,\ O \cdot A = O,$$

где O – *нулевая* матрица.

2. Операция перемножения матриц *ассоциативна*, т.е. если определены произведения AB и $(AB)C$, то определены BC и $A(BC)$ и выполняется равенство

$$(AB)C = A(BC).$$

3. Операция умножения матриц *дистрибутивна* по отношению к сложению, т.е. если имеют смысл выражения $A(B + C)$ и $(A + B)C$, то соответственно

$$A(B + C) = AB + AC,$$
$$(A + B)C = AC + BC.$$

4. Если произведение AB определено, то для любого числа α верно соотношение

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

5. Если определено произведение AB, то определено произведение $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ и выполняется равенство

$$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}},$$

где индексом Т обозначается *транспонированная* матрица.

6. Заметим также, что для любых квадратных матриц

$$\det (AB) = \det A \cdot \det B.$$

Что такое det, будет рассмотрено ниже.

Пример. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Найти $A \cdot B$ и $B \cdot A$.

Матрицы $A_{1\times5}$ и $B_{5\times1}$ согласованы, следовательно:

$$A_{1\times5}\cdot B_{5\times1}=\begin{pmatrix}4 & 0 & -2 & 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\5\\2\end{pmatrix}=\left(4\cdot3+0\cdot1+(-2)\cdot(-1)+3\cdot5+1\cdot2\right)=(31).$$

Матрицы $B_{5\times1}$ и $A_{1\times5}$ согласованы, следовательно,

$$B_{5\times1}\cdot A_{1\times5}=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\5\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 0 & -2 & 3 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot4 & 3\cdot0 & 3\cdot(-2) & 3\cdot3 & 3\cdot1\\ 1\cdot4 & 1\cdot0 & 1\cdot(-2) & 1\cdot3 & 1\cdot1\\ (-1)\cdot4 & (-1)\cdot0 & (-1)\cdot(-2) & (-1)\cdot3 & (-1)\cdot1\\ 5\cdot4 & 5\cdot0 & 5\cdot(-2) & 5\cdot3 & 5\cdot1\\ 2\cdot4 & 2\cdot0 & 2\cdot(-2) & 2\cdot3 & 2\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 0 & -6 & 9 & 3\\ 4 & 0 & -2 & 3 & 1\\ -4 & 0 & 2 & -3 & -1\\ 20 & 0 & -10 & 15 & 5\\ 8 & 0 & -4 & 6 & 2\end{pmatrix}.$$

Ответ: $(31),\begin{pmatrix}12 & 0 & -6 & 9 & 3\\ 4 & 0 & -2 & 3 & 1\\ -4 & 0 & 2 & -3 & -1\\ 20 & 0 & -10 & 15 & 5\\ 8 & 0 & -4 & 6 & 2\end{pmatrix}.$

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ (ДЕТЕРМИНАНТЫ)

Определение. *Определителем* квадратной матрицы $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$ называется число, которое может быть вычислено по элементам матрицы по формуле

$$\det A=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_{1k}M_{1k}\,, \qquad (1)$$

где M_{1k} – детерминант матрицы (минор), полученной из исходной вычеркиванием первой строки и k-го столбца. Следует обратить внимание на то, что определители имеют только квадратные матрицы, т.е. матрицы, у которых число строк равно числу столбцов.

Формула (1) позволяет вычислить определитель матрицы по первой строке, также справедлива формула вычисления определителя по первому столбцу:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} M_{k1}. \tag{2}$$

Вообще говоря, определитель может вычисляться по любой строке или столбцу матрицы, т.е. справедлива формула

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} M_{ik}, \; i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Очевидно, что различные матрицы могут иметь одинаковые определители.

Примеры. Вычислить следующие определители:

$$\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 2(-7) = 12 + 14 = 26;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-2) \cdot 5 + 1 \cdot 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 \cdot 0 - 1 \cdot (-2) \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \cdot 0 - 5 \cdot 3 \cdot 4 = -78.$$

Определение. *Дополнительный минор* произвольного элемента квадратной матрицы a_{ij} равен определителю матрицы, полученной из исходной вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Свойство 1. Важным свойством определителей является следующее соотношение:

$$\det A = \det A^{\mathrm{T}}.$$

Свойство 2. $\det (A \pm B) = \det A \pm \det B.$

Свойство 3. $\det (AB) = \det A \cdot \det B.$

Свойство 4. Если в квадратной матрице поменять местами какие-либо две строки (или столбца), то определитель матрицы изменит знак, не изменившись по абсолютной величине.

Свойство 5. При умножении столбца (или строки) матрицы на число ее определитель умножается на это число.

Свойство 6. Если в матрице A строки или столбцы линейно зависимы, то ее определитель равен нулю.

Определение. Столбцы (строки) матрицы называются *линейно зависимыми*, если существует их линейная комбинация, равная нулю, имеющая нетривиальные (не равные нулю) решения.

Свойство 7. Если матрица содержит нулевой столбец или нулевую строку, то ее определитель равен нулю. (Данное утверждение очевидно, т.к. считать определитель можно именно по нулевой строке или столбцу.)

Свойство 8. Определитель матрицы не изменится, если к элементам одной из его строк (столбца) прибавить (вычесть) элементы другой строки (столбца), умноженные на какое-либо число, не равное нулю.

Свойство 9. Если для элементов какой- либо строки или столбца матрицы верно соотношение: $d = d_1 \pm d_2$, $e = e_1 \pm e_2$, $f = f_1 \pm f_2$, то верно

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & l & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ k & l & m \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ k & l & m \end{vmatrix}.$$

Пример. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 2(0 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + (0 \cdot 1 + 3 \cdot 2) = \ -5 \ + \ 18 \ + \ 6 \ = \ 19.$$

Пример. Даны матрицы A =, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти det ($AB$).

1-й способ
det A = 4 – 6 = -2, det B = 15 – 2 = 13,
$\det(AB) = \det A \cdot \det B = -26.$

2-й способ
$AB = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 1 & 1\cdot 2 + 2\cdot 3 \\ 3\cdot 5 + 4\cdot 1 & 3\cdot 2 + 4\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 19 & 18 \end{pmatrix}.$
det (AB) = 7·18 – 8·19 = 126 – 152 = –26.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Определение. *Элементарными преобразованиями* матрицы назовем следующие преобразования:

1) умножение строки на число, отличное от нуля;
2) прибавление к одной строке другой строки;
3) перестановка строк;
4) вычеркивание (удаление) одной из одинаковых строк;
5) транспонирование.

Те же операции, применяемые для столбцов, также называются элементарными преобразованиями.

С помощью элементарных преобразований можно к какой-либо строке или столбцу прибавить линейную комбинацию остальных строк (столбцов).

Миноры

Определение. Если в матрице A выделить несколько произвольных строк и столько же произвольных столбцов, то определитель, составленный из элементов, расположенных на пересечении этих строк и столбцов, называется *минором* матрицы A. Если выделено s строк и столбцов, то полученный минор называется минором порядка s.

Заметим, что вышесказанное применимо не только к квадратным матрицам, но и к прямоугольным.

Если вычеркнуть из исходной квадратной матрицы A выделенные строки и столбцы, то определитель полученной матрицы будет являться дополнительным минором.

Алгебраические дополнения

Определение. *Алгебраическим дополнением* минора матрицы называется его дополнительный минор, умноженный на (-1) в степени, равной сумме номеров строк и номеров столбцов минора матрицы.

В частном случае алгебраическим дополнением элемента матрицы называется его минор, взятый со своим знаком, если сумма номеров столбца и строки, на которых стоит элемент, есть число четное, и с противоположным знаком, если нечетное.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Теорема Лапласа. (Пьер-Симон Лаплас (1749–1827), французский математик) *Если выбрано s строк матрицы с номерами $i_1, \ldots, i_s$, то определитель этой матрицы равен сумме произведений всех миноров, расположенных в выбранных строках, на их алгебраические дополнения.*

ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Определим операцию деления матриц как операцию, обратную умножению.

Определение. Если существуют квадратные матрицы X и A, удовлетворяющие условию

$$XA = AX = E,$$

где E – единичная матрица того же самого порядка, то матрица X называется *обратной* к матрице A и обозначается A^{-1}.

Каждая квадратная матрица с определителем, не равным нулю, имеет обратную матрицу и притом только одну.

Рассмотрим общий подход к нахождению обратной матрицы.

Исходя из определения произведения матриц, можно записать:

$$AX = E \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot x_{kj} = e_{ij},\ i = (1, n),\ j = (1, n),$$

$$e_{ij} = 0, \quad i \neq j,$$
$$e_{ij} = 1, \quad i = j.$$

Таким образом, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_{1j} + a_{12}x_{2j} + \ldots + a_{1n}x_{nj} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{j1}x_{1j} + a_{j2}x_{2j} + \ldots + a_{jn}x_{nj} = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_{1j} + a_{n2}x_{2j} + \ldots + a_{nn}x_{nj} = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, находим элементы матрицы X.

Пример. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^{-1}.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = e_{11} = 1 \\ a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = e_{12} = 0 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = e_{21} = 0 \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = e_{22} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{11} + 2x_{21} = 1 \\ x_{12} + 2x_{22} = 0 \\ 3x_{11} + 4x_{21} = 0 \\ 3x_{12} + 4x_{22} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{11} = -2, \\ x_{12} = 1, \\ x_{21} = 3/2, \\ x_{22} = -1/2. \end{cases}$$

Таким образом, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Однако такой способ не удобен при нахождении обратных матриц больших порядков, поэтому обычно применяют следующую формулу:

$$x_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} M_{ji}}{\det A},$$

где M_{ji} – дополнительный минор элемента a_{ji} матрицы A.

Пример. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^{-1}.

$\det A = 4 - 6 = -2$.

$M_{11} = 4$; $M_{12} = 3$; $M_{21} = 2$; $M_{22} = 1$.
$x_{11} = -2$; $x_{12} = 1$; $x_{21} = 3/2$; $x_{22} = -1/2$.

Таким образом, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Свойства обратных матриц

Укажем следующие свойства обратных матриц:

1) $(A^{-1})^{-1} = A$.

2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Пример. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^3.

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 78 \\ 39 & 86 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$ являются перестановочными.

Пример. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1(6 - 4) - 1(9 - 1) + 2(12 - 2) = -2 - 8 + 20 = 10,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(0 - 2) - 1(0 - 6) = 2,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(-4) - 3(-6) = -8 + 18 = 10.$$

Значение определителя: -10 + 6 – 40 = -44.

БАЗИСНЫЙ МИНОР МАТРИЦЫ

Ранг матрицы

Как было сказано выше, минором матрицы порядка s называется определитель матрицы, образованной из элементов исходной матрицы, находящихся на пересечении каких-либо выбранных s строк и s столбцов.

Определение. В матрице порядка $m \times n$ минор порядка r называется **базисным**, если он не равен нулю, а все миноры порядка $r + 1$ и выше равны нулю, или не существуют вовсе, т.е. r совпадает с меньшим из чисел m или n.

Столбцы и строки матрицы, на которых стоит базисный минор, также называются *базисными*.

В матрице может быть несколько различных базисных миноров, имеющих одинаковый порядок.

Определение. Порядок базисного минора матрицы называется *рангом* матрицы и обозначается Rg A.

Очень важным свойством элементарных преобразований матриц является то, что они не изменяют ранг матрицы.

Определение. Матрицы, полученные в результате элементарного преобразования, называются *эквивалентными.*

Надо отметить, что *равные* матрицы и *эививалентные* матрицы – понятия совершенно различные.

Теорема. *Наибольшее число линейно независимых столбцов в матрице равно числу линейно независимых строк.*

Т.к. элементарные преобразования не изменяют ранг матрицы, то можно существенно упростить процесс нахождения ранга матрицы.

Пример. Определить ранги следующих матриц.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&5\\0&0&0&0&0\\2&0&0&0&11\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&5\\2&0&0&0&11\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&5\\2&11\end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix}1&5\\2&11\end{vmatrix}=11-10=1\neq 0\Rightarrow \text{Rg}\,A=2.$$

$$B=\begin{pmatrix}3&5&7\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}4&8&12\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}=3-2=1\neq 0\Rightarrow \text{Rg}\,B=2.$$

$$C=\begin{pmatrix}1&2&1&3&4\\3&4&2&6&8\\1&2&1&3&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&3&4\\3&4&2&6&8\end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=4-6=-2\Rightarrow \text{Rg}\,C=2.$$

Если с помощью элементарных преобразований не удается найти матрицу, эквивалентную исходной, но меньшего размера, то нахождение ранга матрицы следует начинать с вычисления миноров наивысшего возможного порядка. В вышеприведенном примере это миноры порядка 3. Если хотя бы один из них не равен нулю, то ранг матрицы равен порядку этого минора.

Теорема о базисном миноре

Теорема. *В произвольной матрице A каждый столбец (строка) является линейной комбинацией столбцов (строк), в которых расположен базисный минор.*

Таким образом, *ранг произвольной матрицы A равен максимальному числу линейно независимых строк (столбцов) в матрице.*

Если A – квадратная матрица и $\det A = 0$, то по крайней мере один из столбцов – линейная комбинация остальных столбцов. То же самое справедливо и для строк. Данное утверждение следует из свойства линейной зависимости при определителе, равном нулю.

МАТРИЧНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Матричный метод применим к решению систем уравнений, где число уравнений равно числу неизвестных.

Метод удобен для решения систем невысокого порядка.

Метод основан на применении свойств умножения матриц.

Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Составим матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Систему уравнений можно записать как

$$A \cdot X = B.$$

Сделаем следующее преобразование: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$,

т.к. $A^{-1} \cdot A = E$, то $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$,

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Для применения данного метода необходимо находить обратную матрицу, что может быть связано с вычислительными трудностями при решении систем высокого порядка.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0, \\ x + 2y + 3z = 14, \\ 4x + 3y + 2z = 16. \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу A^{-1}.

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4-9) + 1(2-12) - 1(3-8) = = -25 - 10 + 5 = -30.$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5;\ M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1;\ M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1;$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10;\ M_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14;\ M_{32} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 16;$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5;\ M_{23} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 19;\ M_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11.$$

$$a_{11}^{-1} = \frac{5}{30};\ a_{12}^{-1} = \frac{1}{30};\ a_{13}^{-1} = \frac{1}{30};$$
$$a_{21}^{-1} = -\frac{10}{30};\ a_{22}^{-1} = -\frac{14}{30};\ a_{23}^{-1} = \frac{16}{30};$$
$$a_{31}^{-1} = \frac{5}{30};\ a_{32}^{-1} = \frac{19}{30};\ a_{33}^{-1} = -\frac{11}{30}.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{10}{30} & -\frac{14}{30} & \frac{16}{30} \\ \frac{5}{30} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 25+10-5 & 5+14-19 & 5-16+11 \\ 5-20+15 & 1-28+57 & 1+32-33 \\ 20-30+10 & 4-42+38 & 4+48-22 \end{pmatrix} = E.$$

Находим матрицу X.

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}B=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15}\\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\14\\16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}0+\frac{14}{30}+\frac{16}{30}\\ -\frac{1}{3}0-\frac{98}{15}+\frac{128}{15}\\ \frac{1}{6}0+\frac{266}{30}-\frac{176}{30}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

Итого решения системы: $x=1$; $y=2$; $z=3$.

Несмотря на ограничения возможности применения данного метода и сложность вычислений при больших значениях коэффициентов, а также систем высокого порядка, метод может быть легко реализован в системах компьютерной алгебры.

МЕТОД КРАМЕРА

(Габриель Крамер (1704–1752), швейцарский математик)

Данный метод применим только в случае систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений. Кроме того, необходимо ввести ограничения на коэффициенты системы. Необходимо, чтобы все уравнения были линейно независимы, т.е. ни одно уравнение не являлось бы линейной комбинацией остальных.

Для этого необходимо, чтобы определитель матрицы системы не равнялся 0:

$$\det A\neq 0.$$

Действительно, если какое-либо уравнение системы есть линейная комбинация остальных, то если к элементам какой-либо строки прибавить элементы другой, умноженные на какое-либо число, с помощью линейных преобразований можно получить нулевую строку. Определитель в этом случае будет равен нулю.

Теорема (правило) Крамера. *Система из n уравнений с n неизвестными*

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n,\end{cases}$$

в случае если определитель матрицы системы не равен нулю, имеет единственное решение и это решение находится по формулам

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

где Δ *= det A, а* Δ_i *– определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой столбца i столбцом свободных членов* b_i*:*

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11}...a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1}...a_{1n} \\ a_{21}...a_{2i-i} & b_2 & a_{2i+1}...a_{2n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1}...a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1}...a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Пример. Найти решение системы уравнений в общем виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

$x_1 = \Delta_1/\det A$; $x_2 = \Delta_2/\det A$; $x_3 = \Delta_3/\det A$.

Пример. Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0, \\ x + 2y + 3z = 14, \\ 4x + 3y + 2z = 16. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 – 9) + (2 – 12) – (3 – 8) = -25 – 10 + 5 = -30.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28 - 48) - (42 - 32) = -20 - 10 = -30,$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28 - 48) - (16 - 56) = -100 + 40 = -60,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(\ 32 - 42) + (16 - 56) = -50 - 40 = -90,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 3.$$

Как видно, результат совпадает с результатом, полученным выше матричным методом.

Если система однородна, т.е. $b_i = 0$, то при $\Delta \neq 0$ система имеет единственное нулевое решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

При $\Delta = 0$ система имеет бесконечное множество решений.

Для самостоятельного решения

$$\begin{cases} x + 3y - 6z = 12 \\ 3x + 2y + 5z = -10 \\ 2x + 5y - 3z = 6 \end{cases}.$$

Ответ: $x = 0$; $y = 0$; $z = -2$.

РЕШЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Как было сказано выше, матричный метод и метод Крамера применимы только к тем системам линейных уравнений, в которых число неизвестных равняется числу уравнений и в случае, если определитель матрицы системы не равен 0. Далее рассмотрим произвольные системы линейных уравнений.

Определение. Система m уравнений с n неизвестными в общем виде записывается следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (1)$$

где a_{ij} – коэффициенты, а b_i – постоянные. Решениями системы являются n чисел, которые при подстановке в систему превращают каждое ее уравнение в тождество.

Определение. Если система имеет хотя бы одно решение, то она называется *совместной.* Если система не имеет ни одного решения, то она называется *несовместной.*

Определение. Система называется *определенной*, если она имеет только одно решение, и *неопределенной*, если более одного.

Определение. Для системы линейных уравнений вида (1) матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ называется *матрицей системы*, а матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$ – *расширенной матрицей системы*.

Определение. Если b_1, b_2, …,b_m = 0, то система называется *однородной*. Однородная система всегда совместна.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИСТЕМ

К элементарным преобразованиям относятся:

1) прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на одно и то же число, не равное нулю;
2) перестановка уравнений местами;
3) удаление из системы уравнений, являющихся тождествами для всех x.

ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА – КАПЕЛЛИ
(условие совместности системы)

(Леопольд Кронекер (1823–1891), немецкий математик)

Теорема. *Система совместна (имеет хотя бы одно решение) тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы.*

$$\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} A^*.$$

Очевидно, что система (1) может быть записана в виде

$$x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Доказательство.

1. Если решение существует, то столбец свободных членов есть линейная комбинация столбцов матрицы A, а значит добавление этого столбца в матрицу, т.е. переход $A \to A^*$,не изменяет ранга.
2. Если $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} A^*$, то это означает, что они имеют один и тот же базисный минор. Столбец свободных членов – линейная комбинация столбцов базисного минора, т.е. верна запись, приведенная выше.

Пример. Определить совместность системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2, \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 1 - 6 = 5 \neq 0 .$$

Rg A = 2.

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix}.$$

Rg A^* = 3.

Система несовместна.

Пример. Определить совместность системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 = 4, \\ 7x_1 + 10x_2 = 12, \\ 5x_1 + 6x_2 = 8, \\ 3x_1 - 16x_2 = -5. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \\ 7 & 10 \\ 5 & 6 \\ 3 & -16 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 12 = 14 \neq 0.$$

Rg A = 2.

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 7 & 10 & 12 \\ 5 & 6 & 8 \\ 3 & -16 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 14 & 7 \\ 0 & 38 & 19 \\ 0 & 26 & 13 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Rg A^* = 2.

Система совместна.
Решения: $x_1 = 1$; $x_2 = 1/2$.

МЕТОД ГАУССА

(Карл Фридрих Гаусс (1777–1855), немецкий математик)

В отличие от матричного метода и метода Крамера, метод Гаусса может быть применен к системам линейных уравнений с произвольным числом уравнений и неизвестных. Суть метода заключается в последовательном исключении неизвестных.

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Разделим обе части 1-го уравнения на $a_{11} \neq 0$, затем:

1) умножим на a_{21} и вычтем из второго уравнения;

2) умножим на a_{31} и вычтем из третьего уравнения и т.д.

Получим:

$$\begin{cases} x_1 + d_{12}x_2 + \ldots + d_{1n}x_n = d_1, \\ d_{22}x_2 + d_{23}x_3 + \ldots + d_{2n}x_n = d_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{m2}x_2 + d_{m3} + \ldots + d_{mn}x_n = d_m, \end{cases}$$

где $d_{1j} = \dfrac{a_{ij}}{a_{11}}$, $j = 2, 3, \ldots, n + 1$;

$d_{ij} = a_{ij} - a_{i1}d_{1j}$, $i = 2, 3, \ldots, n$; $j = 2, 3, \ldots, n + 1$.

Далее повторяем эти же действия для второго уравнения системы, потом для третьего и т.д.

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3. \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы:

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3, \\ 5x_2 - 7x_3 = 11, \\ -x_3 = -2, \end{cases}$$

откуда получаем: $x_3 = 2$; $x_2 = 5$; $x_1 = 1$.

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0, \\ x + 2y + 3z = 14, \\ 4x + 3y + 2z = 16. \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & -11 & -16 & -70 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14, \\ -5y - 10z = 40, \\ 6z = 18, \end{cases}$$

откуда получаем: $z = 3$; $y = 2$; $x = 1$.

Ответ совпадает с ответом, полученным для данной системы методом Крамера и матричным методом.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Практическое занятие № 1

Определители *n*-го порядка и их свойства. Вычисление определителя разложением по строке (столбцу). Эффективные методы вычисления определителей. Операции над матрицами

Задание 1. Вычислите определители:

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$ **Ответ:** -15.

2. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ **Ответ:** -20.

Для проверки полученного результата вычисления производите двумя способами: по правилу Саррюса и по теореме разложения, применяя свойства определителей.

Задание 2. Вычислите определители:

1. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 1 \end{vmatrix}.$ **Ответ:** 54.

2. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 9 \end{vmatrix}.$ **Ответ:** 50.

Задание 3

Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Найти $2A + B$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 9 & 9 & 16 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}$.

Задание 4. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}$.

Задание 5

Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Ответ: (13; 16).

Домашнее задание

1. Вычислить определитель, предварительно упростив его:

$$\begin{vmatrix} x^2+a^2 & ax & 1 \\ y^2+a^2 & ay & 1 \\ z^2+a^2 & az & 1 \end{vmatrix}.$$

Ответ: $a(x-y)(y-z)(x-z)$.

2. Для данных матриц A и B найти $(A+3B)^2$, если:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & -8 \\ -3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 96 & 12 & 8 \\ -18 & 54 & -8 \\ 51 & 85 & 111 \end{pmatrix}$.

Практическое занятие № 2

Решение систем линейных уравнений по правилу Крамера. Решение произвольных систем линейных уравнений методом Гаусса – Жордана. Ранг матрицы и его вычисление. Теорема Кронекера – Капелли

Задание 1

Решите системы уравнений по формулам Крамера и выполните проверку:

1. $\begin{cases} 2x+y=5, \\ x+3z=16, \\ 5y-z=10. \end{cases}$ **Ответ:** (1; 3; 5).

2. $\begin{cases} x+2y-z=2, \\ 2x-3y+2z=2, \\ 3x+y+z=8. \end{cases}$ **Ответ:** (1; 2; 3).

Задание 2

Решить системы методом Гаусса:

1. $\begin{cases} x_1-x_3+x_4=3, \\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=2, \\ 5x_1-3x_4=-6, \\ x_1+x_2+x_3+x_4=2. \end{cases}$ **Ответ:** (0,1; -1,2).

2. $\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3+x_4=0, \\ 2x_1+3x_2-x_4=0, \\ x_1+5x_2-3x_3=7, \\ 3x_2+2x_3+x_4=2. \end{cases}$ **Ответ:** (-1,1; -1,1).

Задание 3

Выяснить, совместна или несовместна каждая система, и в случае совместности решить их:

1. $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-2x_4=1, \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=2, \\ 5x_1-5x_2+8x_3-7x_4=3. \end{cases}$ **Ответ:** система несовместна.

2. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 5x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$

Ответ: система совместна, имеет бесконечно много решений (c – 1; 2 – c; c), где $c \in R$.

Задание 4

Исследовать и решить однородные системы уравнений:

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$ **Ответ:** (0, 0, 0).

2. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 0. \end{cases}$ **Ответ:** (5c; 11c; 7c), где $c \in R$.

Домашнее задание

1. Исследовать систему уравнений на совместность и в случае совместности решить ее:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12. \end{cases}$$

Ответ: $(3;\ 2;\ 1)$.

2. Решить систему методом Жордано – Гаусса и сделать проверку.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -22, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 12, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $(1;\ 5;\ -1)$.

ТРЕХУРОВНЕВЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ К РАЗДЕЛУ «ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ»

Уровень I

1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & 8 & 3 \end{vmatrix}$.

а) разложением по первой строке;

б) получением максимального числа нулей в произвольно выбранном ряду;

в) приведением к треугольному виду.

Ответ: -96.

2. Найти матрицу, обратную к матрице $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 2 & -10 & 9 \\ 9 & -8 & -6 \end{pmatrix}$. Проверить выполнимость равенства $A^{-1}\cdot A = AA^{-1} = E$.

Ответ: $\dfrac{1}{331}\begin{pmatrix} 132 & -34 & 59 \\ 93 & -39 & 19 \\ 74 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

3. Решить систему с помощью формул Крамера

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3, \\ -2x_1 + 6x_2 + 9x_3 = -11,. \\ -4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -2. \end{cases}$$

Ответ: (4; -2; 1).

Уровень II

1. Решить уравнение $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 7 & x-3 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0$.

Ответ: $\{5\}$.

2. Вычислить, используя свойства определителей:

$$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & 1 \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & 1 \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & 1 \end{vmatrix}.$$

Ответ: 0.

3. Исследовать систему на совместность и определенность. В случае совместности, найти решение.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 4. \end{cases}$$

Ответ: совместна и неопределенна, (c_1; c_2; $5 - c_1 + 4c_2$; -3; $1 + 2c_1 - c_2$).

Уровень III

1. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} & 1 \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & -1 \\ \frac{4}{7} & -\frac{2}{7} & -1 \end{pmatrix}$.

2. Числа 255, 391, 578 делятся на 17. Не вычисляя значение определителя $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 3 & 9 & 1 \\ 5 & 7 & 8 \end{vmatrix}$, доказать, что он тоже делится на 17.

НУЛЕВОЙ ВАРИАНТ
МИНИ-КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание 1

Найти матрицу $D=(3A-4B)\cdot C$, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & -1 & -3\\ -1 & 2 & -4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix}.$$

1. Вычислим матрицу $3A$:

$$3A=\begin{pmatrix}3\cdot 1 & 3\cdot(-2) & 3\cdot 3\\ 3\cdot 2 & 3\cdot(-1) & 3\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -6 & 9\\ 6 & -3 & 12\end{pmatrix}.$$

2. Вычислим матрицу $4B$:

$$4B=\begin{pmatrix}4\cdot 2 & 4\cdot(-1) & 4\cdot(-3)\\ 4\cdot(-1) & 4\cdot 2 & 4\cdot(-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -4 & -12\\ -4 & 8 & -16\end{pmatrix}.$$

3. Вычислим матрицу $(3A-4B)$:

$$(3A-4B)=\begin{pmatrix}3 & -6 & 9\\ 6 & -3 & 12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8 & -4 & -12\\ -4 & 8 & -16\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3-8 & -6-(-4) & 9-(-12)\\ 6-(-4) & -3-8 & 12-(-16)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & -2 & 21\\ 10 & -11 & 28\end{pmatrix}.$$

4. Вычислим матрицу $D=(3A-4B)\cdot C$:

$$D=\begin{pmatrix}-5 & -2 & 21\\ 10 & -11 & 28\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-5\cdot 1+(-2)\cdot(-1)+21\cdot(-2) & -5\cdot 2+(-2)\cdot(-2)+21\cdot 3\\ 10\cdot 1+(-11)\cdot(-1)+28\cdot(-2) & 10\cdot 2+(-11)\cdot(-2)+28\cdot 3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-45 & 57\\ -35 & 126\end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix}-45 & 57\\ -35 & 126\end{pmatrix}.$

Задание 2

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса, вычислить $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$ по формулам Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

1. Метод Гаусса.

Составим и приведем к верхнетреугольному виду расширенную матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 7 \\ \hline 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{cc} -1 & -3 \\ & \\ & 2 \end{array} \sim$$

В качестве базисной взяли первую строку, умножили базисную строку на (-1) и прибавили ко второй строке. Затем базисную строку умножили на (-3), третью строку на 2 и сложили их.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 7 \\ \hline 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right) \div 2 \quad \sim$$

В полученной матрице вторую строку разделили на 2.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ \hline 0 & 1 & -7 & -9 \end{array}\right) -1 \sim$$

За базис взяли вторую строку, умножили ее на (-1) и прибавили к третьей. Получили результирующую матрицу, которая соответствует системе уравнений

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \end{array}\right).$$

Перейдем от расширенной матрицы к системе линейных алгебраических уравнений и вычислим:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ \quad x_2 - x_3 = -3, \Rightarrow \\ \quad -6x_3 = -6. \end{cases} \qquad \begin{aligned} &x_3 = 1, \\ &x_2 - 1 = -3 \ \Rightarrow x_2 = -2, \\ &2x_1 - 2 + 3\cdot 1 = 7 \ \Rightarrow \ x_1 = 3. \end{aligned}$$

2. Метод Крамера (для примера рассмотрим полное решение, а не только $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$).

Составим и вычислим определитель главной матрицы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(3-2) - (2-3) + 3(4-9) = 2 + 1 - 15 = -12.$$

Составим и вычислим Δ_1, Δ_2 и Δ_3:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -36; \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 24; \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -12.$$

Воспользуемся формулами Крамера для получения решения СЛАУ:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-36}{-12} = 3; \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{24}{-12} = -2; \ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-12}{-12} = 1.$$

Ответ: (3; -2; 1).

ЗАДАНИЯ
ДЛЯ ВНЕАУДИТОРНОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание 1

Приготавливается нитрирующая смесь из трех компонентов, содержащих воду, серную и азотную кислоты. Требуется установить, какое количество каждого компонента необходимо взять, чтобы получить M кг смеси, содержащей b_1, b_2, и b_3 соответственно H_2O, HNO_3 и H_2SO_4, если содержание воды, азотной и серной кислоты в каждом компоненте известно и представлено в виде матрицы третьего порядка.

– базовый (I) уровень – составить систему уравнений и решить ее методом Гаусса и представить в письменном виде;

– прикладной (II) уровень – составить математическую модель в общем виде и представить решение в системах компьютерной алгебры (Mathcad, Matlab или Maple) на выбор;

– творческий (III) уровень – представить математическую модель в общем виде и разработать программу решения методом Жордано – Гаусса в EXSEL.

Задание 2

Пусть имеется смесь *n*-ксилола, *m*-ксилола, *m*-ксилола и этилбензола, для которых известны значения молярных коэффициентов поглощения на соответствующих длинах волн $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и λ_4 (табл. 1). Толщина спектрофотометрической кюветы 1 см.

λ	Молярный коэффициент поглощения на длине волны λ, л/(моль·см)				Оптическая плотность
	n-ксилол	*m*-ксилол	*m*-ксилол	этилбензол	
λ_1	1,5020	0,0514	0	0,0408	0,10130
λ_2	0,0261	1,1516	0	0,0820	0,09943
λ_3	0,0340	0,0355	2,5320	0,2933	0,21940
λ_4	0,0340	0,0684	0	0,3470	0,03396

Исходя из данных оптической плотности для смеси на указанных длинах волны, найти концентрацию компонентов смеси.

Задание 3

Экспериментатор установил, что при определенной постоянной температуре суммарное давление смесей паров бензола (1), дихлорэтана (2) и хлорбензола (3) в однофазной системе равно значениям, представленным в таблице 2. Найти значения давления пара чистых компонентов.

Состав смеси, мол. доли			Давление P, Па
N_1	N_2	N_3	
0,80	0,10	0,10	1840
0,20	0,70	0,10	1860
0,05	0,05	0,90	236

ГЛОССАРИЙ

Новые понятия	Содержание
1	*2*
Матрица – прямоугольная таблица порядка $m \times n$, обозначаемая $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$	прямоугольная таблица из $m \times n$ элементов, где первое число m равно числу строк, а n – числу столбцов матрицы A; коротко матрица A обозначается $A = \left(a_{ij}\right)_{mn}$
Элементы матрицы	числа a_{ij}, из которых состоит матрица; индексы определяют положение элемента в таблице: первый индекс – число строк; второй – число столбцов
Квадратная матрица порядка n	матрица, число строк которой равно числу ее столбцов и равно числу n
Главная диагональ квадратной матрицы	образуется элементами с одинаковыми индексами $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$
Симметричная матрица	квадратная матрица, элементы которой, симметричные относительно главной диагонали, равны $a_{ij} = a_{ji}$, где $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$
Единичная матрица (E)	квадратная матрица, на главной диагонали которой стоят единицы, а остальные элементы нулевые
Произведение матрицы A_{mxn} (порядка $m \times n$) на матрицу B_{nxk} (порядка $n \times k$)	матрица C_{mk} (порядка $m \times k$), элементы которой вычисляются по формуле $C_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$, где $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, k$
Определитель квадратной матрицы	число, которое ставится в соответствие матрице A и вычисляется по ее элементам
Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij}	величина $A_{ij} = \left(-1\right)^{i+j} M_{ij}$, где M_{ij} – определитель порядка (n – 1), полученный вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}
Вырожденная матрица	матрица, у которой определитель равен нулю

1	*2*
Обратная матрица для матрицы A	квадратная матрица A^{-1}, которая удовлетворяет условию $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$; обратная матрица A^{-1} существует тогда и только тогда, когда исходная матрица невырожденная, $\det A \neq 0$
Ранг матрицы A	наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля
Элементарные преобразования матрицы A	– перестановка местами двух параллельных рядов матрицы; – умножение всех элементов ряда матрицы на число, отличное от нуля; – прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число
Ступенчатая матрица	матрица, обладающая следующими свойством: если в i-й строке матрицы левее элемента a_{ij} стоят только нули (a_{ij} – первый отличный от нуля элемент в i-й строке), то ниже этого элемента в j-м столбце стоят только нули
Метод Гаусса	метод приведения произвольной матрицы к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований
Угловые элементы ступенчатой матрицы	первые отличные от нуля элементы каждой строки, «стоящие на углах» ступенчатой матрицы; число угловых элементов ступенчатой матрицы равно рангу исходной матрицы
Система из m линейных уравнений с n неизвестными	система вида $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$ где $\overline{x} = (x_1; x_2; ...; x_n)$ – вектор неизвестных, подлежащих определению
Матрица системы	матрица коэффициентов при неизвестных $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$
Векторно-матричная запись системы	запись системы в виде $A\overline{x} = \overline{b}$

1	*2*
Расширенная матрица системы	матрица, полученная присоединением столбца из свободных членов $b_1, b_2, \ldots, b_m$ к матрице системы $\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc\|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$
Однородная система	Система уравнений, в которых вектор правых частей является нулевым вектором: $\overline{b} = \overline{0}$; $A\overline{x} = \overline{0}$
Неоднородная система уравнений	система, в которой хотя бы в одном уравнении справа стоит ненулевой элемент: $\overline{b} \neq \overline{0}$
Решение системы	такой вектор $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, что при подстановке чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в уравнения системы получаются верные равенства
Совместная система	система, у которой существует решение
Несовместная система	система, у которой нет решений
Критерий (необходимое и достаточное условие) совместности системы	равенство рангов основной и расширенной матриц
Общее решение системы	совокупность всех решений системы
Частное решение системы	решение, которое получается из общего решения путем подстановки вместо свободных переменных конкретных численных значений
Метод Гаусса для решения системы уравнений	метод, состоящий из прямого и обратного хода: 1) *прямой ход метода Гаусса* – приведение системы к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований; 2) *обратный ход* – выбор свободных и базисных переменных и получение формул общего решения
Общее решение неоднородной системы	решение, состоящее из суммы общего решения однородной системы и некоторого частного решения неоднородной
Определенная система или имеющая единственное решение	система, которая имеет единственное решение (у которой число угловых элементов в ступенчатой форме равно числу переменных, т.е. ранг системы равен числу переменных)

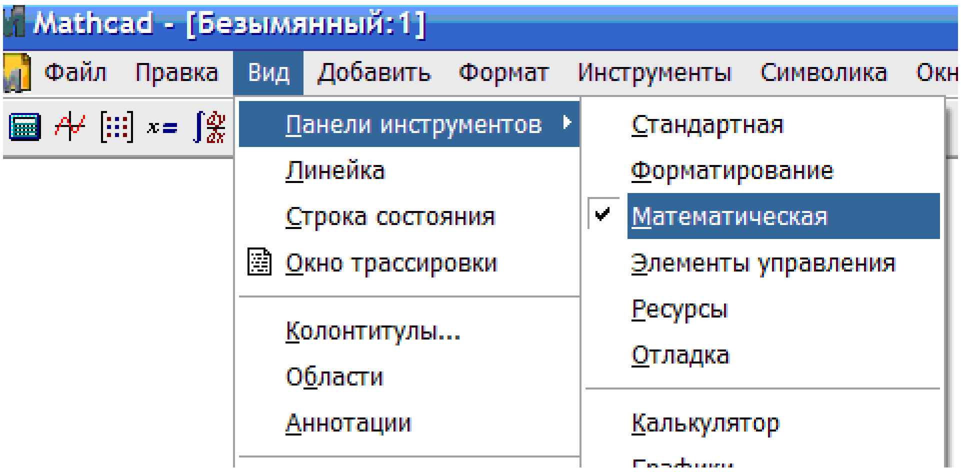
ПРИЛОЖЕНИЯ,
РАЗРАБОТАННЫЕ В СИСТЕМАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

Рассмотрим программы, входящие в системы компьютерной алгебры: Mathcad и Maple. Предлагаемые программы помогут Вам при проверке домашнего задания или, при необходимости, предоставят возможность быстрого вычисления определителя, нахождения обратной матрицы, решения систем линейных уравнений, выполнения заданий из модуля «Элементы линейной алгебры» и др.

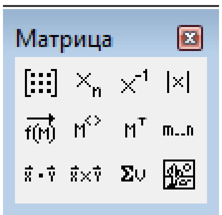
Рассмотрим один из наиболее популярных математических пакетов MathCAD.

Чтобы начать работать с приложением вызовите панель Calculus (вычисления).

Выберите на панели вкладку ВИД → ПАНЕЛИ ИНСТРУМЕНТОВ → МАТЕМАТИЧЕСКАЯ.

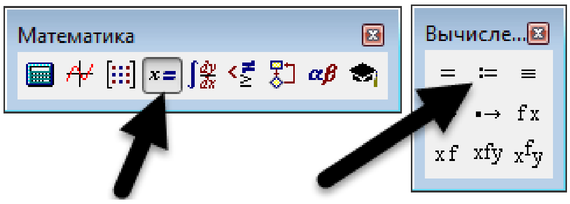


Далее появится панель 

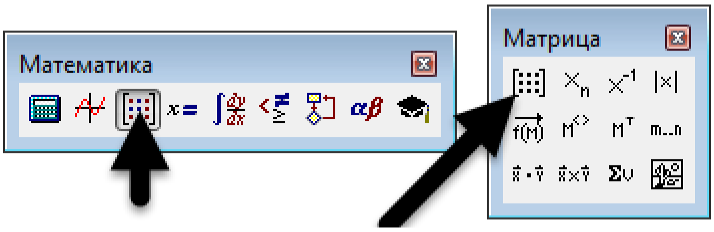
, на данной вкладке вы выбираете панель «Матрица» 

и продолжаете работу. Например, Вы

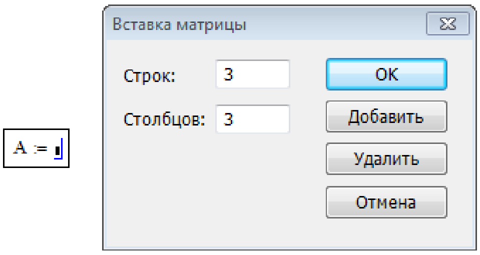
хотите вычислить определитель матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -8 \\ 0 & 6 & 5 \\ 7 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. Для этого необходимо выбрать вкладку «Математика», на ней вкладку «Вычисление»



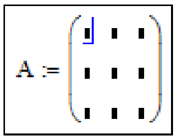
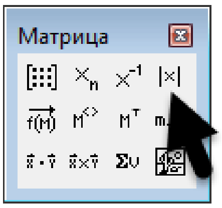
и ввести $A :=$. Затем выбрать на панели «Математика» вкладку «Матрица»



, (на рисунке обозначены стрелочкой). После этого появится следующий символ



.

Теперь введите нужное количество строк и столбцов . В нашем примере три строки и три столбца. Поля мы заполняем соответственно заданному примеру $A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & -8 \\ 0 & 6 & 5 \\ 7 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. Далее, используя вкладку «Матрица» , выбираем значок, указанный стрелочкой, заполняем его и вводим знак «=». Получаем ответ: $|A| = 292$. Далее разобраны задачи, наиболее часто встречаемые в теме «Элементы линейной алгебры».

Решить систему линейных уравнений различными способами

$$\begin{cases} 2x - y + 5z = 0 \\ 3x + 2y - 5z = 1 \\ 3y - 2z = 4 \end{cases}$$

1. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$P := \mathrm{augment}(A, B)$ Формируем расширенную матрицу

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$R := \mathrm{rref}(P)$ Приводим расширенную матрицу к ступенчатому виду

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.115 \\ 0 & 1 & 0 & 1.574 \\ 0 & 0 & 1 & 0.361 \end{pmatrix}$$

Решить систему линейных уравнений различными способами

$$\begin{cases} 2x - y + 5z = 0 \\ 3x + 2y - 5z = 1 \\ 3y - 2z = 4 \end{cases}$$

1. Решение системы линейных уравнений методом обратной матрицы

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Вычислить AX=B

$$X := A^{-1} \cdot B \qquad X = \begin{pmatrix} -0.115 \\ 1.574 \\ 0.361 \end{pmatrix}$$

2. Решение стстемы линейных уравнений методом Крамера

$\Delta := |A| \qquad \Delta = 61$ Вычислили главный определитель, убедились, что он отличен от нуля

$$A1 := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad A2 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad A3 := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Сфоровали вспомогательные матрицы

$$\Delta 1 := |A1| \qquad \Delta 2 := |A2| \qquad \Delta 3 := |A3|$$

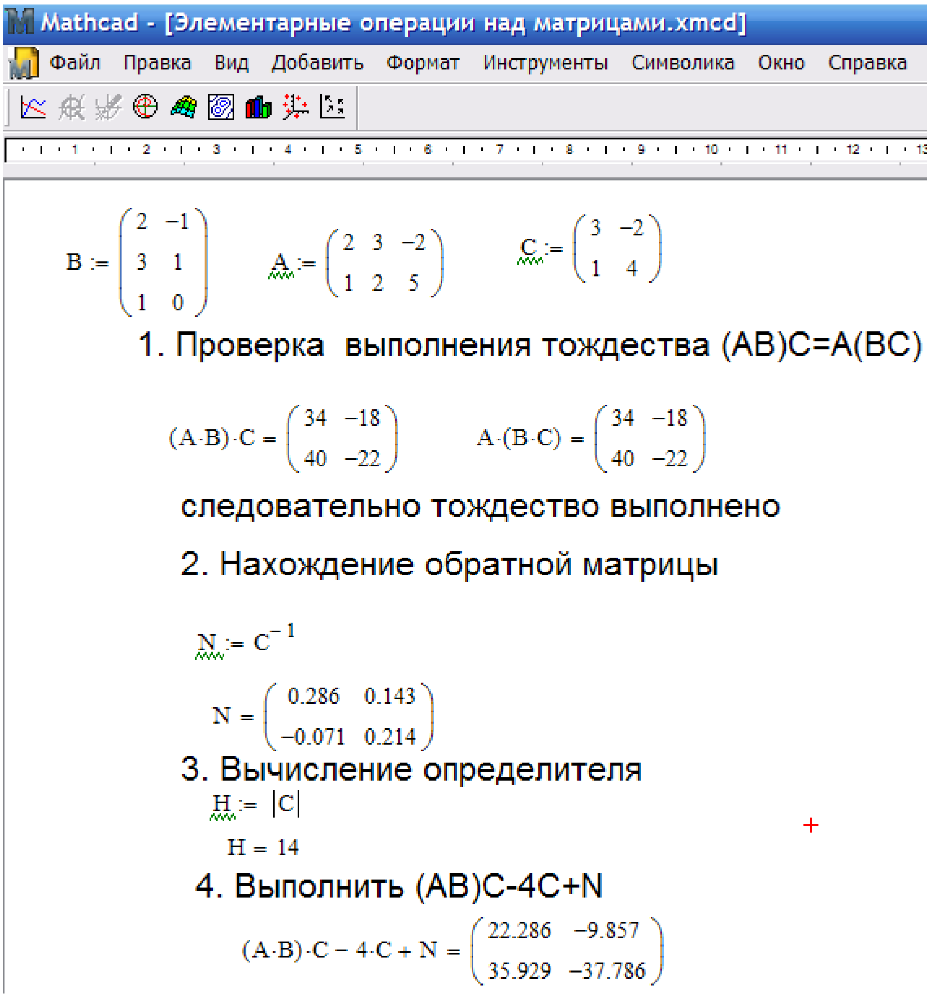
$$\Delta 1 = -7 \qquad \Delta 2 = 96 \qquad \Delta 3 = 22$$

Вычислили определители вспомогательных матриц

Применили формулы Крамера

$$x := \frac{\Delta 1}{\Delta} \qquad y := \frac{\Delta 2}{\Delta} \qquad z := \frac{\Delta 3}{\Delta}$$

$$x = -0.115 \qquad y = 1.574 \qquad z = 0.361$$



$B := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad C := \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

1. Проверка выполнения тождества (AB)C=A(BC)

$(A \cdot B) \cdot C = \begin{pmatrix} 34 & -18 \\ 40 & -22 \end{pmatrix}$ $\quad A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} 34 & -18 \\ 40 & -22 \end{pmatrix}$

следовательно тождество выполнено

2. Нахождение обратной матрицы

$N := C^{-1}$

$N = \begin{pmatrix} 0.286 & 0.143 \\ -0.071 & 0.214 \end{pmatrix}$

3. Вычисление определителя

$H := |C|$

$H = 14$

4. Выполнить (AB)C-4C+N

$(A \cdot B) \cdot C - 4 \cdot C + N = \begin{pmatrix} 22.286 & -9.857 \\ 35.929 & -37.786 \end{pmatrix}$

Проверить систему на совместимость и, если это возможно решить её:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ x_1+2x_2-4x_3+x_4-2x_5=4 \\ 2x_1+x_2-x_3+3x_4-x_5=2 \\ 3x_1-2x_2+x-x_4+x_5=1 \\ x_1-x_2+5x_3-2x_4+x_5=5 \end{cases}$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Выделяем основные матрицы

$Ab := \mathrm{augment}(A, b)$

Создаём расширенную матрицу

$$Ab = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rank}(A) = 5$

$\mathrm{rank}(Ab) = 5$

Вычисляем ранг заявленных матриц

$$\mathrm{lsolve}(A, b) = \begin{pmatrix} 0.732 \\ 0.281 \\ 1.248 \\ -0.19 \\ -2.072 \end{pmatrix}$$

Находим решение системы линейных уравнений

Создание матрицы

> $A := matrix(2, 2, [1, 2, 3, 4]);$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

> $B := matrix(2, 2, [5, 6, 7, 8]);$

$$B := \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

> $C := matrix(2, 3, [3, 4, 4, 3, -1, 3]);$

$$C := \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

> $mulcol(C, 1, 4);$ **Умножение 1 столбца матрицы С на 4**

$$\begin{bmatrix} 12 & 4 & 4 \\ 12 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

> $mulcol(A, 2, x);$ **Умножение 2 столбца матрицы А на х**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 3 & 4x \end{bmatrix}$$

> $mulrow(A, 2, 2);$ **Умножение 2 строки матрицы А на 2**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

> $det(A);$ **Вычисляет определитель матрицы А**

$$-2$$

> $minor(A, 2, 1);$ **Вычисляет минор с индексами 2 , 1** $\{M_{21}\}$

$$[2]$$

> $rank(C);$ **Вычисляет ранг матрицы.**

$$2$$

> $inverse(A);$ **Вычисляет обратную** $^{-1}]$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

> $evalm((A + B) \cdot C);$ **Элементарные матричные операции**

$$\begin{bmatrix} 42 & 16 & 48 \\ 66 & 28 & 76 \end{bmatrix}$$

> Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 2x - y + 5z = 0 \\ 3x + 2y - 5z = 1 \\ 3y - 2z = 4 \end{cases}$

```
> A := matrix(3, 3,[2,-1, 5, 3, 2,-5, 0, 3,-2]): b := vector(3,[0, 1, 4]);
```

$$b := [0 \quad 1 \quad 4]$$

```
> linsolve(A, b); # Решение линейной системы Ax=b
```

$$\left[\frac{-7}{61} \quad \frac{96}{61} \quad \frac{22}{61}\right]$$

```
> evalm(inverse(A)&*b); # Решение линейной системы Ax=b методом обратной матрицы
```

$$\left[\frac{-7}{61} \quad \frac{96}{61} \quad \frac{22}{61}\right]$$

Найти собственные значения и собственные векторы матрицы А:

> $A := \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$:

```
> eigenvals(A);# собственные числа
```

$$5, -1$$

```
> # Найдём собственные числа и собственные векторы матрицы A:
> v := eigenvectors(A) : L1 := v[1][1]; L2 := v[2][1];# собственные числа
```

$$L1 := 5$$

$$L2 := -1$$

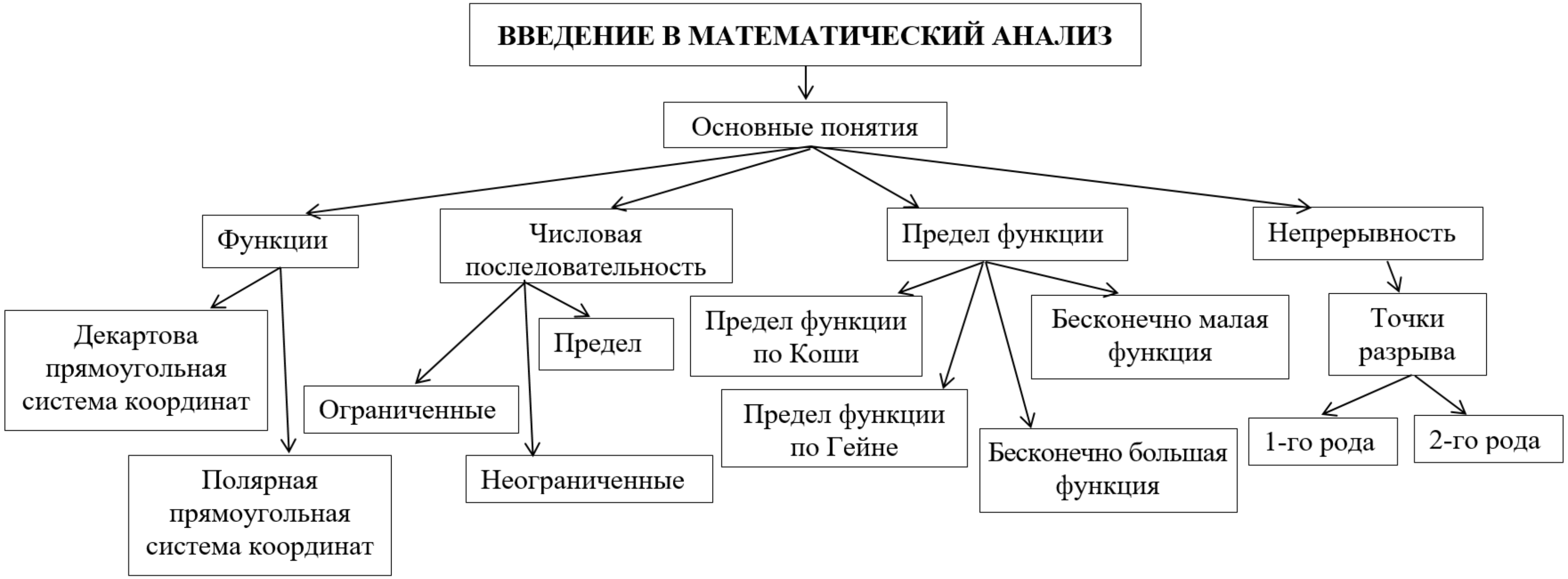
```
> v1 := v[1][3]; v2 := v[2][3];# собственные векторы
```

$$v1 := \{[-2 \quad 1]\}$$

$$v2 := \{[1 \quad 1]\}$$

Модуль 2
ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Графическая схема



Информационная таблица

<table>
<tr>
<td>Переменная величина y называется функцией от независимой переменной x (аргумента), если указан закон (правило), по которому каждому элементу x некоторого множества ставится в соответствие единственный элемент y того же или другого множества</td>
<td rowspan="7">Алгоритмические предписания

1. При раскрытии неопределенности вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ можно числитель и знаменатель дроби разделить на величину, имеющую в данном процессе наибольший порядок неограниченного роста (бесконечности) (чаще – наивысшую степень переменной).

2. При раскрытии неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, содержащей отношение многочленов, можно:
– разложить числитель и знаменатель дроби на множители;
– разделить числитель и знаменатель на $(x - x_0)$.

3. При раскрытии неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, содержащей иррациональные выражения, можно:
– перевести иррациональность из числителя в знаменатель (или наоборот) путем домножения на сопряженное выражение;
– заменить переменную.

4. При раскрытии неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, содержащей тригонометрические выражения, можно воспользоваться первым замечательным пределом $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$.

5. При раскрытии неопределенности вида $\left(1^{\infty}\right)$ можно воспользоваться вторым замечательным пределом $\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$.

6. При раскрытии неопределенностей вида $(\infty-\infty), (0\cdot\infty)$ необходимо воспользоваться сведением их к неопределенностям $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$</td>
</tr>
<tr>
<td>Известны следующие способы задания функции: аналитический, графический, табличный</td>
</tr>
<tr>
<td>Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число x_n, то говорят, что задана последовательность
$x_1, x_2, ..., x_n, ... = \{x_n\}$</td>
</tr>
<tr>
<td>Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для всех $n > N$ выполняется условие $|x_n - a| < \varepsilon$</td>
</tr>
<tr>
<td>(по Коши)
Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta_\varepsilon > 0$, что для всех таких x, что $|x-a| < \delta_\varepsilon$, верно неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$</td>
</tr>
<tr>
<td>Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $M > 0$, что для всех x, удовлетворяющих $|x| > M$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$</td>
</tr>
<tr>
<td>Функция $f(x)$, определенная в x_0 и в некоторой ее окрестности, называется непрерывной в точке x_0, если предел функции и ее значение в этой точке равны, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$</td>
</tr>
<tr>
<td>Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, но не является непрерывной в самой точке x_0, то она называется разрывной функцией, а точка x_0 – точкой разрыва</td>
<td rowspan="2">В полярной системе всякая точка M имеет две координаты: расстояние ρ от полюса O до точки M, т.е. $\rho = |\overline{OM}|$, и угол φ, который образует радиус-вектор $\overline{OM}$ с осью Op. Числа ρ и φ называются полярными координатами точки M. Они изменяются в границах $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi \le 2\pi$</td>
</tr>
<tr>
<td>Точка x_0 называется точкой разрыва 1-го рода, если в этой точке функция $f(x)$ имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \ne \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$</td>
</tr>
</table>

ЛЕКЦИОННЫЙ КУРС

ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ

Определение. Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число x_n, то говорят, что задана *последовательность*

$$\{x_n\} = x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

Общий элемент последовательности является функцией от n

$$x_n = f(n).$$

Таким образом, последовательность может рассматриваться как функция целочисленного аргумента.

Задать последовательность можно различными способами – главное, чтобы был указан способ получения любого члена последовательности.

Пример

$\{x_n\} = \{(-1)^n\}$ или $\{x_n\} = -1; 1; -1; 1; \ldots$

$\{x_n\} = \{\sin \frac{\pi n}{2}\}$ или $\{x_n\} = 1; 0; 1; 0; \ldots$

Для последовательностей можно определить следующие *операции*:

1) умножение последовательности на число m: $m\{x_n\} = \{mx_n\}$, т.е. mx_1, mx_2, …;

2) сложение (вычитание) последовательностей: $\{x_n\} \pm \{y_n\} = \{x_n \pm y_n\}$;

3) произведение последовательностей: $\{x_n\}\cdot\{y_n\} = \{x_n\cdot y_n\}$;

4) частное последовательностей: $\frac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ при $\{y_n\} \neq 0$.

ОГРАНИЧЕННЫЕ И НЕОГРАНИЧЕННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если существует такое число $M > 0$, что для любого n верно неравенство

$$|x_n| < M,$$

т.е. все члены последовательности принадлежат промежутку $(-M; M)$.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если для любого n существует такое число M, что

$$x_n \le M.$$

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной снизу*, если для любого n существует такое число M, что

$$x_n \ge M.$$

Пример.
$\{x_n\} = n$ – ограничена снизу $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

Определение. Число a называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для всех $n > N$ выполняется условие

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Это записывается как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

В этом случае говорят, что последовательность $\{x_n\}$ *сходится* к a при $n\to\infty$.

Свойство. Если отбросить какое-либо число членов последовательности, то получаются новые последовательности, при этом если сходится одна из них, то сходится и другая.

Пример. Доказать, что предел последовательности $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ равен 0.

Пусть при $n > N$ верно $\left|0 - \frac{(-1)^n}{n}\right| < \varepsilon$, т.е. $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Это верно при $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Таким образом, если за N взять целую часть от $\frac{1}{\varepsilon}$, то утверждение, приведенное выше, выполняется.

Пример. Показать, что при $n\to\infty$ последовательность 3, $2\frac{1}{2},\ 2\frac{1}{3},\ 2\frac{1}{4},\ \ldots,\ 2+\frac{1}{n},\ \ldots$ имеет пределом число 2.

Итак, $x_n = 2 + 1/n$; $1/n = x_n - 2$.

Очевидно, что существует такое число N, что для $n > N$ $|x_n - 2| = \frac{1}{n} < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = 2$.

Теорема. *Последовательность не может иметь более одного предела.*

Доказательство. Предположим, что последовательность $\{x_n\}$ имеет два предела a и b, не равные друг другу:

$$x_n \to a;\ x_n \to b;\ a \neq b.$$

Тогда по определению существует такое число $\varepsilon > 0$, что

$$|a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$|b - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Запишем выражение

$$|a - b| = |(a - x_n) + (x_n - b)| \le |a - x_n| + |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Поскольку ε – *любое* число, то $|a - b| = 0$, т.е. $a = b$. Теорема доказана.

Теорема. *Если $x_n \to a$, то* $|x_n| \to |a|$.

Доказательство. Из $x_n \to a$ следует, что $|x_n - a| < \varepsilon$. В то же время

$||x_n| - |a|| \le |x_n - a|$, т.е. $||x_n| - |a|| < \varepsilon$, т.е. $|x_n| \to |a|$.

Теорема доказана.

Теорема. *Если $x_n \to a$, то последовательность $\{x_n\}$ ограничена.*

Следует отметить, что обратное утверждение неверно, т.е. из ограниченности последовательности не следует ее сходимость.

Например, последовательность $x_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n},\ \textit{при четном } n \\ 2 - \frac{1}{n},\ \textit{при нечетном } n \end{cases}$ не имеет предела, хотя $|x_n| \le 2$.

Число *e*

Рассмотрим последовательность с $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Если последовательность $\{x_n\}$ монотонная и ограниченная, то она имеет конечный предел.

По формуле бинома Ньютона

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

или, что то же самое,

$$x_n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\ldots+$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ возрастающая. Запишем выражение x_{n+1} и сравним его с выражением x_n:

$$x_{n+1} = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)+\ldots+$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots$$
$$\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Каждое слагаемое в выражении x_{n+1} больше соответствующего значения x_n, и, кроме того, у x_{n+1} добавляется еще одно положительное слагаемое. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ возрастающая.

Докажем теперь, что при любом n ее члены не больше 3: $x_n < 3$.

$$x_n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!} < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}} =$$
$$= 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$$ (*геометрическая прогрессия*).

Итак, последовательность $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ – монотонно возрастающая и ограниченная сверху, т.е. имеет конечный предел. Этот предел принято обозначать буквой *e*:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Из неравенства $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ следует, что $e < 3$. Отбрасывая в равенстве для $\{x_n\}$ все члены, начиная с четвертого, имеем

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right),$$

переходя к пределу, получаем

$$e \ge 2+\frac{1}{2} = 2{,}5.$$

Таким образом, число *e* заключено между числами 2,5 и 3. Если взять большее количество членов последовательности, то можно получить более точную оценку значения числа *e*.

Можно показать, что число *e* иррациональное и его значение равно 2,71828… .

Аналогично можно показать, что $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, расширив требования к x до любого действительного числа.

Предположим,

$$n < x < n + 1,$$

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1},$$

$$1+\frac{1}{n} > 1+\frac{1}{x} > 1+\frac{1}{n+1},$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n.$$

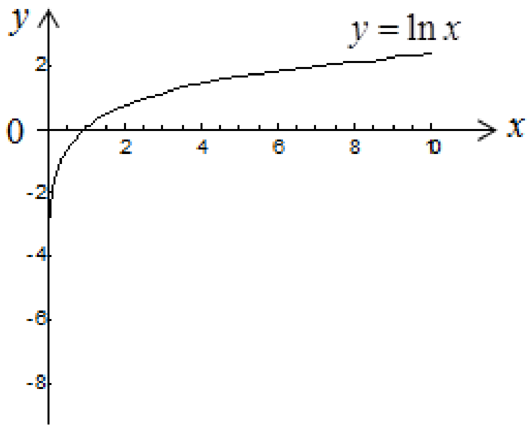
Найдем

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e\cdot 1 = e;\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{e}{1} = e;\ \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Число e является основанием натурального логарифма.

$\log_e x = \ln x = y$, т.е. $e^y = x$.

На рисунке представлен график функции $y = \ln x$.

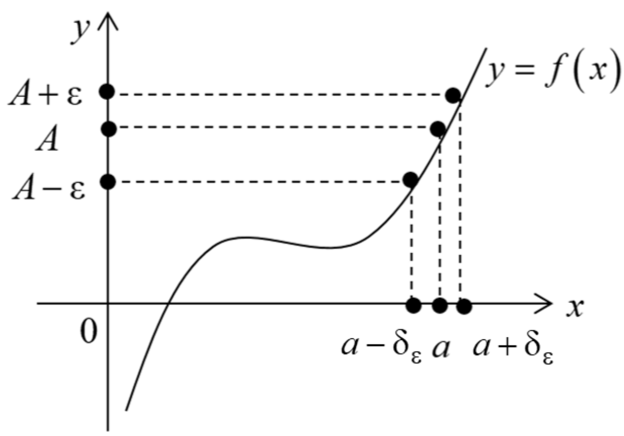


Связь натурального и десятичного логарифмов

Пусть $x = 10^y$, тогда $\ln x = \ln 10^y$, следовательно, $\ln x = y\ln 10$.

$y = \lg x = \dfrac{\ln x}{\ln 10} = M \ln x$; $\ln x = \dfrac{1}{M}\lg x$, где $M = 1/\ln 10 \approx 0{,}43429\ldots$ – модуль перехода.

Предел функции в точке



Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = a$ (т.е. в самой точке $x = a$ функция может быть и не определена).

Определение. Число A называется *пределом* функции $f(x)$ при $x \to a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta_\varepsilon > 0$, что для всех x, таких что

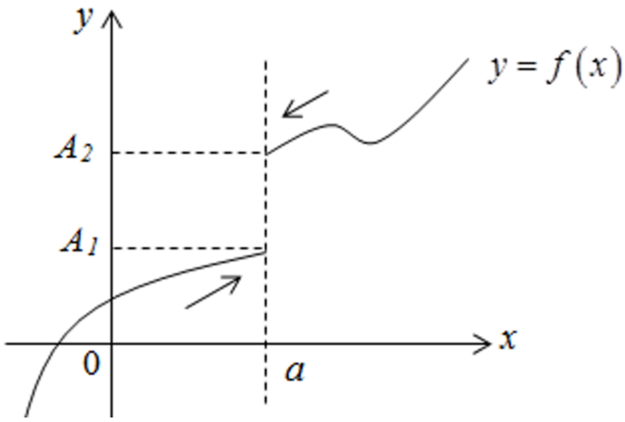
$$0 < |x - a| < \delta_\varepsilon,$$

верно неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

То же определение может быть записано в другом виде: если $a - \delta_\varepsilon < x < a + \delta_\varepsilon$, $x \neq a$, то верно неравенство $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.

Запись предела функции в точке: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Определение. Если $f(x) \to A_1$ при $x \to a$ только при $x < a$, то $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A_1$ называется *пределом* функции $f(x)$ в точке $x = a$ *слева*, а если $f(x) \to A_2$ при $x \to a$ только при $x > a$, то $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A_2$ называется *пределом* функции $f(x)$ в точке $x = a$ *справа*.



Приведенное выше определение относится к случаю, когда функция $f(x)$ не определена в самой точке $x = a$, но определена в некоторой сколь угодно малой окрестности этой точки.

Пределы A_1 и A_2 называются также *односторонними пределами* функции $f(x)$ в точке $x = a$. Также говорят, что A – *конечный предел* функции $f(x)$.

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ ПРИ СТРЕМЛЕНИИ АРГУМЕНТА К БЕСКОНЕЧНОСТИ

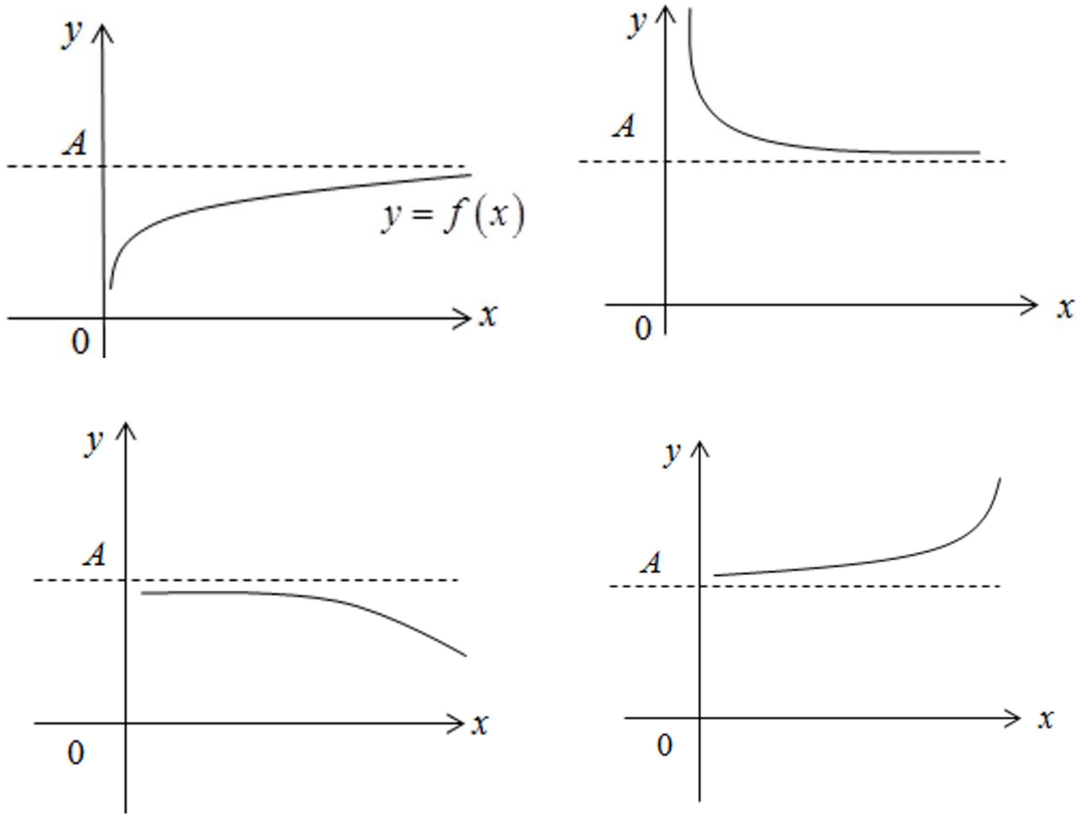
Определение. Число A называется *пределом* функции $f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $M > 0$, что для всех $|x| > M$ выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

При этом предполагается, что функция $f(x)$ определена в окрестности бесконечности.

Записывают: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

Графически можно представить как



Аналогично можно определить пределы $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ

Теорема 1. $\lim\limits_{x \to a} C = C$, где C = const.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы при $x \to a$.

Теорема 2. $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$.

Доказательство этой теоремы будет приведено ниже.

Теорема 3. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x).$

Следствие. $\lim\limits_{x\to a} C\cdot f(x)=C\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Теорема 4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ при $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$.

Теорема 5. *Если f(x)>0 вблизи точки x = a и* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, *то A > 0.*

Аналогично определяется знак предела при $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$.

Теорема 6. *Если g(x) ≤ f(x) ≤ u(x) вблизи точки x = a*
и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to a} u(x)=A$, *то и* $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)=A$.

Определение. Функция $f(x)$ называется *ограниченной* вблизи точки $x = a$, если существует такое число $M > 0$, что $|f(x)| < M$ вблизи точки $x = a$.

Теорема 7. *Если функция f(x) имеет конечный предел при x → a,*
то она ограничена вблизи точки x = a.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, т.е. $|f(x)-A|<\varepsilon$,

тогда $|f(x)|=|f(x)-A+A|\leq|f(x)-A|+|A|$

или $|f(x)|<\varepsilon+|A|$,

т.е. $|f(x)|<M$, где $M = \varepsilon + |A|$.

Теорема доказана.

БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ФУНКЦИИ

Определение. Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x\to a$, где a может быть числом или одной из величин ∞, $+\infty$ или $-\infty$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$.

Бесконечно малой функция может быть, только если указать, к какому числу стремится аргумент x. При различных значениях a функция может быть бесконечно малой или нет.

Пример. Функция $f(x) = x^n$ является бесконечно малой при $x\to 0$
и не является бесконечно малой при $x\to 1$, т.к. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$.

Теорема. *Для того чтобы функция $f(x)$ при $x \to a$ имела предел, равный A, необходимо и достаточно, чтобы вблизи точки $x = a$ выполнялось условие*

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to a$ ($\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$).

Свойства бесконечно малых функций:

1. Сумма фиксированного числа бесконечно малых функций при $x \to a$ тоже бесконечно малая функция при $x \to a$.
2. Произведение фиксированного числа бесконечно малых функций при $x \to a$ тоже бесконечно малая функция при $x \to a$.
3. Произведение бесконечно малой функции на функцию, ограниченную вблизи точки $x = a$, является бесконечно малой функцией при $x \to a$.
4. Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой не равен нулю, есть величина бесконечно малая.

Используя понятие бесконечно малых функций, приведем доказательство некоторых теорем о пределах, приведенных выше.

Доказательство теоремы 2.

Представим $f(x) = A + \alpha(x)$, $g(x) = B + \beta(x)$,

где $A = \lim\limits_{x \to a} f(x), B = \lim\limits_{x \to a} g(x)$,

тогда $f(x) \pm g(x) = (A + B) + \alpha(x) + \beta(x)$.

$A + B = \text{const}$, $\alpha(x) + \beta(x)$ – бесконечно малая,

значит, $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = A + B = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3.

Представим $f(x) = A + \alpha(x)$, $g(x) = B + \beta(x)$,

где $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, $B = \lim\limits_{x \to a} g(x)$,

тогда $f(x) \cdot g(x) = A \cdot B + A\beta(x) + \alpha(x)B + \alpha(x)\beta(x)$.

$A \cdot B = \text{const}$, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые,

значит, $\lim\limits_{x \to a}[f(x)g(x)] = A \cdot B + 0 = A \cdot B = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$.

Теорема доказана.

БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВЯЗЬ С БЕСКОНЕЧНО МАЛЫМИ

Определение. Предел функции $f(x)$ при $x \to a$, где a – число, *равен бесконечности*, если для любого числа $M > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что неравенство $|f(x)| > M$ выполняется при всех x, удовлетворяющих условию

$$0 < |x - a| < \delta.$$

Записывается $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

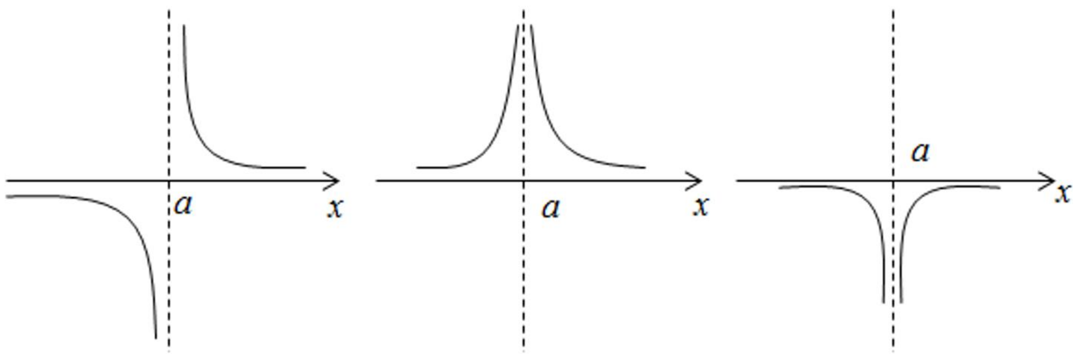
Собственно, если в приведенном выше определении заменить условие $|f(x)| > M$ на $f(x) > M$, то получим

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty,$$

а если заменить на $f(x) < M$, то

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

Графически приведенные выше случаи можно проиллюстрировать следующим образом:



Определение. Функция называется *бесконечно большой* при $x \to a$, где a – число или одна из величин ∞, $+\infty$ или $-\infty$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, где A – одна из величин ∞, $+\infty$ или $-\infty$.

Связь бесконечно больших и бесконечно малых функций осуществляется в соответствии со следующей теоремой.

Теорема. *Если $f(x) \to 0$ при $x \to a$ $(x \to \infty)$ и не обращается в ноль, то*

$$y = \frac{1}{f(x)} \to \infty.$$

СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to a$. Будем обозначать эти функции α, β и γ соответственно. Эти бесконечно малые функции можно сравнивать по быстроте их убывания, т.е. по быстроте их стремления к нулю.

Например, функция $f(x) = x^{10}$ стремится к нулю быстрее, чем функция $f(x) = x$.

Определение. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=0$, то функция α называется *бесконечно малой более высокого порядка*, чем функция β.

Определение. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=A,\ A\neq 0,\ A=\text{const}$, то функции α и β называются *бесконечно малыми одного порядка*.

Определение. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=1$, то функции α и β называются *эквивалентными бесконечно малыми*. Записывают $\alpha \sim \beta$.

Пример. Сравним бесконечно малые при $x \to 0$ функции $f(x) = x^{10}$ и $f(x) = x$.

$$\lim_{x\to a}\frac{x^{10}}{x}=\lim_{x\to a}x^9=0,$$

т.е. функция $f(x) = x^{10}$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем $f(x) = x$.

Определение. Бесконечно малая функция α называется *бесконечно малой порядка k* относительно бесконечно малой функции β, если предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta^k}$ конечен и отличен от нуля.

Однако следует отметить, что не все бесконечно малые функции можно сравнивать между собой. Например, если отношение $\dfrac{\alpha}{\beta}$ не имеет предела, то функции несравнимы.

Пример. Если $\alpha = x\sin x,\ \beta = x$, то при $x \to 0$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha}{\beta^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{x^2} = 1$, т.е. функция α – бесконечно малая второго порядка относительно функции β.

Пример. Если $\alpha = x\sin\dfrac{1}{x},\ \beta = x$, то при $x \to 0$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha}{\beta}$ не существует, т.е. функции α и β несравнимы.

СВОЙСТВА ЭКВИВАЛЕНТНЫХ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ

1) $\alpha \sim \alpha$, $\left(\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\alpha} = 1\right)$;

2) если $\alpha \sim \beta$ и $\beta \sim \gamma$, то $\alpha \sim \gamma$, $\left(\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\gamma} = \lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\dfrac{\beta}{\gamma}\right) = 1\cdot 1 = 1\right)$;

3) если $\alpha \sim \beta$, то $\beta \sim \alpha$, $\left(\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta}{\alpha} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{\dfrac{\alpha}{\beta}} = 1\right)$;

4) если $\alpha \sim \alpha_1$ и $\beta \sim \beta_1$ и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta} = k$,

то и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1}{\beta_1} = k$ или $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$.

Следствия:

а) если $\alpha \sim \alpha_1$ и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta} = k$, то и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1}{\beta}$;

б) если $\beta \sim \beta_1$ и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta} = k$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta_1}$.

Свойство (4) особенно важно на практике, т.к. оно фактически означает, что предел отношения бесконечно малых не меняется при замене их на эквивалентные бесконечно малые. Этот факт дает возможность при нахождении пределов заменять бесконечно малые на эквивалентные им функции, что может сильно упростить вычисление пределов.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}5x}{\sin 7x}$.

Так как tg $5x \sim 5x$ и $\sin 7x \sim 7x$ при $x \to 0$, то заменив функции эквивалентными бесконечно малыми, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg5x}{\sin 7x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{7x}=\frac{5}{7}.$$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{1-\cos x}$.

Так как $1 - \cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2} \sim 2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$ при $x\to 0$,

то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}2x=0.$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{\sin x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^2}=\infty.$

Если α и β – бесконечно малые при $x \to a$, причем β – бесконечно малая более высокого порядка, чем α, то $\gamma = \alpha + \beta$ – бесконечно малая, эквивалентная α. Это можно доказать следующим равенством:

$$\lim_{x\to a}\frac{\gamma}{\alpha}=\lim_{x\to a}\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)=1.$$

Тогда говорят, что α – *главная часть* бесконечно малой функции γ.

Пример. Функция $x^2 + x$ – бесконечно малая при $x \to 0$, x – главная часть этой функции. Чтобы показать это, запишем $\alpha = x^2$, $\beta = x$, тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0,\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x}=\lim_{x\to 0}(x+1)=1.$$

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

Найдем:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} +\ldots+a_n$,

$Q(x) = b_0x^m + b_1x_{m-1} +\ldots+b_m$ – многочлены.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{x^n(a_0+\frac{a_1}{x}+...+\frac{a_n}{x^n})}{x^m(b_0+\frac{b_1}{x}+....+\frac{b_m}{x^m})}=x^{n-m}\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+...+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+...+\frac{b_m}{x^m}}.$$

Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}0, & \text{при} \quad n<m,\\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{при} \quad n=m,\\ \infty, & \text{при} \quad n>m.\end{cases}$

Первый замечательный предел и его приложения

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\ \lim_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}x}{x}=1,\ \lim_{x\to0}\frac{\mathrm{arctg}x}{x}=1.$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e;\ \lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Часто, если непосредственное нахождение предела какой-либо функции представляется сложным, можно путем преобразования функции свести задачу к использованию замечательных пределов.

Кроме изложенных выше пределов можно записать следующие полезные на практике соотношения:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;\quad \lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a;\quad \lim_{x\to0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=m.$$

Пример. Вычислить следующие пределы:

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}mx}{\sin nx}=\lim_{x\to0}\frac{mx}{nx}=\frac{m}{n}.$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\mathrm{tg}x-\mathrm{tg}x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x-x_0)}{(x-x_0)\cos x\cos x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x-x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\cos x\cos x_0}=$$
$$=1\cdot\frac{1}{\cos^2 x_0}=\frac{1}{\cos^2 x_0}.$$

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{-\frac{2}{\sqrt{2}}\sin(\pi/4-x)}{\pi-4x}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{-\sin(\pi/4-x)}{2\sqrt{2}(\pi/4-x)}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{\pi-2x}=\left\{\begin{array}{l} y=\pi/2-x \\ x=\pi/2-y \\ \pi-2x=\pi-\pi+2y \end{array}\right\}=\lim_{y\to 0}\frac{\cos(\pi/2-y)}{2y}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3}=\left\{\begin{array}{l} y=x-1 \\ x\to\infty \\ y\to\infty \end{array}\right\}==\lim_{y\to\infty}\left(\frac{y+4}{y}\right)^{y+4}=$$

$$=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y}\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{4}=\left\{z=\frac{y}{4}\right\}=\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{4z}=\left(\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\right)^{4}=e^{4}.$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\left\{x^2-5x+6=(x-2)(x-3)\right\}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{3-2}{3+3}=\frac{1}{6}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+5n^2+n}{1-n-n^4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n^4+5n^2+n}{n^4}}{\dfrac{1-n-n^4}{n^4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n^4}{n^4}+5\dfrac{n^2}{n^4}+\dfrac{n}{n^4}}{\dfrac{1}{n^4}-\dfrac{n}{n^4}-\dfrac{n^4}{n^4}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+5\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}}{\dfrac{1}{n^4}-\dfrac{1}{n^3}-1}=\frac{1+5\dfrac{1}{\infty}+\dfrac{1}{\infty}}{\dfrac{1}{\infty}-\dfrac{1}{\infty}-1}=\frac{1+5\cdot 0+0}{0-0-1}=\frac{1}{-1}=-1.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-n^2-n^5}{n^3+3n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1-n^2-n^5}{n^5}}{\dfrac{n^3+3n^2+n+1}{n^5}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n^5}-\dfrac{n^2}{n^5}-\dfrac{n^5}{n^5}}{\dfrac{n^3}{n^5}+3\dfrac{n^2}{n^5}+\dfrac{n}{n^5}+\dfrac{1}{n^5}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n^5}-\dfrac{1}{n^3}-1}{\dfrac{1}{n^2}+3\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{1}{n^4}+\dfrac{1}{n^5}}=\frac{\dfrac{1}{\infty}-\dfrac{1}{\infty}-1}{\dfrac{1}{\infty}+3\dfrac{1}{\infty}+\dfrac{1}{\infty}+\dfrac{1}{\infty}}=\frac{0-0-1}{0+3\cdot 0+0+0}=\frac{-1}{0}=-\infty.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x^2+x-2}=\left(\frac{1-4+3}{1+1-2}=\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)\cdot(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x-2}=\frac{1-3}{1-2}=\frac{-2}{-1}=2.$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{3+2x}-3}{x-3}=\left(\frac{\sqrt{3+2\cdot 3}-3}{3-3}=\frac{\sqrt{9}-3}{0}=\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{3+2x}-3\right)\cdot\left(\sqrt{3+2x}+3\right)}{(x-3)\cdot\left(\sqrt{3+2x}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{3+2x}\right)^2-(3)^2}{(x-3)\cdot\left(\sqrt{3+2x}+3\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{3+2x-9}{(x-3)\cdot\left(\sqrt{3+2x}+3\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{2x-6}{(x-3)\cdot\left(\sqrt{3+2x}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)}{(x-3)\cdot\left(\sqrt{3+2x}+3\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{2}{\sqrt{3+2x}+3}=\frac{2}{\sqrt{3+2\cdot 3}+3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2}{n^2}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2}+\frac{2}{n^2}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{n^2}=\left(1^\infty\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{n^2}==\lim_{n\to\infty}\left(\left(\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{2}}\right)^{\frac{2}{n^2}}\right)^{n^2}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^2}\cdot n^2\right)}=e^2.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\left(\frac{1-\cos 0}{\sin^2 0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}\right)=\left[1-\cos x=2\cdot\sin^2\frac{x}{2}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2 x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{\sin x\cdot\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{x}\cdot\dfrac{x}{2}}{\dfrac{\sin x}{x}\cdot x\cdot\dfrac{\sin x}{x}\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot 1\cdot\frac{x}{2}\cdot 1\cdot\frac{x}{2}}{1\cdot x\cdot 1\cdot x}=\frac{1}{2}.$$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$.

Для нахождения этого предела разложим на множители числитель и знаменатель данной дроби.

$x^2 - 6x + 8 = 0$, $x^2 - 8x + 12 = 0$,
$D = 36 - 32 = 4$, $D = 64 - 48 = 16$,
$x_1 = (6 + 2)/2 = 4$, $x_1 = (8 + 4)/2 = 6$,
$x_2 = (6 - 2)/2 = 2$, $x_2 = (8 - 4)/2 = 2$.

Тогда $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-6)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-4}{x-6}=\dfrac{-2}{-4}=\dfrac{1}{2}$.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$.

Домножим числитель и знаменатель дроби на сопряженное выражение числителя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x+x^2-1+x-x^2}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=$$
$$=\frac{2}{-1\cdot(1+1)}=-1.$$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$.

Разложим числитель и знаменатель на множители:

$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$,
$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3)$,
т.к.

$$\begin{array}{r|l}
x^3-6x^2+11x-6 & x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3-x^2} & x^2-5x+6 \\
-5x^2+11x-6 & \\
\underline{-5x^2+5x} & \\
6x-6 & \\
\underline{6x-6} & \\
0 &
\end{array}$$

$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$.

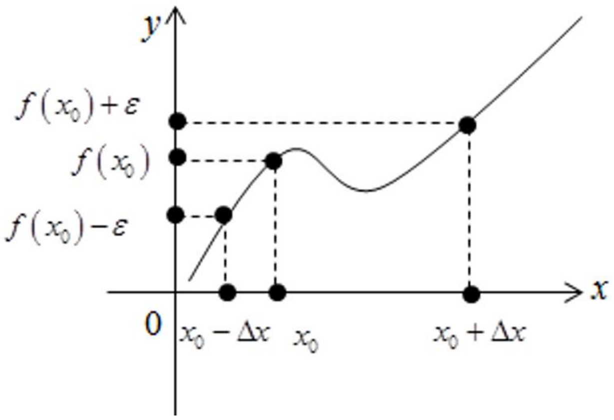
Тогда $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)}=-2$.

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

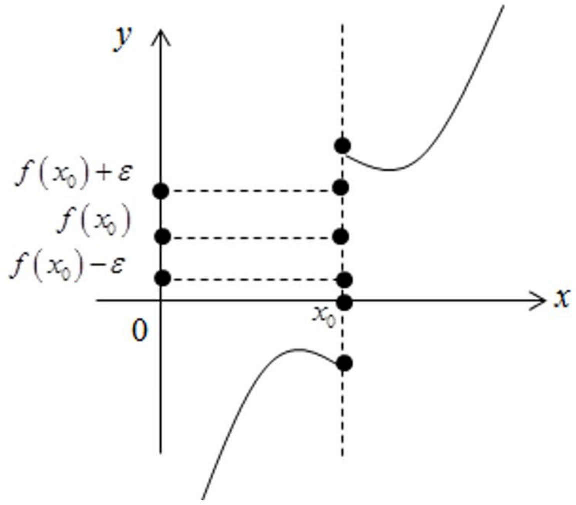
Определение. Функция $f(x)$, определенная в окрестности некоторой точки x_0, называется *непрерывной в точке* x_0, если предел функции и ее значение в этой точке равны, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Тот же факт можно записать иначе: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$.



Определение. Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, но не является непрерывной в самой точке x_0, то она называется *разрывной* функцией, а точка x_0 – точкой разрыва.



Определение. Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для любых x, удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \delta,$$

верно неравенство $$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Определение. Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке $x = x_0$, если приращение функции в точке x_0 является бесконечно малой величиной.

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.

СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Сумма, разность и произведение функций, непрерывных в точке x_0, есть функция, непрерывная в точке x_0.

2. Частное двух непрерывных функций $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ есть непрерывная функция при условии, что $g(x)$ не равна нулю в точке x.

3. Суперпозиция непрерывных функций есть непрерывная функция.

Это свойство может быть записано следующим образом.

Если $u = f(x)$, $v = g(u)$ – непрерывные функции в точке $x = x_0$, то функция $v = g(f(x))$ – тоже непрерывная функция в этой точке.

Справедливость приведенных выше свойств можно легко доказать, используя теоремы о пределах.

Непрерывность некоторых элементарных функций

1. Функция $f(x) = C$, где $C = \text{const}$ – непрерывная функция на всей области определения.

2. Рациональная функция $f(x) = \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_m}$ непрерывна для всех значений x, кроме тех, при которых знаменатель обращается в ноль. Таким образом, функция этого вида непрерывна на всей области определения.

3. Тригонометрические функции непрерывны на своей области определения.

Докажем свойство (3) для функции $y = \sin x$.

Запишем приращение функции $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$ или после преобразования:

$$\Delta y = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2},$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 2\lim_{\Delta x \to 0}\left(\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}\right) = 0.$$

Действительно, имеется предел произведения двух функций $\cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)$ и $\sin\dfrac{\Delta x}{2}$. При этом функция косинус – ограниченная функция,

$\left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right| \le 1$. Предел функции синус $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sin\frac{\Delta x}{2} = 0$, поэтому она бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

Таким образом, имеется произведение ограниченной функции на бесконечно малую, следовательно, функция Δy – бесконечно малая. В соответствии с рассмотренными выше определениями функция $y = \sin x$ – непрерывная функция для любого значения $x = x_0$ из области определения, т.к. ее приращение в этой точке – бесконечно малая величина.

Аналогично можно доказать непрерывность остальных тригонометрических функций на всей области определения.

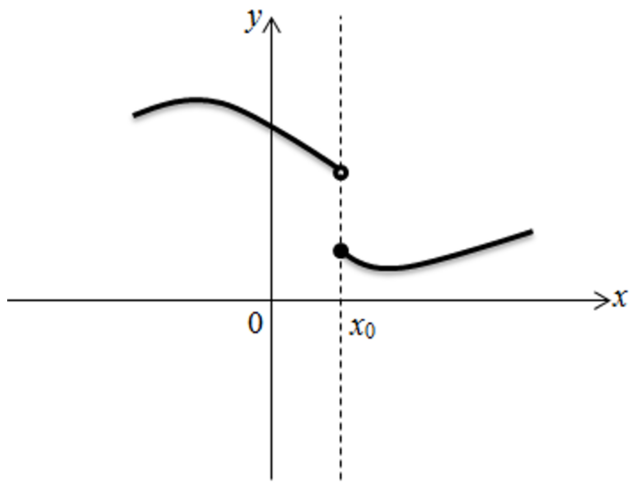
Вообще следует заметить, что все основные элементарные функции непрерывны на всей своей области определения.

ТОЧКИ РАЗРЫВА И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

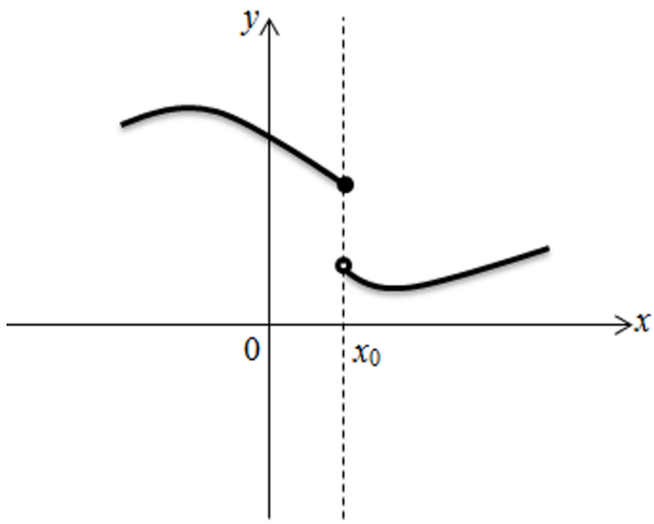
Рассмотрим некоторую функцию $f(x)$, непрерывную в окрестности точки x_0 за исключением может быть самой этой точки. Из определения точки разрыва функции следует, что $x = x_0$ является точкой разрыва, если функция не определена в этой точке или не является в ней непрерывной.

Следует отметить также, что непрерывность функции может быть односторонней. Поясним это следующим образом.

Если односторонний предел $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной справа.



Если односторонний предел $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной слева.



Определение. Точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$, если $f(x)$ не определена в точке x_0 или не является непрерывной в этой точке.

Определение. Точка x_0 называется *точкой разрыва 1- го рода,* если в этой точке функция $f(x)$ имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы.

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0-0} f(x).$$

Для выполнения условий этого определения не требуется, чтобы функция была определена в точке $x = x_0$, достаточно того, что она определена слева и справа от нее.

Из определения можно сделать вывод, что в точке разрыва 1-го рода функция может иметь только конечный скачок. В некоторых частных случаях точку разрыва 1-го рода еще иногда называют *устранимой* точкой разрыва, но подробнее об этом поговорим ниже.

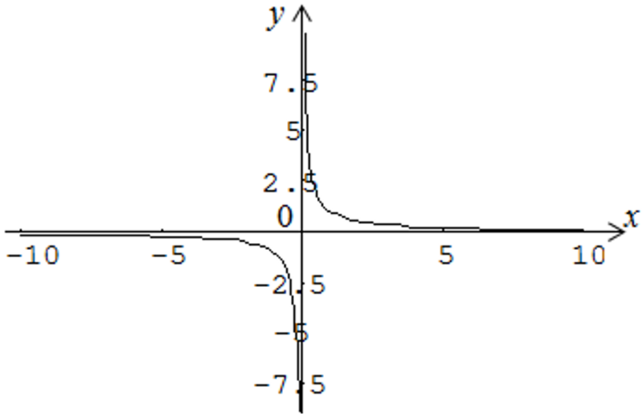
Определение. Точка x_0 называется *точкой разрыва 2-го рода,* если в этой точке функция $f(x)$ не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или хотя бы один из них бесконечен.

Пример. Функция Дирихле (Дирихле Петер Густав (1805–1859), немецкий математик, член-корреспондент Петербургской АН, 1837)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x - \text{рациональное число,} \\ 0, & x - \text{иррациональное число,} \end{cases}$$

не является непрерывной в любой точке x_0.

Пример. Найдем точки разрыва для функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$.



Функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ имеет в точке $x_0 = 0$ точку разрыва 2-го рода, т.к. $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = -\infty$.

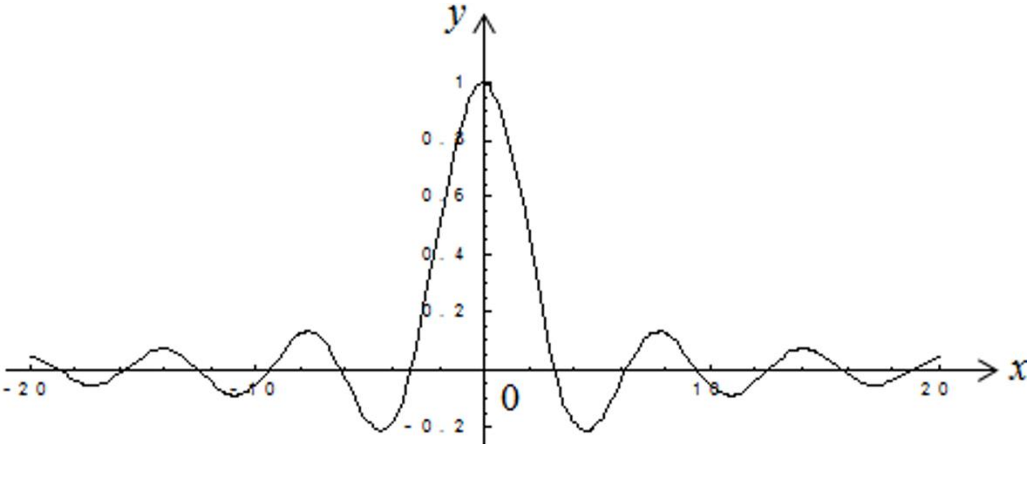
Пример. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

Функция не определена в точке $x = 0$, но имеет в ней конечный предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, т.е. в точке $x = 0$ функция имеет точку разрыва 1-го рода. Это устранимая точка разрыва, т.к. если доопределить функцию следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{при} \quad x \neq 0, \\ 1, & \text{при} \quad x = 0, \end{cases}$$

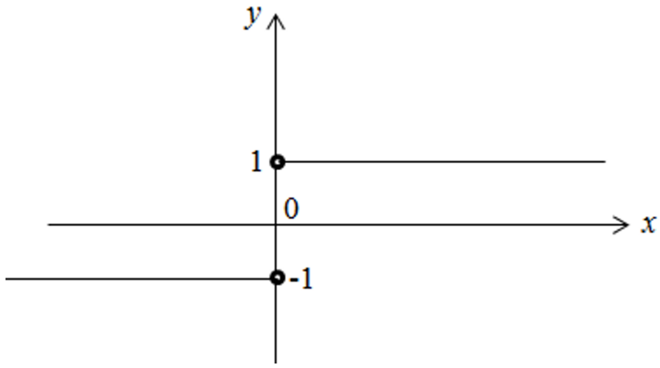
она станет непрерывной.

График этой функции:



Пример. $f(x) = \dfrac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad x > 0, \\ -1, & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$

Эта функция также обозначается sig $n(x)$ – знак x. В точке $x = 0$ функция не определена. Т.к. левый и правый пределы функции различны, то точка разрыва – 1-го рода. Если доопределить функцию в точке $x = 0$, положив $f(0) = 1$, то функция будет непрерывна справа. Если положить $f(0) = -1$, то функция будет непрерывной слева. Если положить $f(x)$, равное какому-либо числу, отличному от 1 или -1, то функция не будет непрерывна ни слева, ни справа, но во всех случаях тем не менее будет иметь в точке $x = 0$ разрыв 1-го рода. В этом примере точка разрыва 1-го рода не является устранимой.



Таким образом, для того чтобы точка разрыва 1-го рода была устранимой, необходимо, чтобы односторонние пределы справа и слева были конечны и равны, а функция в этой точке не определена.

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ НА ИНТЕРВАЛЕ И НА ОТРЕЗКЕ

Определение. Функция $f(x)$ называется *непрерывной на интервале (отрезке)*, если она непрерывна в любой точке интервала (отрезка).

При этом не требуется непрерывность функции на концах отрезка, необходима только односторонняя непрерывность на его концах.

СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ НА ОТРЕЗКЕ

Свойство 1. (**Первая теорема Вейерштрасса** (Карл Вейерштрасс (1815–1897), немецкий математик)). Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке, т.е. на отрезке $[a, b]$ выполняется условие $-M \le f(x) \le M$.

Свойство 2. Функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, принимает на нем наибольшее и наименьшее значения.

Т.е. существуют такие значения x_1 и x_2, что $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$, причем

$$m \le f(x) \le M.$$

Отметим, что эти наибольшие и наименьшие значения функция может принимать на отрезке и несколько раз (например, $f(x) = \sin x$).

Разность между наибольшим и наименьшим значениеями функции на отрезке называется *колебанием* функции на отрезке.

Свойство 3. (**Вторая теорема Больцано – Коши**). Функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, принимает на этом отрезке все значения между двумя произвольными величинами.

(Бернард Больцано (1781–1848), чешский математик; Огюстен Луи Коши (1789–1857), французский математик)

Свойство 4: Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, то существует некоторая окрестность точки x_0, в которой функция сохраняет знак.

Свойство 5. (**Первая теорема Больцано – Коши**). Если функция $f(x)$ непрерывная на отрезке $[a, b]$ и имеет на концах отрезка значения противоположных знаков, то существует такая точка внутри этого отрезка, где $f(x) = 0$.

Т.е. если $\mathrm{sign}(f(a)) \ne \mathrm{sign}(f(b))$, то $\exists\, x_0$: $f(x_0) = 0$.

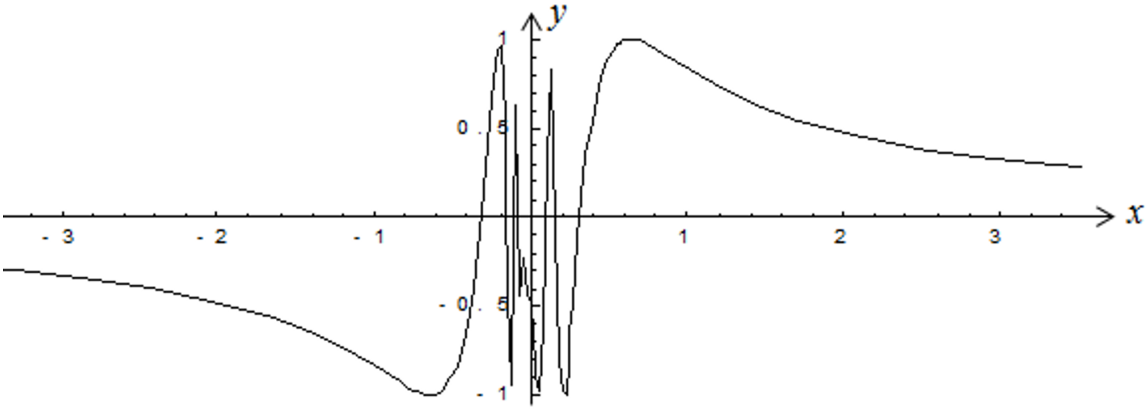
Определение. Функция $f(x)$ называется *равномерно непрерывной* на отрезке $[a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых точек $x_1 \in [a, b]$ и $x_2 \in [a, b]$, таких что $|x_2 - x_1| < \delta$, верно неравенство $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$.

Отличие равномерной непрерывности от «обычной» в том, что для любого ε существует свое δ, не зависящее от x, а при «обычной» непрерывности δ зависит от ε и x.

Свойство 6. Теорема Кантора (Георг Кантор (1845–1918), немецкий математик). Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем.

(Это свойство справедливо только для отрезков, а не для интервалов и полуинтервалов.)

Пример. $y = \sin\frac{1}{x}$.



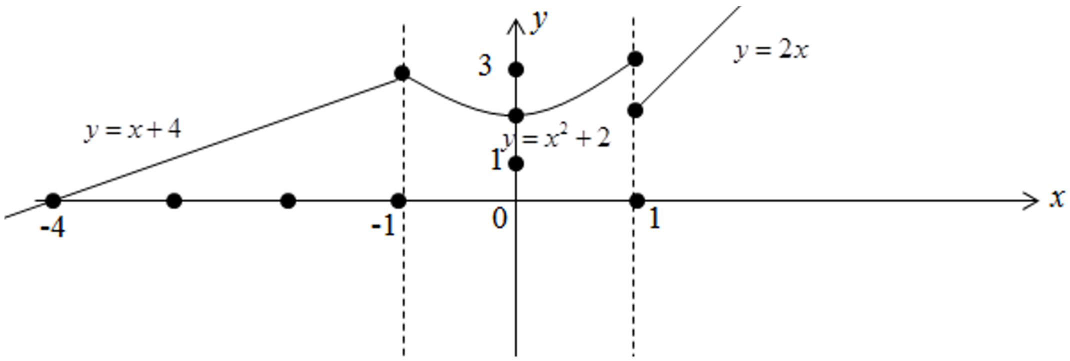
Функция $y = \sin\frac{1}{x}$ непрерывна на интервале $(0, a)$, но не является на нем равномерно непрерывной, т.к. существует такое число $\delta > 0$, что существуют значения x_1 и x_2, что $|f(x_1) - f(x_2)| > \varepsilon$, ε – любое число при условии, что x_1 и x_2 близки к нулю.

Свойство 7. Если функция $f(x)$ определена, монотонна и непрерывна на некотором промежутке, то и обратная ей функция $x = g(y)$ тоже однозначна, монотонна и непрерывна.

Пример. Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть.

$$f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1, \\ x^2+2, & -1 \le x \le 1, \\ 2x, & x \ge 1. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = 3, \qquad \lim_{x\to 1-0} f(x) = 3,$$
$$\lim_{x\to -1+0} f(x) = 3, \qquad \lim_{x\to 1+0} f(x) = 2.$$

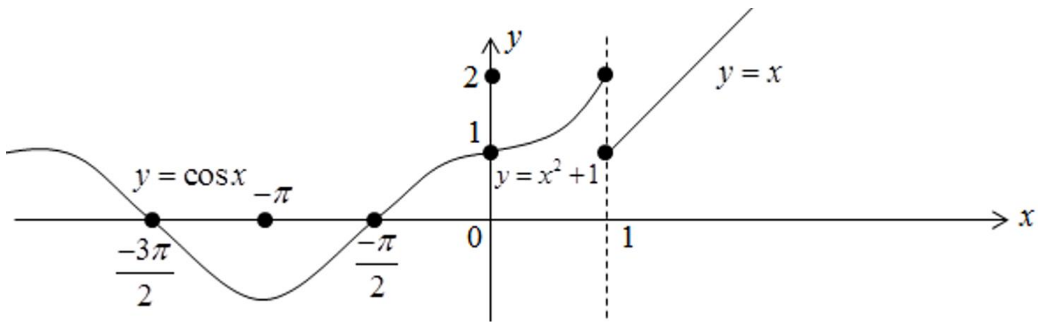


Ответ: в точке x = -1 функция непрерывна; в точке x = 1 разрыв 1-го рода.

Пример. Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть.

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le 0,\\ x^2+1, & 0<x<1,\\ x, & x\ge 1.\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=1, \qquad \lim_{x\to 1-0} f(x)=2,$$
$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=1, \qquad \lim_{x\to 1+0} f(x)=1.$$



Ответ: в точке x = 0 функция непрерывна; в точке x = 1 разрыв 1-го рода.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Практическое занятие № 1

Полярная система координат

Она задается полярной осью *OP*, на которой указаны начало отсчета *O* и единица масштаба.

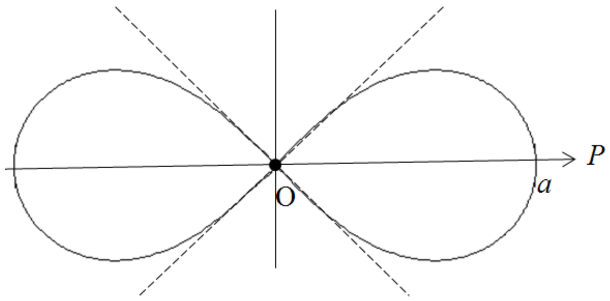
В полярной системе всякая точка *M* имеет две координаты: расстояние ρ от полюса *O* до точки *M*, то есть $\rho = \left|\overline{OM}\right|$, и угол φ, который образует радиус-вектор $\overline{OM}$ с осью *OP*. Числа ρ и φ называются *полярными координатами* точки *M*. Они изменяются в границах $0 \le \rho < +\infty$, $-\infty < \varphi < +\infty$.

Если полярную систему координат естественным образом совместить с декартовой системой *XOY*, то $x = \rho \cdot \cos\varphi$, $y = \rho \cdot \sin\varphi$. Это формулы, с помощью которых можно перейти от декартовых координат к полярным. Из этих формул следует, что $x^2 + y^2 = \rho^2$. Таким образом, полярные координаты выгодны в тех случаях, когда уравнение линии $L: F(x, y) = 0$ содержит выражение $x^2 + y^2$.

Пример. Уравнение кривой $L: (x^2 + y^2) = a^2(x^2 - y^2)$ записать в полярных координатах.

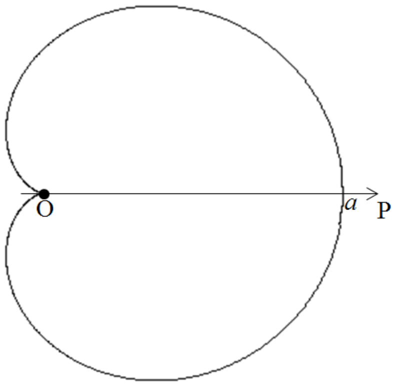
Здесь $\left(x^2 + y^2\right)^2 = \rho^4$, $x^2 - y^2 = \rho^2\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) = \rho^2 \cos 2\varphi$.

Поэтому $\rho^4 = a^2 \cdot \rho^2 \cdot \cos 2\varphi$, или $\rho^2 = a^2 \cdot \cos 2\varphi$. Эта кривая называется лемнискатой Бернулли.



Пример. Построить кривую $\rho = a\left(1 + \cos\varphi\right)$. Эта кривая называется кардиоидой. Строим таблицу значений, придавая аргументу φ значения $0 ... 2\pi$ с постоянным шагом $h = \pi / 4$.

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	…	2π
ρ	$2a$	$1{,}7a$	a	$0{,}3a$	0	…	$2a$



Кривые, заданные параметрически

Линию L на плоскости XOY можно рассматривать как траекторию движущейся точки M (x, y). При этом ее координаты x и y изменяются в зависимости от некоторого параметра t. Обычно в качестве параметра t выступает либо время движения, либо угол поворота. Таким образом, параметрические уравнение линии L имеют следующий вид: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, где $\alpha \le t \le \beta$.

Пример. Построить линию, заданную параметрически, и записать ее уравнение в декартовой системе координат:

$$\begin{cases} x = a\cdot\cos^3 t, \\ y = a\cdot\sin^3 t. \end{cases}$$

1. Составим таблицу значений заданной линии:

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$	$\frac{4\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{6\pi}{6}=\pi$	…	2π
x	a	$\frac{a\cdot 3\sqrt{3}}{8}\approx 0{,}65a$	$0{,}125a$	0	$0{,}125a$	$-0{,}65a$	$-a$		a
y	0	$\frac{a}{8}=0{,}125a$	$0{,}65a$	a	$0{,}65a$	$0{,}125a$	0		0

Выбираем шаг, равный $h=\frac{\pi}{6}$, начальное значение $t=0$, и подставляем в уравнение функции:

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos^3 0 = a \cdot (\cos 0)^3 = a \cdot (1)^3 = a \cdot 1 = a, \\ y = a \cdot \sin^3 t = a \cdot (\sin 0)^3 = a \cdot (0)^3 = a \cdot 0 = 0. \end{cases}$$

Полученные данные заносим в таблицу.

Следующее значение $t = 0 + h = 0 + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6}$.

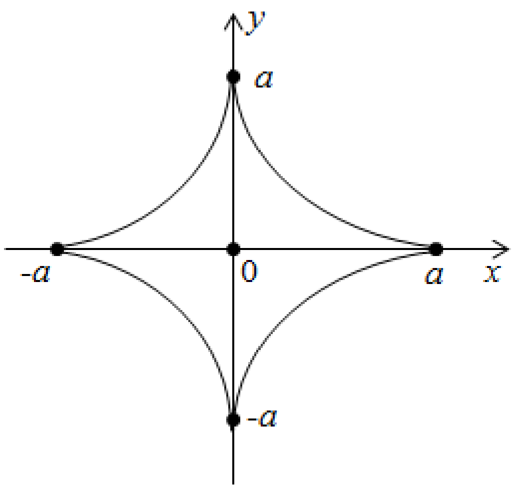
$$\begin{cases} x = a \cdot \cos^3 \dfrac{\pi}{6} = a \cdot \left(\cos \dfrac{\pi}{6} \right)^3 = a \cdot \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 = a \cdot \dfrac{3\sqrt{3}}{8} = a \cdot 0,6495 \approx 0,65a, \\ y = a \cdot \sin^3 \dfrac{\pi}{6} = a \cdot \left(\sin \dfrac{\pi}{6} \right)^3 = a \cdot \left(\dfrac{1}{2} \right)^3 = a \cdot \dfrac{1}{8} = 0,125a. \end{cases}$$

Следующее значение $t = \dfrac{\pi}{6} + h = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$.

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos^3 \dfrac{\pi}{6} = a \cdot \left(\cos \dfrac{\pi}{3} \right)^3 = a \cdot \left(\dfrac{1}{2} \right)^3 = a \cdot \dfrac{1}{8} = 0,125a, \\ y = a \cdot \sin^3 \dfrac{\pi}{6} = a \cdot \left(\sin \dfrac{\pi}{3} \right)^3 = a \cdot \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 = a \cdot \dfrac{3\sqrt{3}}{8} = a \cdot 0,6495 \approx 0,65a. \end{cases}$$

Выполняем действия до получения значения $t = 2\pi$.

2. В декартовой прямоугольной системе координат, используя значения x и y из таблицы, построим полученные точки и соединим их плавной линией, которую принято называть *астроидой*.



3. Составим уравнение астроиды в декартовой системе координат. Выразим из параметрических уравнений:

$$\begin{cases} x = a\cdot\cos^3 t \\ y = a\cdot\sin^3 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos^3 t = \dfrac{x}{a} \\ \sin^3 t = \dfrac{y}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos t = \left(\dfrac{x}{a}\right)^{1/3} \\ \sin t = \left(\dfrac{y}{a}\right)^{1/3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 t = \left(\dfrac{x}{a}\right)^{2/3} \\ \sin^2 t = \left(\dfrac{y}{a}\right)^{2/3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2 t + \sin^2 t = \left(\frac{y}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} \Rightarrow 1 = \left(\frac{y}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} \Rightarrow \left(\frac{y}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} = 1.$$

Тогда $\left(\dfrac{y}{a}\right)^{2/3} + \left(\dfrac{x}{a}\right)^{2/3} = 1$, или $y^{2/3} + x^{2/3} = a^{2/3}$.

Таким образом, в рассмотренном примере t – угол поворота радиуса-вектора движущейся точки. Астроиду описывает точка, лежащая на окружности радиусом $a/2$, при ее движении внутри окружности радиусом a.

Задания для самостоятельной работы

1. Найдите полярные координаты точек $A(0;4)$, $B(8;8)$.

Ответ: $A(4;\dfrac{\pi}{2})$, $B(8\sqrt{2};\dfrac{\pi}{4})$.

2. Зная полярные координаты точек $A\left(4;\dfrac{\pi}{2}\right)$, $B\left(4;\dfrac{5\pi}{3}\right)$, постройте их в полярной системе координат и найдите координаты этих точек в соответствующей прямоугольной системе координат.

Ответ: $A(0;4)$, $B(2;-2\sqrt{3})$.

3. Построить кривую: $\rho = 2\sin 5\varphi$.

4. Построить следующую линию, заданную параметрически. Записать ее уравнение в декартовой системе координат.

$$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = 5(1+\cos t). \end{cases}$$

Домашнее задание

1. Построить следующую линию, заданную параметрически,

$$\begin{cases} x = \dfrac{5}{\cos t}, \\ y = \operatorname{tg} t. \end{cases}$$

Записать ее уравнение в декартовой системе координат.

Ответ: $\frac{x^2}{25} - y^2 = 1.$

2. Построить фигуру, ограниченную кривыми $\rho = 3\sin\varphi$ и $y = 4x$.

3. Записать уравнение линии $\left(x^2 + y^2\right)^{3/2} = 4 \cdot \left(x^2 - 3y^2\right)$ в полярных координатах.

4. Выяснить, какая линия определяется параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos t, \\ y = a \cdot \sin t, \\ z = bt. \end{cases}$$

Практическое занятие № 2

Обучающий пример

1.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^8+7n^2+n}{n^6-3-n^4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n^8+7n^2+n}{n^8}}{\dfrac{n^6-3-n^4}{n^8}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n^8}{n^8}+7\dfrac{n^2}{n^8}+\dfrac{n}{n^8}}{\dfrac{n^6}{n^8}-\dfrac{3}{n^8}-\dfrac{n^4}{n^8}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+7\dfrac{1}{n^6}+\dfrac{1}{n^7}}{\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{3}{n^8}-\dfrac{1}{n^4}}=\frac{1+7\dfrac{1}{\infty}+\dfrac{1}{\infty}}{\dfrac{1}{\infty}-\dfrac{3}{\infty}-\dfrac{1}{\infty}}=\frac{1+5\cdot 0+0}{0-0-0}=\frac{1}{0}=\infty.$$

2.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!+n!}{n!}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)!+n!}{(n+1)!}}{\dfrac{n!}{(n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)!}+\dfrac{n!}{(n+1)!}}{\dfrac{n!}{(n+1)!}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{n!}{n!\cdot(n+1)}}{\dfrac{n!}{n!\cdot(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{(n+1)}}{\dfrac{1}{(n+1)}}=\frac{1+\dfrac{1}{\infty}}{\dfrac{1}{\infty}}=\frac{1+0}{0}=\frac{1}{0}=\infty\,.$$

Решить самостоятельно

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10^{n+1}+9^{n+1}}{8^n+10^n}.$ **Ответ:** 10.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11+3x^2}{5x+2x^2-1}.$ **Ответ:** $\dfrac{3}{2}$.

Обучающий пример

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{2x^2-x-6}=\left(\frac{2^2-4}{2\cdot 2^2-2-6}=\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{2(x-2)\left(x+3/2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{2\left(x+3/2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{2x+3}=\frac{2+2}{2\cdot 2+3}=\frac{4}{7}\,.$$

Решить самостоятельно

1. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^2+3x-2}{3x^2+2x-8}$. **Ответ:** 1.

2. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{3x^2+2x-1}$. **Ответ:** $\dfrac{1}{2}$.

Обучающий пример

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{2-x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}{\left(\sqrt{2-x}-1\right)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}{\left(\sqrt{2-x}\right)^2-1^2}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}{\left(\sqrt{2-x}\right)^2-1^2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}{2-x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}{1-x}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}{1-x}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}{-(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2-x}+1}{-1}=$$

$$=-\left(\sqrt{2-1}+1\right)=-2.$$

Решить самостоятельно

1. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{x+4}-1}{\sqrt{3-2x}-3}$. **Ответ:** $-\dfrac{3}{2}$.

2. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{2+x}-1}{\sqrt{8-x}-3}$. **Ответ:** -3.

Обучающий пример

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos8x}{1-\cos6x}=\left(\frac{1-\cos(8\cdot0)}{1-\cos(6\cdot0)}=\frac{1-\cos0}{1-\cos0}=\frac{1-1}{1-1}=\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\begin{bmatrix}1-\cos\alpha=2\cdot\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)^2\\ 1-\cos8x=2\cdot(\sin4x)^2\\ 1-\cos6x=2\cdot(\sin3x)^2\end{bmatrix}=\lim_{x\to0}\frac{2\cdot(\sin4x)^2}{2\cdot(\sin3x)^2}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\dfrac{\sin4x}{4x}\right)^2\cdot16x^2}{\left(\dfrac{\sin3x}{3x}\right)^2\cdot9x^2}=$$

$$=\left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1^2\cdot 16x^2}{1^2\cdot 9x^2}=\frac{16}{9}.$$

Решить самостоятельно

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{\cos x}$. **Ответ:** 0.
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\operatorname{arctg} x}$. **Ответ:** 5.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}$. **Ответ:** $\dfrac{1}{4}$.

Обучающий пример

$$\lim_{x\to 0}(1+8x)^{\frac{1}{x}}=\left[(1+8\cdot 0)^{1/0}=(1+0)^{1/0}=1^{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}\left(\left((1+8x)^{1/8x}\right)^{8x}\right)^{\frac{1}{x}}=$$

$$=\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e\right]=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(8x\cdot\frac{1}{x}\right)}=e^8.$$

Решить самостоятельно

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+9}\right)^{x-2}$. **Ответ:** e^{-12}.
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8x+1}{3x+7}\right)^{3x-1}$. **Ответ:** $\begin{cases}+\infty, \text{ если } x\to+\infty,\\ 0, \text{ если } x\to-\infty.\end{cases}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+3)\left[\ln(x+2)-\ln x\right]$. **Ответ:** 4.

Домашнее задание

Вычислить:

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+1}{4x^2-5x+1}$. **Ответ:** 0,3.
2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$. **Ответ:** -4.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x-1}{x^2+5x+3}$. **Ответ:** 1.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+1}{5+x^2+x^3}$. **Ответ:** 2.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+7}{x^2+3x+10}$. **Ответ:** 0.

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$. **Ответ:** $\dfrac{1}{6}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 10x}{2x}$. **Ответ:** 5.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{\sin 10x}$. **Ответ:** $\dfrac{4}{5}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{x}}$. **Ответ:** e^5.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+1}\right)^x$. **Ответ:** e^4.

Практическое занятие № 3

Таблица эквивалентности

Из первого и второго замечательных пределов и их следствий следует, что если $\alpha(x)\to 0$ при $x\to x_0$, то

$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$ $\operatorname{tg}\alpha(x)\sim\alpha(x)$ $1-\cos\alpha(x)\sim\dfrac{(\alpha(x))^2}{2}$ $\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$ $\operatorname{arctg}\alpha(x)\sim\alpha(x)$	$e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$ $a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\cdot\ln a$ $\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$ $\log_a(1+\alpha(x))\sim\dfrac{\alpha(x)}{\ln a}$

Решить самостоятельно

1. $3x+x^3 \underset{x\to 0}{\sim}$. **Ответ:** $3x$.
2. $x^2\operatorname{tg}x \underset{x\to 0}{\sim}$. **Ответ:** x^3.
3. $\sqrt{x}+\sin x \underset{x\to 0}{\sim}$. **Ответ:** $\sqrt{x}$.
4. $\operatorname{tg}x+2x \underset{x\to 0}{\sim}$. **Ответ:** $3x$.
5. $1-\cos 5x \underset{x\to 0}{\sim}$. **Ответ:** $\dfrac{25x^2}{2}$.
6. $e^{2x}-1 \underset{x\to 0}{\sim}$. **Ответ:** $2x$.
7. $\ln\left(5x^2+3x+1\right) \underset{x\to 0}{\sim}$. **Ответ:** $3x$.

Обучающий пример

Исследовать на непрерывность $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \dfrac{\pi}{2}<x<\pi,\\ 2, & x\ge\pi.\end{cases}$

1) Внутри промежутков определения функция представлена непрерывными функциями.

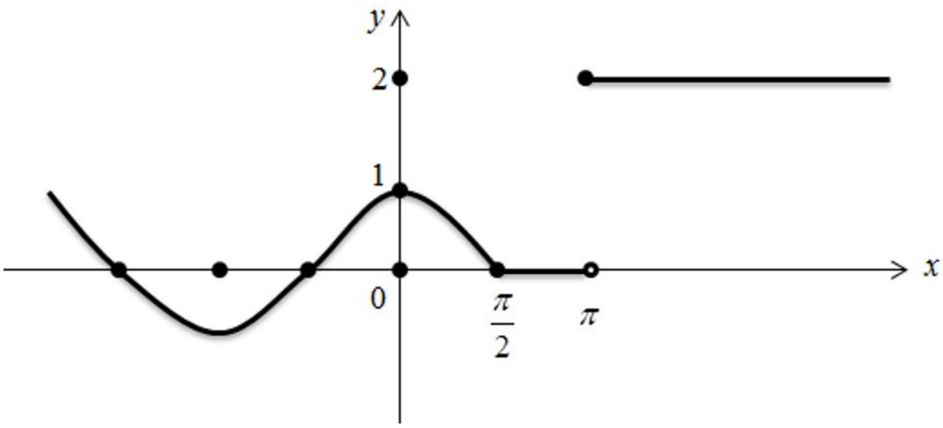
Значит, возможными точками разрыва могут быть $x=\frac{\pi}{2}$; $x=\pi$.

2) имеем:
$$\left.\begin{array}{l} f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}-0 \\ x<\frac{\pi}{2}}} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\cos x=0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}+0 \\ x>\frac{\pi}{2}}} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0} 0=0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

при $x=\frac{\pi}{2}$ функция непрерывна.

3)
$$\left.\begin{array}{l} f(\pi)=2 \\ \lim\limits_{\substack{x\to\pi-0 \\ x<\pi}} f(x)=\lim\limits_{x\to\pi-0} 0=0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to\pi+0 \\ x>\pi}} f(x)=\lim\limits_{x\to\pi+0} 2=2 \end{array}\right] \quad 0\neq 2 \quad \Rightarrow$$

при $x=\pi$ функция терпит разрыв 1-го рода.



Домашнее задание

1. Исследовать функцию на непрерывность

$$F(x)=\begin{cases} 1-x, x\in(-\infty;0], \\ \dfrac{1}{x}, x\in(0;2), \\ \dfrac{x}{4}, x\in[2;+\infty). \end{cases}$$

Ответ: при $x=0$ функция терпит разрыв 2-го рода, при $x=2$ функция непрерывна.

2. Вычислить с помощью эквивалентных:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{x^2}$; **Ответ:** $\dfrac{1}{4}$.

2) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}(6x-3)}{\sin(2x-1)}$; **Ответ:** 3.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{\sin 7x}$; **Ответ:** 0.

4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{e^{x+1}-1}{2x+2}$; **Ответ:** $\dfrac{1}{2}$.

ПРИМЕРНЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Функция $f(x)$ называется четной для всех x из области определения, если:

1) $f(-x)=f(2x)$;
2) $f(-x)=f(x^2)$;
3) $f(-x)=f(x)$;
4) $f(-x)\neq f(x)\neq -f(x)$;
5) $f(-x)=-f(x)$.

2. Функция $f(x)$ называется нечетной для всех x из области определения, если:

1) $f(-x)=f(2x)$;
2) $f(-x)=f(x^2)$;
3) $f(-x)=f(x)$;
4) $f(-x)\neq f(x)\neq -f(x)$;
5) $f(-x)=-f(x)$.

3. Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x\to a$, если:

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq\infty$;
2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq 0$;
3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$;
4) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$;
5) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=a$.

4. Функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x\to a$, если:

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq\infty$;
2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq 0$;
3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$;
4) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$;
5) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=a$.

5. Неверное свойство пределов: если существуют $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, то

1) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a} g(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to a} C=0$, где $C=const$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ при $g(x)\neq 0$;

4) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)$;

5) $\lim\limits_{x\to a}\left(k\cdot f(x)\right)=k\cdot\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

6. Первый замечательный предел:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=e$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

7. Второй замечательный предел:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=e$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=1$.

ТРЕХУРОВНЕВЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ К РАЗДЕЛУ «ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

Уровень I

I. Вычислить:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$; **Ответ:** 0.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{n+1}+3^{n+1}}{5^n+3^n}$; **Ответ:** 5.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x^2-6}{2x^4-x+2}$; **Ответ:** 1,5.

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7-3x}{5x^3+2x^2-1}$; **Ответ:** 0.

5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-x-6}$; **Ответ:** $\dfrac{1}{7}$

6) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$; **Ответ:** $\dfrac{1}{10}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$; **Ответ:** $\dfrac{2}{3}$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\operatorname{arctg} x}$; **Ответ:** 5.

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 8x}$; **Ответ:** $\dfrac{1}{4}$.

10) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$; **Ответ:** e^2.

11) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+3)\left[\ln(x+2)-\ln x\right]$. **Ответ:** 4.

II. Для заданных функций найти эквивалентные в соответствующем процессе величины:

1) $20+5x-8x^2+5x^3 \underset{x\to\infty}{\sim}$; **Ответ:** $5x^3$.

2) $3x+x^3 \underset{x\to 0}{\sim}$; **Ответ:** $3x$.

3) $x^2\operatorname{tg} x \underset{x\to 0}{\sim}$; **Ответ:** x^3.

4) $\sqrt{x}+\sin x \underset{x\to 0}{\sim}$; **Ответ:** $\sqrt{x}$.

5) $\operatorname{tg} x + 2x \underset{x\to 0}{\sim}$; **Ответ:** $3x$.

6) $1-\cos 5x \underset{x\to 0}{\sim}$; **Ответ:** $\frac{25x^2}{2}$.

7) $e^{2x}-1 \underset{x\to 0}{\sim}$; **Ответ:** $2x$.

8) $\ln\left(5x^2+3x+1\right) \underset{x\to 0}{\sim}$. **Ответ:** $3x$.

III. Вычислить с помощью эквивалентных:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}$; **Ответ:** $\frac{1}{4}$.

2) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\frac{\operatorname{tg}(6x-3)}{\sin(2x-1)}$; **Ответ:** 3.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{\sin 7x}$; **Ответ:** 0.

4) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{e^{x+1}-1}{2x+2}$; **Ответ:** $\frac{1}{2}$.

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} 7x}{5x^2-3x}$. **Ответ:** $-\frac{7}{3}$.

IV.

1. Установить область непрерывности функций и найти их точки разрыва:

а) $y=\frac{7x+4}{7x-4}$; **Ответ:** $x=\frac{4}{7}$, точка разрыва 2-го рода, $D(y)=\left(-\infty;\frac{4}{7}\right)\cup\left(\frac{4}{7};+\infty\right)$.

б) $y=2^{\frac{1}{x+5}}$; **Ответ:** $x=-5$, точка разрыва 2-го рода, $D(y)=(-\infty;-5)\cup(-5;+\infty)$.

в) $\ln\left(1-x^2\right)$. **Ответ:** $D(y)=(-1;1)$.

2. Исследовать на непрерывность и сделать схематический чертеж:

$$f(x)=\begin{cases} x-3, & x<0, \\ x+1, & 0\le x\le 4, \\ x^2+3, & x>4. \end{cases}$$

IV.Найти соответствие между условием и графиком. Ответ представить в виде:

1) – …; 2) – …; 3) – …; 4) – …; 5) – …; 6) – …

1. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$.

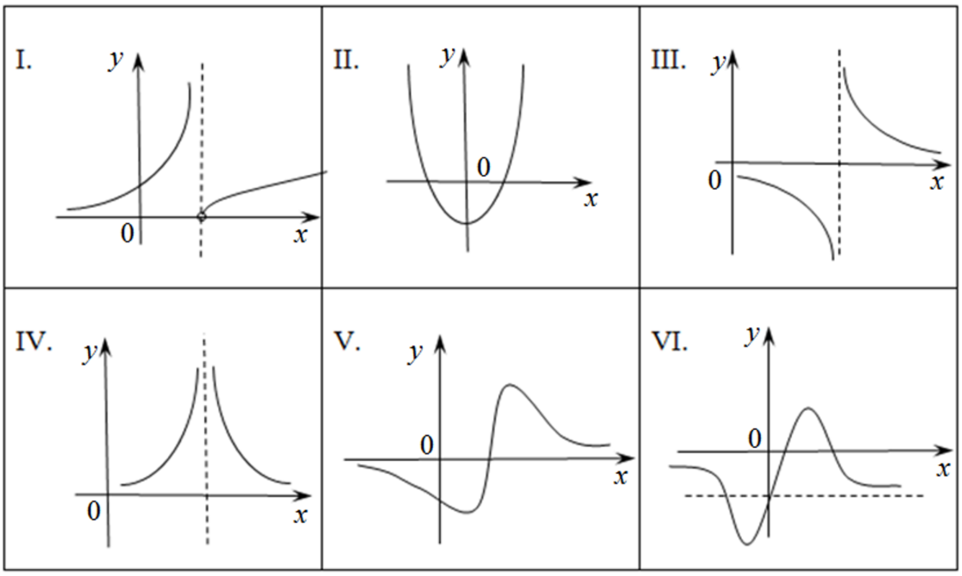
2. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$.

3. $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=+\infty, \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty, \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty. \end{cases}$

5. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-1$.

6. $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-1, \\ \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0. \end{cases}$



Уровень II

I. Вычислить:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$. **Ответ:** $\frac{4}{3}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[4]{n^5+2}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2}-\sqrt{n^3+1}}$. **Ответ:** 0.

3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^3-8x+8}$. **Ответ:** $-\frac{1}{4}$.

4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}{3x^4-5x^3+2x^2-x+1}$. **Ответ:** $\frac{1}{2}$.

5. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x-2-\sqrt{4x^2-x-2}}{x^2-3x+2}$. **Ответ:** $\frac{1}{2}$.

6. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^3-2x-1}{\sqrt{3x^3+9}-\sqrt{4x^3+8}}$. **Ответ:** $-\frac{28\sqrt{3}}{3}$.

7. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos 3x}{\sin 2x}$. **Ответ:** .$-\frac{3}{2}$

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\cos x}-\sqrt{2}\cos x}{\sqrt{3+\cos x}-2\cos x}$. **Ответ:** $\frac{3\sqrt{2}}{7}$.

9. $\lim\limits_{x\to +\infty} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. **Ответ:** $\frac{\pi}{4}$.

10. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{(2x+1)^{10}}{3x^{10}-7x^9+3x^2-2}$. **Ответ:** $\frac{2^{10}}{3}$.

11. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^x-e}{x-1}$. **Ответ:** e.

12. $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)^{\frac{1}{2x}}$. **Ответ:** 1.

13. $\lim\limits_{x\to \infty} \Big((2x+1)\big(\ln(3x+1)-\ln(3x-2)\big)\Big)$. **Ответ:** 2.

II. Для заданных функций найти эквивалентные в соответствующем процессе величины:

1. $\sqrt{x+\sqrt{x^2+\sqrt{x^3+1}}} \underset{x\to\infty}{\sim}$. **Ответ:** $\sqrt{2x}$.

2. $\sqrt[7]{1-3x-5x^2}-1 \underset{x\to 0}{\sim}$. **Ответ:** $-\dfrac{3}{7}$.

3. $1-\cos^3 2x \underset{x\to 0}{\sim}$. **Ответ:** $6x^2$.

4. $a^{3x}-\cos 9x \underset{x\to 0}{\sim}$. **Ответ:** $3x\ln a$.

5. $\ln\left(3-2e^{2x}\right) \underset{x\to 0}{\sim}$. **Ответ:** $-4x$.

6. $\left(x^3-2x^5\right)\lg\left(1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}\right) \underset{x\to 0}{\sim}$. **Ответ:** $\dfrac{x^5}{4\ln 10}$.

7. $e^{2x}-e^{\pi} \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim}$. **Ответ:** 0.

III. Вычислить с помощью эквивалентных:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^4}+2\sqrt[3]{1+x^6}}{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2}$. **Ответ:** $\dfrac{3}{4}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(2e^{x\sin x}-1\right)}{\ln\cos x}$. **Ответ:** -4.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+2x}\cdot\sqrt[4]{1+3x}}{x}$. **Ответ:** $\dfrac{1}{2}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2\left(1-\cos x\right)}$. **Ответ:** 1.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\cos x}+e^{\cos 2x}-2e^{\cos 4x}}{x^2}$. **Ответ:** $-\dfrac{27}{2}$.

6. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\arcsin\left(4-x\right)}{5^{4-x}-1}$. **Ответ:** $\log_5 e$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 2x}{x\cdot\arcsin x}$. **Ответ:** 2.

IV. Доказать по определению, что:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{3n}=1$.

2. $\lim\limits_{x\to 5}\left(2x^2-5x\right)=25$.

Уровень III

I. Вычислить:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2010\sqrt{2010\sqrt{2010\ldots}}}$. **Ответ:** 2010.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot\sin\dfrac{2x+1}{x^2+4x^3}$. **Ответ:** $\dfrac{1}{2}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\ln\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}$. **Ответ:** $\dfrac{1}{2}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg}x\ln\left(x+\sqrt{x+1}\right)$. **Ответ:** $\dfrac{1}{2}$.

5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}-0}\left(\cos x-\sin x\right)\sqrt{\operatorname{tg}2x}$; **Ответ:** 0.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{4}{3}}\left(\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)$. **Ответ:** $\dfrac{1}{3}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3}{1-\cos x\sqrt{\cos x}}-\dfrac{1}{1-\sqrt{\cos x}}$. **Ответ:** 1.

8. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(\dfrac{1}{1+2\cos 2x}-\dfrac{\sqrt{3}}{2\sin 3x}\right)$. **Ответ:** $-\dfrac{1}{3}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+\sin x\right)^{\frac{1}{x}}$. **Ответ:** e^2.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{\ln\cos x}}$. **Ответ:** 0.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$. **Ответ:** $e^{-\frac{1}{2}}$.

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$. **Ответ:** e.

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+5}{x^2+x+1}\right)^x$. **Ответ:** e^2.

14. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x-1}{2x-3}\right)^{\frac{4}{x^2-4}}$. **Ответ:** e^{-1}.

15. $\lim\limits_{x\to +0}\left(\frac{x-1}{2x-3}\right)^{\frac{1}{x}}$. **Ответ:** 0.

16. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x-1}{2x-3}\right)^{3x}$. **Ответ:** 1.

II. Доказать по определению, что:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x^2}=0$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos n\alpha}{n-1}=0$.

III. Исследовать на непрерывность:

1. $f(x)=x^2\cdot\sin\dfrac{1}{x}$.

Ответ: $x=0$ – точка устранимого разрыва.

2. $f(x)=\begin{cases} x\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

Ответ: $x=0$ – точка непрерывности.

IV. Выделить главную часть функций:

1. $y=\sqrt[5]{x^2-3}-1$ при $x\to 2$.

Ответ: $\dfrac{4}{5}(x-2)$.

2. $y=\ln\left(x^2-x-1\right)$ при $x\to 2$.

Ответ: $3\cdot(x-2)$.

3. $y=\ln\left(\dfrac{x^2+2x+4}{x^2-x-1}\right)$ при $x\to\infty$.

Ответ: $\dfrac{3}{x}$.

4. $y=\ln(\cos ax+\sin bx)$ при $x\to 0$.

Ответ: bx.

5. $y=\sqrt[3]{\cos 2x}-1$ при $x\to 0$.

Ответ: $-\frac{2x^2}{3}$.

V. Вычислить с помощью эквивалентных:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x-e}{\ln x}$. **Ответ:** e.

2. $\lim\limits_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{\ln x-\ln a}$. **Ответ:** $a\cdot e^a$.

3. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3^x-\sqrt{8+x}}{x-1}$. **Ответ:** 2.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{2x^2+10x-1}-\sqrt[7]{2x^2+10x-1}}{x}$. **Ответ:** $\frac{4}{7}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x}-x\right)^{\frac{1}{x}}$. **Ответ:** $e^{-\frac{1}{2}}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+x\sin 10x}-1}{x^2}$. **Ответ:** 2.

7. $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$. **Ответ:** $\frac{1}{e}$.

VI. Построить графики функций:

1. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^{2n}x$.

2. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}\quad(x\ge 0)$.

ГЛОССАРИЙ

Новые понятия	Содержание
1	*2*
Функция	правило, закон, по которому каждому элементу x (аргументу) некоторого множества X (области определения) соответствует единственный элемент y (зависимая переменная) другого множества $У$ (область значений функции)
Четная функция	функция f, у которой область определения симметрична относительно начала координат и для всех x из ее области определения $f(-x) = f(x)$
Нечетная функция	функция f, у которой область определения симметрична относительно начала координат и для всех x из ее области определения $f(-x) = -f(x)$
Функция монотонно возрастающая (убывающая) на интервале $(a, b) \in X$	функция $y = f(x)$, для которой большему значению аргумента из (a, b) соответствует большее (меньшее) значение функции, т.е. для $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$)
Ограниченная функция	функция, для которой в заданной области определения существует постоянное $k > 0$, такое, что $\lvert f(x) \rvert \le k$
Основные элементарные функции	1) *степенная* $y = x^p$, где p – действительное число; 2) *показательная* $y = a^x$, где a – положительное число, не равное 1; 3) *логарифмическая* $y = \log_a x$, где $a > 0$, не равно 1; 4) *тригонометрические* $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$ $y = \mathrm{tg}\, x$; обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$ $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arcctg}\, x$
Предел последовательности	число A, к которому можно приблизиться с любой степенью точности при стремлении номера члена последовательности к бесконечности, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = A$
Предел функции $y = f(x)$ *при стремлении аргумента* x *к фиксированному значению* x_0	число A, к которому может приблизиться значение функции y с любой наперед заданной точностью ε: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$
Два замечательных предела	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{y \to \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$

1	2
Функция $y = f(x)$ *непрерывна в точке* $x = x_0$	если существует значение функции в точке x_0 и ее предел в точке x_0 равен значению функции в этой точке $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, или ее предел справа равен пределу слева при $x \to x_0$ и равен значению функции в этой точке: $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0)$ $\left(f(x_0+0) = f(x_0-0) = f(x_0)\right)$

ПРИЛОЖЕНИЕ

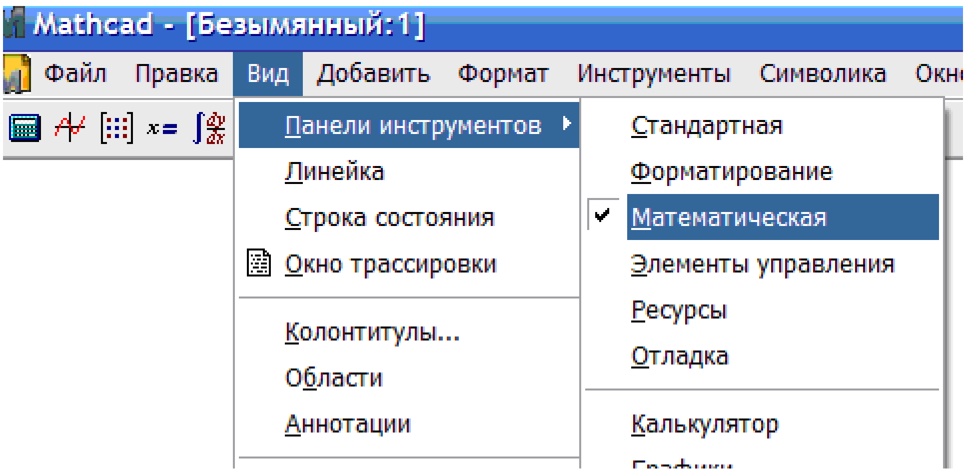
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ» С ПОМОЩЬЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПАКЕТОВ Maple и Mathcad

Предлагаемые программы помогут Вам при проверке домашнего задания или, при необходимости, предоставят возможность быстрого вычисления пределов любой сложности, исследования функций на непрерывность и др.

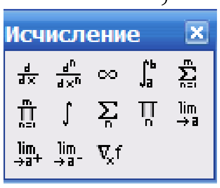
Рассмотрим один из наиболее популярных математических пакетов MathCAD.

Чтобы начать работать с приложением, вызовите панель Calculus (вычисления).

Выберите на панели вкладку ВИД → ПАНЕЛИ ИНСТРУМЕНТОВ → МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

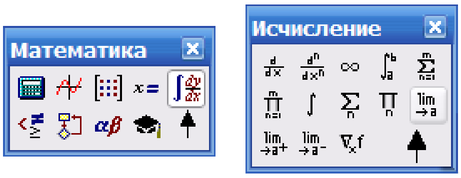


Появится панель 

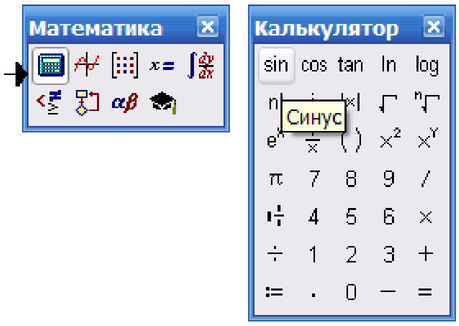
, на данной вкладке необходимо выбрать панель «Исчисление» 

и продолжить работу.

Например, Вы хотите вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$. Для этого на вкладке «Исчисление» найдите значок предела

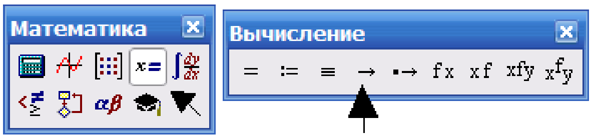


(на рисунке на него указывает стрелочка). После этого появляется следующий символ $\lim\limits_{\blacksquare \to \blacksquare} \blacksquare$, в нашем примере $x \to 0$, поэтому нижние поля мы заполняем соответственно $\lim\limits_{x \to 0} \blacksquare$. Далее, используя вкладку «калькулятор»



,

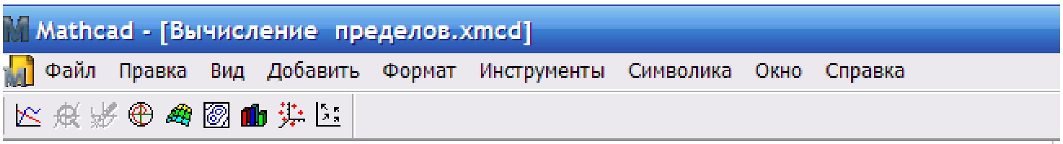
заполним основное поле $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$. Затем выбираем «вычисление»



,

на этой вкладке стрелочку и видим результат $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \to 1$.

Далее разобраны задачи наиболее часто встречаемые в теме «Введение в математический анализ».

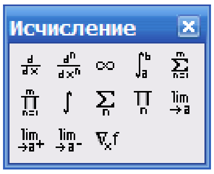


Вычисление пределов

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \to 1$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{[[n!\cdot(n+2)] - (n-2)!]}{(n-1)! + n!} \to \infty$$

Решение пределов любой сложности



Исследовать на непрерывность

$$y = \frac{4 - x^2}{8 + x^3}$$

$$y(x) := \frac{(4 - x^2)}{8 + x^3}$$

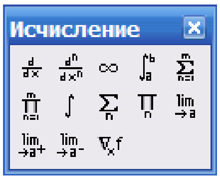
Предполагаемая точка разрыва x=-2

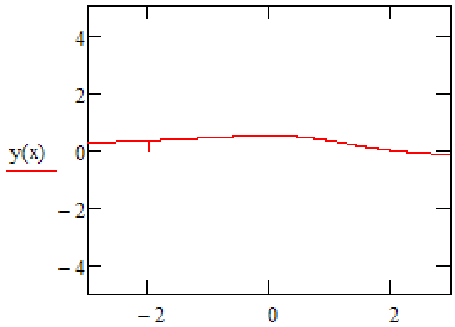
$$\lim_{x \to -2^-} \frac{(4 - x^2)}{8 + x^3} \to \frac{1}{3}$$

исследуем слева

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{(4 - x^2)}{8 + x^3} \to \frac{1}{3}$$

исследуем справа





Построение графика

Рассмотрим несколько функций и убедимся, что они бесконечно малые

$$f(x) := \sqrt{1 + x^2} - 1 \qquad \lim_{x \to 0} f(x) \to 0$$

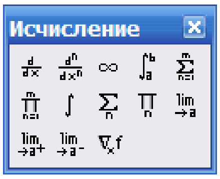
$$p(x) := \exp\left(x^2\right) - 1 \qquad \lim_{x \to 0} p(x) \to 0$$

$$u(x) := x \cdot \ln\left(1 + \sqrt{x}\right) \qquad \lim_{x \to 0} u(x) \to 0$$

$$v(x) := 1 - \cos\left(x^3\right) \qquad \lim_{x \to 0} v(x) \to 0$$

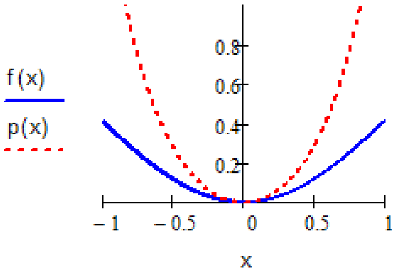
$$w(x) := x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \lim_{x \to 0} w(x) \to 0$$

Все они бесконечно малые сравним некоторые из них

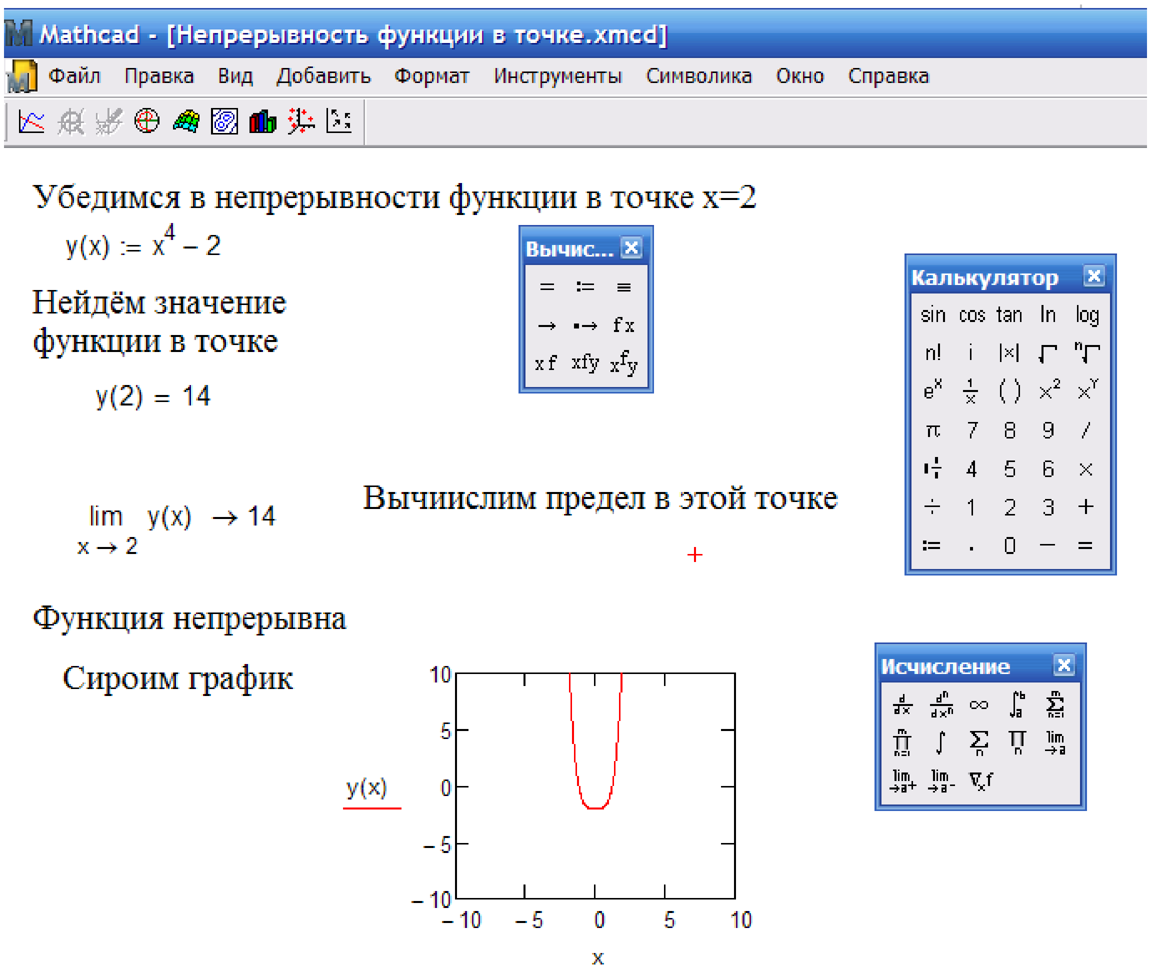


$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{p(x)} \to \frac{1}{2}$$

они одного порядка малости



Строим графики



Рассмотрим вычисление пределов любой сложности, исследование функций на непрерывность с помощью математического пакета **Maple.** Maple имеет несколько операторов для работы с пределами: Limit (функция, $x = a$) – отображает искомый предел, limit (функция, $x = a$) – выводит ответ.

На разобранных примерах мы демонстрируем сочетание этих функций.

Нужно помнить, что в выбранной программе очень важное место занимают операторы «:» – присвоить, «;» – окончание предложения.

Вычисление пределов

$$> Limit\left(\frac{sin(10\cdot x)}{10\cdot x}, x=\pi\right)=limit\left(\frac{sin(x)}{x}, x=\pi\right);$$

$$\lim_{x\to\pi}\left(\frac{1}{10}\frac{\sin(10x)}{x}\right)=0$$

$$> Limit\left(sqrt\left(25\cdot x^2+x+2\right)-sqrt\left(25\cdot x^2-3\cdot x\right),\ x=\infty\right)=limit\left(sqrt\left(25\cdot x^2+x+2\right)-sqrt\left(25\cdot x^2-3\cdot x\right), x=\infty\right);$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{25x^2+x+2}-\sqrt{25x^2-3x}\right)=\frac{2}{5}$$

$$> Limit\left(sin\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{sin(2\cdot x)}}, x=\pi\right)=limit\left(sin\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{sin(2\cdot x)}},\ x=\pi\right);$$

$$\lim_{x\to\pi}\sin\left(\frac{1}{2}x\right)^{\left(\frac{1}{\sin(2x)}\right)}=1$$

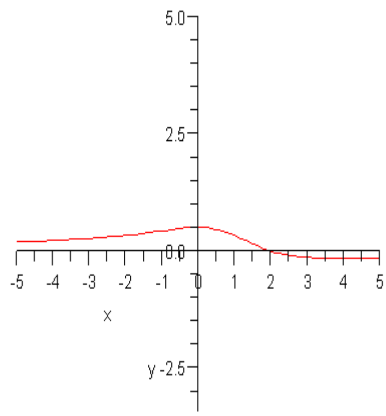
$> Limit\left(\frac{(4-x^2)}{8+x^3}, x=-2, left\right)=limit\left(\frac{(4-x^2)}{8+x^3}, x=-2, left\right)$; исследование функции на непрерывность в точке $x=-2$ слева

$$\lim_{x\to-2-}\left(\frac{4-x^2}{8+x^3}\right)=\frac{1}{3}$$

$> Limit\left(\frac{(4-x^2)}{8+x^3}, x=-2, right\right)=limit\left(\frac{(4-x^2)}{8+x^3}, x=-2, right\right)$; исследование функции на непрерывность в точке $x=-2$ справа

$$\lim_{x\to-2+}\left(\frac{4-x^2}{8+x^3}\right)=\frac{1}{3}$$

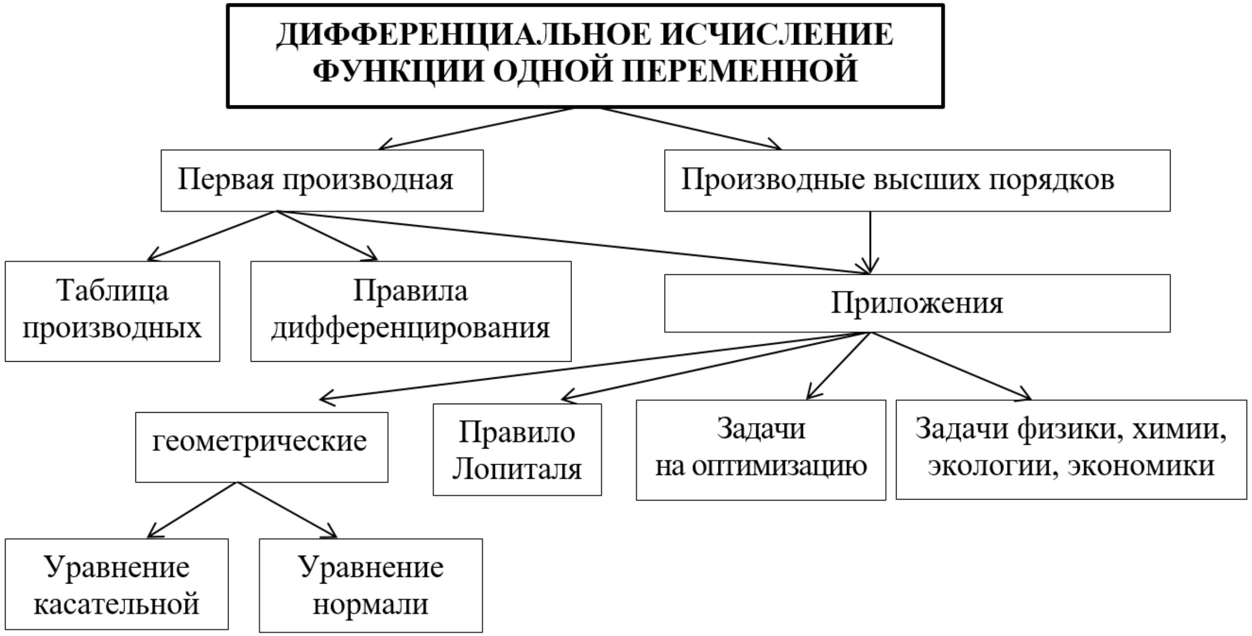
$> plot\left(\frac{(4-x^2)}{8+x^3}, x=-5..5, y=-5..5\right)$; построение графика функций



При необходимости Вы можете воспользоваться нашими примерами, просто введите свои данные в предложенные нами операторы.

Модуль 3
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Графическая схема



Информационная таблица

Производной функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Геометрический смысл производной: $f'(x_0) = k$;

– уравнение касательной к кривой

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0);$$

– уравнение нормали к кривой

$$y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Теорема (правило Лопиталя)

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы вблизи точки a, непрерывны в точке a, $g'(x)$ отлична от нуля вблизи a и $f(a) = g(a) = 0$, то предел отношения функций при $x \to a$ равен пределу отношения их производных, если этот предел (конечный или бесконечный) существует: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Неопределенности вида 0^0, 1^∞, ∞^0 можно раскрыть с помощью логарифмирования. Такие неопределенности встречаются при нахождении пределов функций вида $y = [f(x)]^{g(x)}$, $f(x) > 0$ вблизи точки a при $x \to a$. Для нахождения предела такой функции достаточно найти предел функции $\ln y = g(x) \cdot \ln(f(x))$

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на некотором интервале. Тогда, дифференцируя ее, получаем первую производную $y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$; если найти производную функции y', получим *вторую производную* функции $f(x)$: $y'' = f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$, т.е. $y'' = (y')'$ или $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$

Общая схема исследования функции:

1. Найти область определения функции $D(y)$.
2. Выделить особенности функции (четность, нечетность, периодичность).
3. Найти вертикальные и горизонтальные асимптоты. (Исследовать поведение функции на концах интервалов из области определения с помощью пределов, сделать выводы о непрерывности функции, характере точек разрыва.)
4. Найти промежутки монотонности, точки экстремума.
5. Найти промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба.
6. Определить точки пересечения графика с осями координат.
7. Если есть необходимость, можно составить таблицу дополнительных точек.
8. Построить график

Механический смысл производной: производная от функции S, равная $S'(t)$, где $S(t)$ – путь, пройденный материальной точкой за время t, есть мгновенная скорость материальной торчки в определенный момент времени $S = S(t)$, $\vartheta_{мгн}(t_0) = S'(t_0)$

Основные правила дифференцирования

Обозначим $f(x) = u$, $g(x) = v$ – функции, дифференцируемые в точке x.

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
2) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;
3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, если $v \neq 0$;
4) $(c \cdot u)' = c \cdot (u)'$;
5) $(c)' = 0$

Таблица производных

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ (u^p)' = p \cdot u^{p-1} \cdot u'. \\ 2.\ x' = 1. \\ 3.\ (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'. \\ 4.\ \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'. \end{array}\right\} \text{степенные}$$

$$\left.\begin{array}{l} 5.\ (\sin u)' = \cos u \cdot u'. \\ 6.\ (\cos u)' = -\sin u \cdot u'. \\ 7.\ (\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'. \\ 8.\ (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'. \end{array}\right\} \text{тригонометрические}$$

$$\left.\begin{array}{l} 9.\ (a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'. \\ 10.\ (e^u)' = e^u \cdot u'. \end{array}\right\} \text{показательные}$$

$$\left.\begin{array}{l} 11.\ (\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'. \\ 12.\ (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'. \end{array}\right\} \text{логарифмические}$$

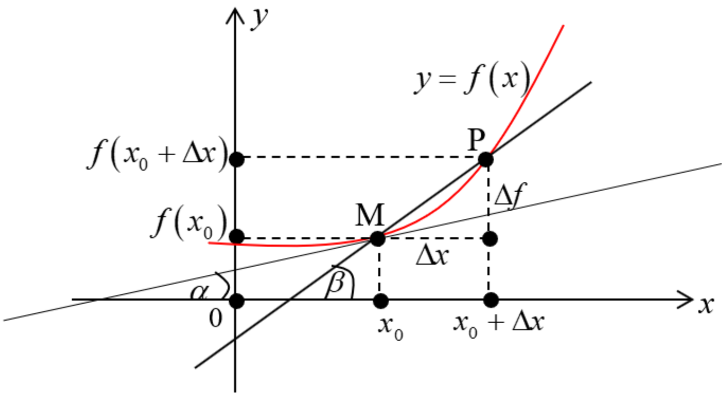
$$\left.\begin{array}{l} 13.\ (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'. \\ 14.\ (\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'. \\ 15.\ (\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'. \\ 16.\ (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u' \end{array}\right\} \text{обратно тригонометрические}$$

ЛЕКЦИОННЫЙ КУРС

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ, ЕЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ И ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

Определение. *Производной* функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$



Пусть $f(x)$ определена на некотором промежутке (a, b). Тогда $\text{tg}\beta = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ – тангенс угла наклона секущей MP к графику функции.

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \text{tg}\beta = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = \text{tg}\alpha$, где α – угол наклона касательной к графику функции $f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$.

Угол между кривыми может быть определен как угол между касательными, проведенными к этим кривым в какой-либо точке.

Уравнение касательной к кривой: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Уравнение нормали к кривой: $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Фактически производная функции показывает как бы скорость изменения функции, т.е. как изменяется функция при изменении переменной.

Физический смысл производной функции $f(t)$, где t – время, а $f(t)$ – закон движения (изменения координат) – мгновенная скорость движения.

Соответственно, вторая производная функции – скорость изменения скорости, т.е. ускорение.

Односторонние производные функции в точке

Определение. *Правой (левой) производной* функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ называется правое (левое) значение предела отношения $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ при условии, что этот предел существует.

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta f}{\Delta x}, \; f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Если функция $f(x)$ имеет производную в некоторой точке $x = x_0$, то она имеет в этой точке односторонние производные. Однако обратное утверждение неверно. Во-первых, функция может иметь разрыв в точке x_0, во-вторых, даже если функция непрерывна в точке x_0, она может быть в ней не дифференцируема.

Например: $f\left(x\right)=\left|x\right|$ – имеет в точке $x=0$ и левую, и правую производную, непрерывна в этой точке, однако, не имеет в ней производной.

Теорема. (Необходимое условие существования производной) *Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.*

Понятно, что это условие не является достаточным.

Основные правила дифференцирования

Обозначим $f(x) = u$, $g(x) = v$ – функции, дифференцируемые в точке x.

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
2) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;
3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, если $v \neq 0$.

Эти правила могут быть легко доказаны на основе теорем о пределах.

Таблица производных

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & \left(u^p\right)' = n \cdot u^{p-1} \cdot u'. \\ 2. & x' = 1; \\ 3. & \left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'. \\ 4. & \left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u'. \end{array}\right] \text{ – \textit{степенные}}$$

5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.

6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.

7. $(\mathrm{tg}\, u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$.

8. $(\mathrm{ctg}\, u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$.

– *тригонометрические*

9. $\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$.

10. $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$.

– *показательные*

11. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$.

12. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$.

– *логарифмические*

13. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.

14. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.

15. $(\mathrm{arctg}\, u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

16. $(\mathrm{arcctg}\, u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

– *обратно тригонометрические*

Производная сложной функции

Теорема. *Пусть y = f(u), u = g(x), причем область значений функции входит в область определения функции f.*

Тогда $y' = f'(u) \cdot u'$.

Доказательство.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

(с учетом того, что если $\Delta x \to 0$, то $\Delta u \to 0$, т.к. $u = g(x)$ – непрерывная функция).

Тогда $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$.

Теорема доказана.

Логарифмическое дифференцирование

Рассмотрим функцию $y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & \text{при} \quad x > 0, \\ \ln(-x), & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$

Тогда $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$, т.к. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; $\quad (\ln(-x))' = \dfrac{(-x)'}{x} = \dfrac{1}{x}$.

Учитывая полученный результат, можно записать $\left(\ln|f(x)|\right)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Отношение $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ называется *логарифмической производной* функции $f(x)$.

Способ *логарифмического дифференцирования* состоит в том, что сначала находят логарифмическую производную функции, а затем производную самой функции по формуле

$$f'(x) = (\ln|f(x)|)' \cdot f(x).$$

Способ логарифмического дифференцирования удобно применять для нахождения производных сложных, особенно показательных, функций, для которых непосредственное вычисление производной с использованием правил дифференцирования представляется трудоемким.

Пример. Найти производную функции $f(x) = (x^2 + 3x)^{x\cos x}$.

По полученной формуле логарифмического дифференцирования получаем: $u = x^2 + 3x,\ v = x\cos x.$

Производные этих функций: $u' = 2x + 3,\ v' = \cos x - x\sin x.$

Окончательно:

$$f'(x) = x\cos x \cdot (x^2 + 3x)^{x\cos x - 1} \cdot (2x + 3) +$$
$$+(x^2 + 3x)^{x\cos x}(\cos x - x\sin x)\ln(x^2 + 3x).$$

Дифференциал функции

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Тогда: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \to 0$, при $\Delta x \to 0$.

Следовательно, $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Величина $\alpha \Delta x$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем $f'(x)\Delta x$, т.е. $f'(x)\Delta x$ – главная часть приращения Δy.

Определение. *Дифференциалом* функции $f(x)$ в точке x называется главная линейная часть приращения функции.

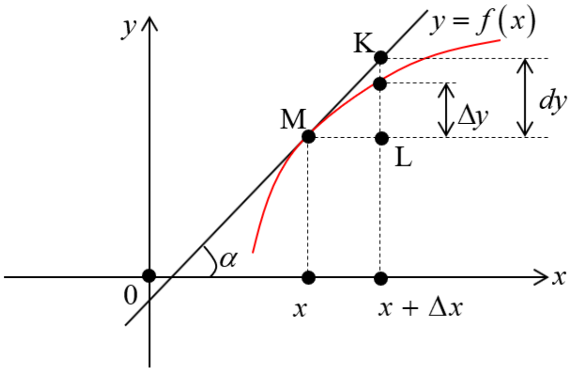
Обозначается dy или $df(x)$.

Из определения следует, что $dy = f'(x)\Delta x$ или $dy = f'(x)dx$,

т.к. $dx = x'\Delta x = \Delta x$.

Можно также записать: $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

Геометрический смысл дифференциала



Из треугольника ΔMKL: $KL = \operatorname{tg}\alpha \cdot \Delta x = y' \cdot \Delta x = dy$.

Таким образом, дифференциал функции $f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной к графику этой функции в рассматриваемой точке.

Свойства дифференциала

Если $u = f(x)$ и $v = g(x)$ – функции, дифференцируемые в точке x, то непосредственно из определения дифференциала следуют следующие свойства:

1) $d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv$;

2) $d(uv) = (uv)'dx = (u'v + v'u)dx = vdu + udv$;

3) $d(Cu) = Cdu$;

4) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$.

Дифференциал сложной функции.
Инвариантная форма записи дифференциала

Пусть $y = f(x)$, $x = g(t)$, т.е y – сложная функция.
Тогда $dy = f'(x)g'(t)dt = f'(x)dx$.

Видно, что форма записи дифференциала dy не зависит от того, будет ли x независимой переменной или функцией какой-то другой переменной. Эта форма записи называется *инвариантной формой записи дифференциала.*

Однако, если x – независимая переменная, то $dx = \Delta x$, но если x зависит от t, то $\Delta x \neq dx$.

Таким образом, форма записи $dy = f'(x)\Delta x$ не является инвариантной.

Пример. Найти производную функции $y = x\cos x\sin x + \frac{1}{2}\cos^2 x$.

Сначала преобразуем данную функцию: $y = \frac{1}{2}\cdot x\cdot\sin 2x + \frac{1}{2}\cdot\cos^2 x$,

$$y' = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}x2\cos 2x + \frac{1}{2}2\cos x(-\sin x) =$$
$$= \frac{1}{2}\sin 2x + x\cos 2x - \sin x\cos x = x\cos 2x.$$

Пример. Найти производную функции $y = \frac{x^2e^x}{x^2+1}$.

$$y' = \frac{(2xe^x + x^2e^x)(x^2+1) - (2x)x^2e^x}{(x^2+1)^2} =$$
$$= \frac{2x^3e^x + x^4e^x + 2xe^x + x^2e^x - 2x^3e^x}{(x^2+1)^2} = \frac{xe^x(x^3+2+x)}{(x^2+1)^2}.$$

Пример. Найти производную функции $y = \ln\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{x}{\sin x}$.

$$y' = \frac{1}{tg\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} =$$
$$= \frac{\sin x - \sin x + x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{x\cos x}{\sin^2 x}.$$

Пример. Найти производную функции $y = \operatorname{arctg}\dfrac{2x^4}{1-x^8}$.

$$y' = \frac{1}{\left(1+\dfrac{4x^8}{(1-x^8)^2}\right)} \cdot \frac{8x^3(1-x^8)-(-8x^7)2x^4}{(1-x^8)^2} = \frac{(1-x^8)^2(8x^3 - 8x^{11}+16x^{11})}{(1+x^8)^2(1-x^8)^2} =$$

$$= \frac{8x^3+8x^{11}}{(1+x^8)^2} = \frac{8x^3(1+x^8)}{(1+x^8)^2} = \frac{8x^3}{1+x^8}.$$

Пример. Найти производную функции $y = x^2e^x \ln x$.

$$y' = \left(x^2e^x\right)' \ln x + x^2e^x\frac{1}{x} = \left(2xe^x + x^2e^x\right)\ln x + xe^x = xe^x(2+x)\ln x + xe^x =$$

$$= xe^x(1+2\ln x + x\ln x).$$

Применение дифференциала к приближенным вычислениям

Дифференциал функции $y = f(x)$ зависит от Δx и является главной частью приращения Δy.

Также можно воспользоваться формулой

$$dy = f'(x)dx.$$

$$\Delta y \cong dy \;\Rightarrow\; f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \cong f'(x_0)\Delta x \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; f(x_0+\Delta x) \cong f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Тогда абсолютная погрешность $|\Delta y - dy|$; относительная – $\left|\dfrac{\Delta y - dy}{dy}\right|$.

Теоремы о среднем

Теорема Ролля

(Мишель Ролль (1652–1719), французский математик)

Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], дифференцируема на интервале (a, b) и значения функции на концах отрезка равны f(a) = f(b), то на интервале (a, b) существует хотя бы одна точка c, a < c < b, в которой производная функции f(x) равна нулю, f′(c) = 0.

Геометрический смысл теоремы Ролля состоит в том, что при выполнении условий теоремы на интервале (a, b) существует такая точка c, что в соответствующей точке кривой $y = f(x)$ касательная параллельна оси Ox. Таких точек на интервале может быть несколько, но теорема утверждает существование по крайней мере одной такой точки.

Теорема Ролля имеет два **следствия**:

– Если функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ удовлетворяет теореме Ролля, причем $f(a) = f(b) = = 0$, то существует по крайней мере одна точка c, $a < c < b$, такая, что $f'(c) = 0$. Другими словами, между двумя нулями функции найдется хотя бы одна точка, в которой производная функции равна нулю.

– Если на рассматриваемом интервале (a, b) функция $f(x)$ имеет производную $(n - 1)$-го порядка и n раз обращается в нуль, то существует по крайней мере одна точка интервала, в котором производная $(n - 1)$-го порядка равна нулю.

Теорема Лагранжа

(Жозеф Луи Лагранж (1736–1813), французский математик)

Если функция f(x) непрерывна на отрезке $[a, b]$ *и дифференцируема на интервале (a, b), то на этом интервале найдется по крайней мере одна точка c*

$$a < c < b,$$

такая, что

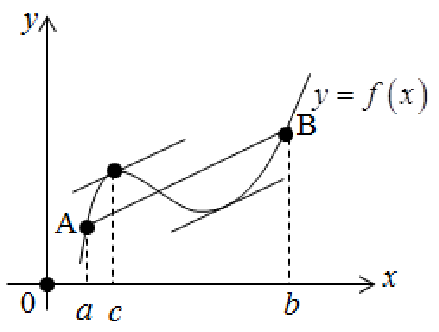
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Это означает, что если на некотором промежутке выполняются условия теоремы, то отношение приращения функции к приращению аргумента на этом отрезке равно значению производной в некоторой промежуточной точке.

Рассмотренная выше теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа.

Отношение $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ равно угловому коэффициенту секущей AB.

Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы, то на интервале (a, b) существует такая точка c, что в соответствующей точке кривой $y = f(x)$ касательная параллельна секущей, соединяющей точки A и B. Таких точек может быть и несколько.



Замечание. Выражение $f(a)-f(b)=f'(c)(b-a)$ называется *формулой Лагранжа*, или *формулой конечных приращений.*

В дальнейшем эта формула будет очень часто применяться для доказательства самых разных теорем.

Иногда формулу Лагранжа записывают в несколько другом виде:

$$\Delta y = f'(x+\theta\Delta x)\Delta x,$$

где $0 < \theta < 1$, $\Delta x = b - a$, $\Delta y = f(b) - f(a)$.

Теорема Коши

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы на интервале (a, b) и $g'(x) \neq 0$ на интервале (a, b), то существует по крайней мере одна точка c, $a < c < b$, такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

т.е. отношение приращений функций на данном отрезке равно отношению производных в точке c.

Для доказательства этой теоремы на первый взгляд очень удобно воспользоваться теоремой Лагранжа. Записать формулу конечных разностей для каждой функции, а затем разделить их друг на друга. Однако это представление ошибочно, т.к. точка c для каждой из функций в общем случае различна. Конечно, в некоторых частных случаях эта точка интервала может оказаться одинаковой для обеих функций, но это очень редкое совпадение, а не правило, и поэтому не может быть использовано для доказательства теоремы.

Следует отметить, что рассмотренная выше теорема Лагранжа является частным случаем (при $g(x) = x$) теоремы Коши. Теорема Коши очень широко используется для раскрытия так называемых неопределенностей. Применение полученных результатов позволяет существенно упростить процесс вычисления пределов функций, что будет подробно рассмотрено ниже.

РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Правило Лопиталя

(Гийом Франсуа Лопиталь (1661–1704), французский математик)

К разряду неопределенностей принято относить следующие соотношения:

$$\frac{0}{0};\ \frac{\infty}{\infty};\ \infty\cdot 0;\ \infty^0;\ 1^\infty;\ \infty-\infty;\ 0^0.$$

Теорема (правило Лопиталя). *Если функции f(x) и g(x) дифференцируемы вблизи точки a, непрерывны в точке a, g′(x) отлична от нуля вблизи a и f(a) = g(a) = 0, то предел отношения функций при x→a равен пределу отношения их производных, если этот предел (конечный или бесконечный) существует.*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$.

Как видно, при попытке непосредственного вычисления предела получается неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Функции, входящие в числитель и знаменатель дроби, удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя:

$f'(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$; $g'(x) = e^x$,

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+\frac{1}{x}}{e^x}=\frac{2+1}{e}=\frac{3}{e}.$$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-2\mathrm{arctg}x}{e^{\frac{3}{x}}-1}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi-2\mathrm{arctg}x}{e^{\frac{3}{x}}-1}=\left(\frac{0}{0}\right),$$

$$f'(x)=-\frac{2}{1+x^2};\ g'(x)=e^{\frac{3}{x}}\cdot\frac{-3}{x^2},$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[-\frac{2x^2}{(1+x^2)e^{\frac{3}{x}}(-3)}\right]=\frac{-2}{(0+1)\cdot 1\cdot(-3)}=\frac{2}{3}.$$

Если при решении примера после применения правила Лопиталя попытка вычислить предел опять приводит к неопределенности, то правило Лопиталя может быть применено второй раз, третий и т.д., пока не будет получен результат. Естественно, это возможно только в том случае, если вновь полученные функции в свою очередь удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя.

Замечание. Правило Лопиталя можно применять и для неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right),$$

$$f'(x)=e^{\frac{x}{2}}(1+\frac{1}{2}x);\ g'(x)=1+e^x,$$

Применим правило Лопиталя еще раз.

$$f''(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}+\frac{x}{4}e^{\frac{x}{2}}=\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4+x);\ g''(x)=e^x,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4+x)}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{4}(4+x)}{e^{\frac{x}{2}}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right),$$

$$f'''(x)=\frac{1}{4};\ g'''(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}};\ \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{4}}{2e^{\frac{x}{2}}}=0.$$

Следует отметить, что правило Лопиталя – всего лишь один из способов вычисления пределов. Часто в конкретном примере наряду с правилом Лопиталя может быть использован и какой-либо другой метод (замена переменных, домножение и др.).

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right),$$

$$f'(x)=e^x+e^{-x}-2;\ g'(x)=1-\cos x,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\frac{1+1-2}{1-1}=\frac{0}{0}$$ – опять получилась неопределенность.

Применим правило Лопиталя еще раз.

$$f''(x)=e^x-e^{-x};\ g''(x)=\sin x,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\left(\frac{1-1}{0}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)$$

Применим правило Лопиталя еще раз.

$$f'''(x)=e^x+e^{-x};\ g'''(x)=\cos x,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{2}{1}=2.$$

Неопределенности вида 0^0, 1^∞, ∞^0 можно раскрыть с помощью логарифмирования. Такие неопределенности встречаются при нахождении пределов функций вида $y=[f(x)]^{g(x)}$, $f(x)>0$ вблизи точки a при $x\to a$. Для нахождения предела такой функции достаточно найти предел функции $\ln y = g(x)\ln f(x)$.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x$.

Здесь $y = x^x$, $\ln y = x\ln x$.

Тогда

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln y=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x\ln x=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left\{\begin{matrix}\text{\textit{правило}}\\ \text{\textit{Лопиталя}}\end{matrix}\right\}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1/x}{-1/x^2}=-\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x=0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln y=\ln\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}y=0 \quad\Rightarrow\quad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}y=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x^x=1.$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{2x}}$.

$f'(x)=2x;\ g'(x)=2e^{2x};\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{e^{2x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ – получили неопределенность.

Применяем правило Лопиталя еще раз.

$f''(x)=2;\ g'(x)=4e^{2x};\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2e^{2x}}=\frac{1}{\infty}=0$.

Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на некотором интервале. Тогда, дифференцируя ее, получаем первую производную

$$y'=f'(x)=\frac{df(x)}{dx}.$$

Если найти производную функции $f'(x)$, получим *вторую производную* функции $f(x)$.

$$y''=f''(x)=\frac{d^2f(x)}{dx^2},$$

т.е. $y''=(y')'$ или $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

Этот процесс можно продолжить и далее, находя производные порядка n.

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

Общие правила нахождения высших производных

Если функции $u=f(x)$ и $v=g(x)$ дифференцируемы, то

1) $(Cu)^{(n)}=Cu^{(n)}$;

2) $(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$;

3) $(u\cdot v)^{(n)}=vu^{(n)}+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\ldots+$

$+\frac{n(n-1)\ldots[n-(k-1)]}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\ldots+uv^{(n)}$.

Это выражение называется *формулой Лейбница.*

Также по формуле $d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$ может быть найден дифференциал n-го порядка.

Исследование функций с помощью производной

Возрастание и убывание функций

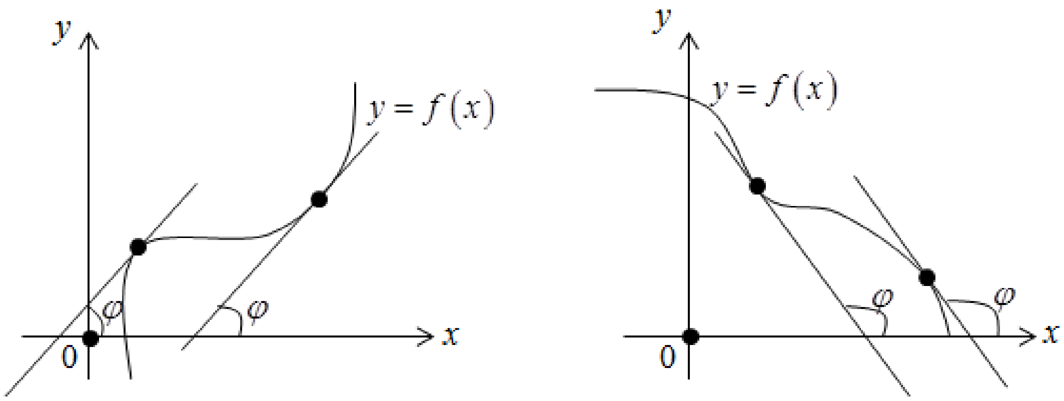
Теорема.

1. *Если функция $f(x)$ имеет производную на отрезке $[a, b]$ и возрастает на этом отрезке, то ее производная на этом отрезке неотрицательна, т.е. $f'(x) \geq 0$.*
2. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на промежутке (a, b), причем $f'(x) > 0$ для $a < x < b$, то эта функция возрастает на отрезке $[a, b]$.*

Аналогично, если функция $f(x)$ убывает на отрезке $[a, b]$, то $f'(x) \leq 0$ на этом отрезке. Если $f'(x) < 0$ в промежутке (a, b), то $f(x)$ убывает на отрезке $[a, b]$.

Конечно, данное утверждение справедливо, если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b).

Доказанную выше теорему можно проиллюстрировать геометрически.



Точки экстремума

Определение. Функция $f(x)$ имеет в точке x_1 максимум, если ее значение в этой точке больше значений во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_1. Функция $f(x)$ имеет в точке x_2 минимум, если $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$ при любом Δx (Δx может быть и отрицательным).

Очевидно, что функция, определенная на отрезке, может иметь максимум и минимум только в точках, находящихся внутри этого отрезка. Нельзя также путать максимум и минимум функции с ее наибольшим и наименьшим значением на отрезке – эти понятия принципиально различные.

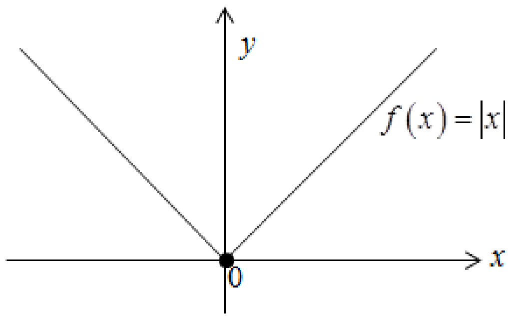
Определение. Точки максимума и минимума функции называются *точками экстремума.*

Теорема (Необходимое условие существования экстремума). *Если функция f(x) дифференцируема в точке* $x = x_1$ *и точка* x_1 *является точкой экстремума, то производная функции обращается в нуль в этой точке.*

Следствие. Обратное утверждение неверно. Если производная функции в некоторой точке равна нулю, то это еще не значит, что в этой точке функция имеет экстремум. Красноречивый пример этого – функция $y = x^3$, производная которой в точке $x = 0$ равна нулю, однако в этой точке функция имеет только перегиб, а не максимум или минимум.

Определение. *Критическими точками* функции называются точки, в которых производная функции не существует или равна нулю.

Пример. $f(x)=|x|$.



В точке $x = 0$ функция имеет минимум, но не имеет производной.

Вообще говоря, функция $f(x)$ может иметь экстремум в точках, где производная не существует или равна нулю.

Рассмотренная выше теорема дает нам необходимые условия существования экстремума, но этого недостаточно.

Теорема. (Достаточные условия существования экстремума)

Пусть функция f(x) непрерывна в интервале (a, b), который содержит критическую точку x_1*, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки* x_1*).*

Если при переходе через точку x_1 *слева направо производная функции f′(x) меняет знак с «+» на «–», то в точке* $x = x_1$ *функция f(x) имеет максимум, а если производная меняет знак с «–» на «+» – функция имеет минимум.*

На основе вышесказанного можно выработать единый порядок действий при нахождении наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке:

1) найти критические точки функции;
2) найти значения функции в критических точках;
3) найти значения функции на концах отрезка;
4) выбрать среди полученных значений наибольшее и наименьшее.

Исследование функции на экстремум с помощью производных высших порядков

Пусть в точке $x = x_1$ $f'(x_1) = 0$ и $f''(x_1)$ существует и непрерывна в некоторой окрестности точки x_1.

Теорема. *Если $f'(x_1) = 0$, то функция $f(x)$ в точке $x = x_1$ имеет максимум, если $f''(x_1) < 0$, и минимум, если $f''(x_1) > 0$.*

Выпуклость и вогнутость кривой

Точки перегиба

Определение. Кривая обращена выпуклостью *вверх* (*вниз*) на интервале (a, b), если все ее точки лежат ниже (выше) любой ее касательной на этом интервале. Кривая, обращенная выпуклостью вверх, называется *выпуклой*, кривая, обращенная выпуклостью вниз – *вогнутой*.

Теорема 1. *Если во всех точках интервала (a, b) вторая производная функции $f(x)$ отрицательна, то кривая $y = f(x)$ обращена выпуклостью вверх (выпукла). Если вторая производная функции $f(x)$ положительна, то кривая $y = f(x)$ обращена выпуклостью вниз (вогнута).*

Определение. Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется *точкой перегиба.*

Очевидно, что в точке перегиба касательная пересекает кривую.

Теорема 2. *Пусть кривая определяется уравнением $y = f(x)$. Если вторая производная $f''(a) = 0$ или $f''(a)$ не существует и при переходе через точку $x = a$ $f''(x)$ меняет знак, то точка кривой с абсциссой $x = a$ является точкой перегиба.*

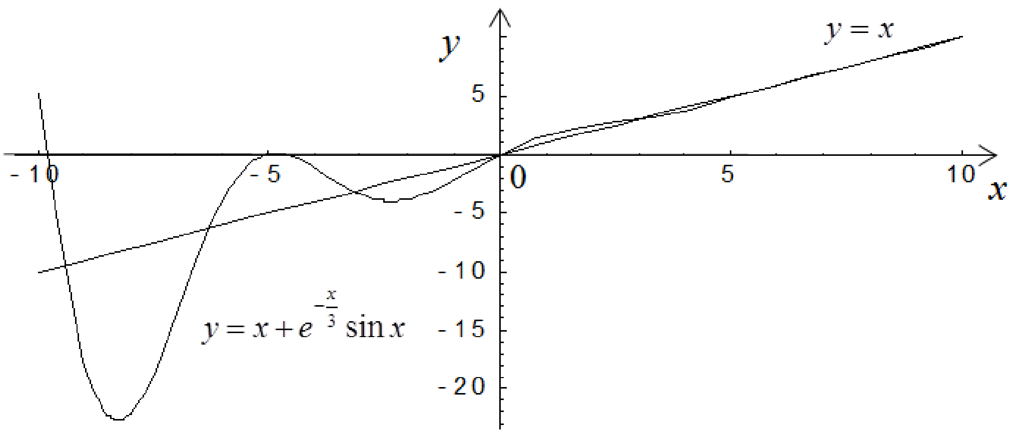
Асимптоты

При исследовании функций часто бывает, что при удалении координаты x точки кривой в бесконечность кривая неограниченно приближается к некоторой прямой.

Определение. Прямая называется *асимптотой* кривой, если расстояние от переменной точки кривой до этой прямой при удалении точки в бесконечность стремится к нулю.

Следует отметить, что не любая кривая имеет асимптоту. Исследование функций на наличие асимптот имеет большое значение и позволяет более точно определить характер функции и поведение графика кривой.

Вообще говоря, кривая, неограниченно приближаясь к своей асимптоте, может и пересекать ее, причем не в одной точке, как показано на приведенном ниже графике функции $y = x + e^{-\frac{x}{3}} \sin x$. Ее наклонная асимптота $y = x$.



Рассмотрим подробнее методы нахождения асимптот кривых.

Вертикальные асимптоты

Из определения асимптоты следует, что если $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, то прямая $x = a$ – асимптота кривой $y = f(x)$.

Например, для функции $f(x) = \dfrac{2}{x-5}$ прямая $x = 5$ является вертикальной асимптотой.

Наклонные асимптоты

Пусть прямая $y = kx + b$ – асимптота кривой. Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(kx+b)]=0$. Для точного определения этой прямой необходимо найти способ вычисления коэффициентов k и b.

В полученном выражении выносим за скобки x:

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0.$$

Т.к. $x\to\infty$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0$.

Т.к. b = const, то $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{b}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to\infty}k=k$.

Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}-k-0=0$, следовательно, $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$.

Т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-(kx+b)\right]=0$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]-\lim\limits_{x\to\infty}b=0$.

Следовательно, $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]$.

Отметим, что горизонтальные асимптоты являются частным случаем наклонных асимптот при k =0.

Пример. Найти асимптоты и построить график функции $y=\frac{x^2+2x-1}{x}$.

Область определения функции $y=\frac{x^2+2x-1}{x}$

$D(x)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

$$\lim_{x\to0+0}\frac{x^2+2x-1}{x}=\lim_{x\to0+0}\left(\frac{x^2}{x}+\frac{2x}{x}+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0+0}\left(x+2+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{+0}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to0-0}\frac{x^2+2x-1}{x}=\lim_{x\to0-0}\left(\frac{x^2}{x}+\frac{2x}{x}+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0-0}\left(x+2+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{-0}=-\infty.$$

Следовательно, x = 0 – вертикальная асимптота.

Найдем наклонные асимптоты.

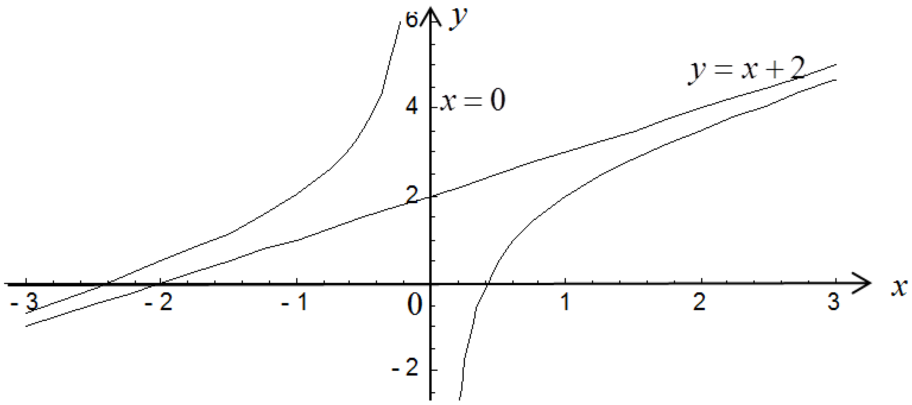
$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+2x-1}{x}}{x}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-1}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1-x^2}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)=2.$$

Таким образом, прямая $y=x+2$ является наклонной асимптотой.

Построим график функции.



Пример. Найти асимптоты и построить график функции $y=\dfrac{9x}{9-x^2}$.

Область определения функции $y=\dfrac{9x}{9-x^2}$

$D(x)=(-\infty;-3)\cup(-3;3)\cup(3;+\infty).$

$$\lim_{x\to-3+0}\frac{9x}{9-x^2}=\frac{9(-3)}{9-(-3+0)^2}=\frac{-27}{+0}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to-3-0}\frac{9x}{9-x^2}=\frac{9(-3)}{9-(-3-0)^2}=\frac{-27}{-0}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to3+0}\frac{9x}{9-x^2}=\frac{9\cdot3}{9-(3+0)^2}=\frac{27}{-0}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to3-0}\frac{9x}{9-x^2}=\frac{9\cdot3}{9-(3-0)^2}=\frac{27}{+0}=+\infty.$$

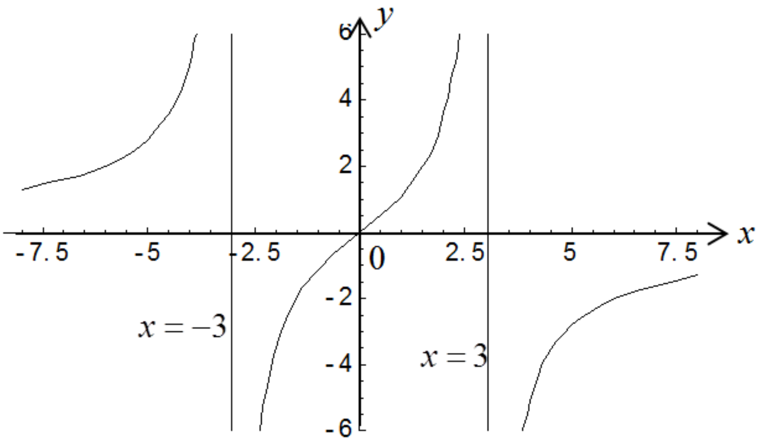
Следовательно, $x=3$ и $x=-3$ – вертикальные асимптоты кривой.

Найдем наклонные асимптоты.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{9}{9-x^2}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{9x}{9-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{9}{x}}{\frac{9}{x^2}-1}=0,$$

$y=0$ – горизонтальная асимптота.



Пример. Найти асимптоты и построить график функции $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x+2}$.

Область определения функции $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x+2}$

$D(x)=(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$.

$$\lim_{x\to-2+0}\frac{x^2-2x+3}{x+2}=\frac{(-2)^2-2\cdot(-2)+3}{(-2+0)+2}=\frac{11}{+0}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to-2-0}\frac{x^2-2x+3}{x+2}=\frac{(-2)^2-2\cdot(-2)+3}{(-2-0)+2}=\frac{11}{-0}=-\infty.$$

Прямая $x=-2$ является вертикальной асимптотой кривой.

Найдем наклонные асимптоты.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3}{x(x+2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3}{x^2+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+3}{x+2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+3-x^2-2x}{x+2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-4x+3}{x+2}=$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-4+\frac{3}{x}}{1+\frac{2}{x}} = -4.$$

Итак, прямая $y = x - 4$ является наклонной асимптотой.

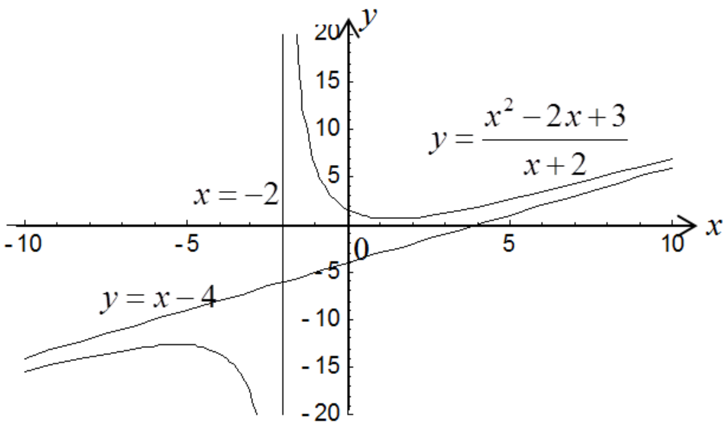


Схема исследования функций

Процесс исследования функции состоит из нескольких этапов.

Общая схема исследования функции

1. Найти область определения функции $D(y)$.
2. Выделить особенности функции (четность, нечетность, периодичность).
3. Найти вертикальные и горизонтальные асимптоты (исследовать поведение функции на концах интервалов из области определения с помощью пределов, сделать выводы о непрерывности функции, характере точек разрыва).
4. Найти промежутки монотонности, точки экстремума.
5. Найти промежутки выпуклости, вогнутости, точки перегиба.
6. Определить точки пересечения графика с осями координат.
7. Если есть необходимость, можно составить таблицу дополнительных точек.
8. Построить график.

Применение этой схемы рассмотрим на примере.

Пример. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ и построить ее график.

1. Находим область существования функции. Очевидно, что *областью определения* функции является область (-∞; -1) ∪ (-1; 1) ∪ (1; ∞).

2. Выделим особенности функции.

$y(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = \dfrac{-x^3}{x^2 - 1} = -\dfrac{x^3}{x^2 - 1} = -y(x)$– функция нечетная, непериодическая.

3. Найдем вертикальные асимптоты.

$$\lim_{x \to -1+0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{(-1)^3}{(-1+0)^2 - 1} = \frac{-1}{-0} = +\infty,$$

$$\lim_{x \to -1-0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{(-1)^3}{(-1-0)^2 - 1} = \frac{-1}{+0} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{1^3}{(1+0)^2 - 1} = \frac{1}{+0} = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{1^3}{(1-0)^2 - 1} = \frac{1}{-0} = -\infty.$$

Прямые $x = 1$ и $x = -1$ являются *вертикальными асимптотами* кривой.

4. Теперь найдем *наклонные асимптоты*.

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 0.$$

Итого, уравнение наклонной асимптоты $y = x$.

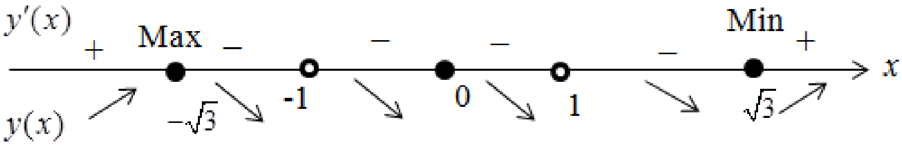
5. Найдем *промежутки монотонности* и *точки экстремума.*

Найдем производную функции.

$$y' = \frac{3x^2(x^2 - 1) - 2x \cdot x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2},$$

$$y' = 0 \Rightarrow \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^4 - 3x^2 = 0 \\ x^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}, \\ x \neq 1, x \neq -1. \end{cases}$$

Находим промежутки *возрастания* и *убывания* функции. Для этого определяем знаки производной функции на промежутках.



Таким образом, на промежутках $\left(-\sqrt{3};-1\right)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup\left(1;\sqrt{3}\right)$ функция убывает, а на промежутке $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right)$ – возрастает.

Найдем значение функции в точках, где производная равна 0.

$$y\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{\left(-\sqrt{3}\right)^3}{\left(-\sqrt{3}\right)^2 - 1} = \frac{-3\sqrt{3}}{3-1} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left(-\sqrt{3};-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$ – точка максимума,

$$y\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^3}{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 1} = \frac{3\sqrt{3}}{3-1} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left(\sqrt{3};\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$ – точка минимума.

6. Найдем промежутки выпуклости, вогнутости точки перегиба.

Найдем вторую производную функции

$$y'' = \frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2 - (x^4-3x^2)4x(x^2-1)}{(x^2-1)^4} =$$

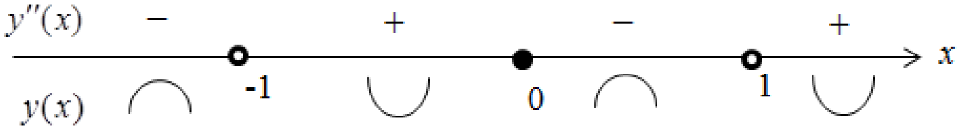
$$= \frac{(4x^3-6x)(x^4-2x^2+1) - (x^4-3x^2)(4x^3-4x)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{4x^7 - 8x^5 + 4x^3 - 6x^5 + 12x^3 - 6x - 4x^7 + 4x^5 + 12x^5 - 12x^3}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{2x^5 + 4x^3 - 6x}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^4+2x^2-3)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+3)(x^2-1)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

$$y'' = 0 \;\Rightarrow\; \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} 2x(x^2+3) = 0 \\ x^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = 0, \\ x \neq \pm 1. \end{cases}$$

Определим выпуклость и вогнутость кривой на промежутках.



Таким образом, на промежутках $(-\infty;-1)\cup(0;1)$ функция выпуклая, на промежутке $(-1;0)\cup(1;+\infty)$ – вогнутая.

Найдем значение функции в точках, где вторая производная равна 0.

$$y(0)=\frac{(0)^3}{(0)^2-1}=0\Rightarrow(0;0)\text{– точка перегиба.}$$

7. Определим точки пересечения графика с осями координат:

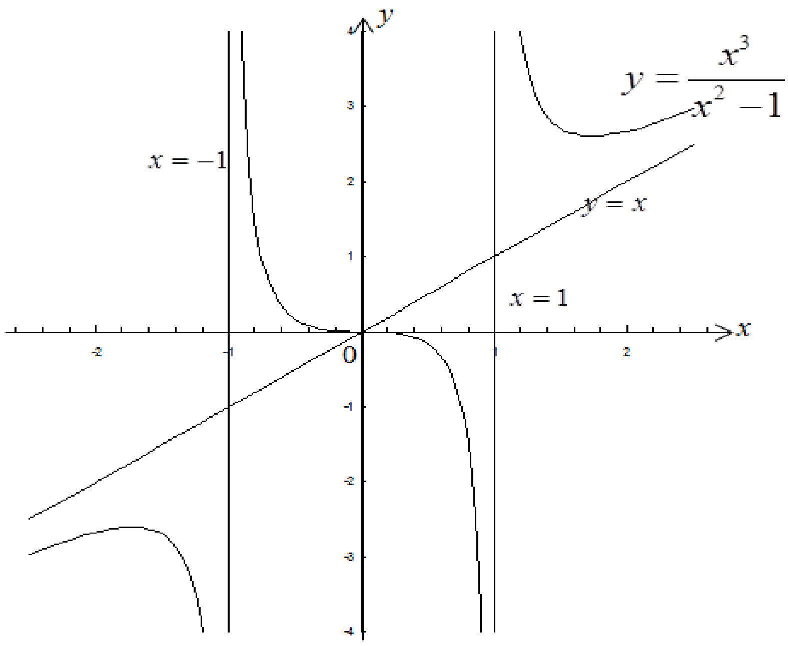
пересечение с OX

$$\begin{cases} y=0 \\ y=\dfrac{x^3}{x^2-1} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y=0 \\ \dfrac{x^3}{x^2-1}=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}\Rightarrow(0;0)\text{ – точка пересечения с } OX;$$

пересечение с OY

$$\begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{x^3}{x^2-1} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{0^3}{0^2-1} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}\Rightarrow(0;0)\text{ – точка пересечения с } OY.$$

8. Построим график функции.



ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Практическое занятие № 1

Производные элементарных функций. Таблица производных. Производные суммы, произведения и частного. Производная сложной и обратной функции. Логарифмическая производная

Обучающий пример. Найти производную функции $y = \sin^2 2x + \cos(4x+7)$.

Сначала преобразуем данную функцию:

$$y' = \left(\sin^2 2x + \cos(4x+7)\right)' = \left(\sin^2 2x\right)' + \left(\cos(4x+7)\right)' =$$

$$= 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x \cdot (2x)' - \sin(4x+7) \cdot (4x+7)' =$$

$$= 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x \cdot 2 - 4 \cdot \sin(4x+7) = 2\sin 4x - 4\sin(4x+7).$$

Обучающий пример. Найти производную функции $y = \dfrac{x^3 e^{x^2}}{\sqrt{x+1}}$.

$$y' = \left(\frac{x^3 e^{x^2}}{\sqrt{x+1}}\right)' = \frac{\left(x^3 e^{x^2}\right)'\left(\sqrt{x+1}\right) - \left(\sqrt{x+1}\right)' \cdot \left(x^3 e^{x^2}\right)}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2} =$$

$$\frac{\left(3x^2 e^{x^2} + x^3 2x e^{x^2}\right) \cdot \left(\sqrt{x+1}\right) - \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot (1+0) \cdot x^3 e^{x^2}}{(\sqrt{x+1})^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{x^2 e^{x^2}\left(\left(3+2x^2\right)\cdot\left(2x+2\right) - x\right)}{2\sqrt{x+1}}}{x+1} = \frac{x^2 e^{x^2}\left(6x + 4x^3 + 6 + 4x^2 - x\right)}{2\sqrt{(x+1)^3}} =$$

$$= \frac{x^2 e^{x^2}\left(5x + 4x^3 + 6 + 4x^2\right)}{2\sqrt{(x+1)^3}}.$$

Обучающий пример. Найти производную функции $y = \ln \operatorname{ctg} \dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{\cos x}$.

$$y' = \frac{1}{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}} \cdot \left(\frac{-1}{\sin^2 \frac{x}{2}} \right) \cdot \frac{1}{2} - \frac{\cos x - x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{-1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} - \frac{\cos x + x\sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{-1}{\sin x} - \frac{\cos x + x\sin x}{\cos^2 x}.$$

Обучающий пример. Найти производную функции $y = \arccos\left(2\sqrt{x}\right)$.

$$y' = \left(\arccos\left(2\sqrt{x}\right)\right)' = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(2\sqrt{x}\right)^2}} \cdot \frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{-1}{\sqrt{1-4x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{-1}{\sqrt{x-4x^2}}.$$

Обучающий пример. Найти производную функции $y = \dfrac{x^2 5^{x^2}}{\ln x}$.

$$y' = \left(\frac{x^2 5^{x^2}}{\ln x} \right)' = \frac{\left(x^2 5^{x^2}\right)' \ln x - (\ln x)' \cdot x^2 5^{x^2}}{(\ln x)^2} =$$

$$\frac{\left(\left(x^2\right)' 5^{x^2} + \left(5^{x^2}\right)' x^2 \right) \ln x - (\ln x)' \cdot x^2 5^{x^2}}{(\ln x)^2} = \frac{\left(2x \cdot 5^{x^2} + 5^{x^2} \cdot \ln 5 \cdot 2x \cdot x^2\right)\ln x - \frac{1}{x} \cdot x^2 5^{x^2}}{(\ln x)^2} =$$

$$= \frac{\left(2x \cdot 5^{x^2} + 5^{x^2} \cdot \ln 5 \cdot 2x \cdot x^2\right)\ln x - \frac{1}{x} \cdot x^2 5^{x^2}}{(\ln x)^2} = \frac{5^{x^2} \cdot x \cdot \left(2\ln x + 2x^2 \cdot \ln x \cdot \ln 5 - 1\right)}{(\ln x)^2}$$

Обучающий пример. Найти производную функции $y = (\sin 3x)^{\arcsin x}$.

Прологарифмируем правую и левую части уравнения:
$\ln y = \ln(\sin 3x)^{\arcsin x}$.

Применим свойство логарифма $\log_a b^k = k \cdot \log_a b$:
$\ln y = \arcsin x \cdot \ln(\sin 3x)$.

Продифференцируем правую и левую часть уравнения:

$$(\ln y)' = \left(\arcsin x \cdot \ln(\sin 3x)\right)' = (\arcsin x)' \ln(\sin 3x) + \left(\ln(\sin 3x)\right)' \cdot \arcsin x,$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ln(\sin 3x) + \frac{1}{\sin 3x} \cdot \cos 3x \cdot 3 \cdot \arcsin x,$$

$$y' = y \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ln(\sin 3x) + \frac{1}{\sin 3x} \cdot \cos 3x \cdot 3 \cdot \arcsin x \right),$$

$$y' = (\sin 3x)^{\arcsin x} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ln(\sin 3x) + \frac{1}{\sin 3x} \cdot \cos 3x \cdot 3 \cdot \arcsin x \right).$$

Ответ: $y' = (\sin 3x)^{\arcsin x} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ln(\sin 3x) + 3 \cdot ctg 3x \cdot \arcsin x \right).$

Задачи для самостоятельного решения

Найти производную:

1. $y = 3x^2\sqrt{x} - 4x\sqrt[4]{x^3} + 9\sqrt[3]{x^2} - 6\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{4}{7x^2\sqrt[3]{x}}.$

Указание. Каждое слагаемое записать в виде степенной функции с дробным показателем степени.

Ответ: $y' = 7x\sqrt[3]{x} - 7\sqrt[4]{x^3} + \frac{6}{\sqrt[3]{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x\sqrt{x}} + \frac{4}{3x^3\sqrt[3]{x}}.$

2. $y = \sqrt[4]{\left(3 + 4\sqrt[3]{2x}\right)^3}$. **Ответ:** $y' = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{3 + 4\sqrt[3]{2x}}}.$

3. $y = \left(8x^3 - 21\right) \cdot \sqrt[3]{\left(7 + 4x^3\right)^2}$. **Ответ:** $y' = \frac{160x^5}{\sqrt[3]{7 + 4x^3}}$.

4. $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. **Ответ:** $y' = \frac{1}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$.

5. $y = \left(\cos^2 x + 2/3\right) \cdot \sin^3 x$. **Ответ:** $y' = 5\sin^2 x \cdot \cos^3 x$.

6. $y = tgx - ctgx - 2$. **Ответ:** $y' = \frac{4}{\sin^2 2x}$.

7. $y = arctg \frac{1}{1+x^2}$. **Ответ:** $y' = \frac{-2x}{2 + 2x^2 + x^4}$.

8. $y = \ln \frac{x^2 - 2}{\sqrt{\left(6 - 2x^2\right)^3}}$. **Ответ:** $y' = \frac{x^3}{\left(x^2 - 2\right)\left(3 - x^2\right)}$.

Указание. Целесообразно предварительно преобразовать функцию по свойству логарифмов: $y=\ln\left(x^2-2\right)-\dfrac{3}{2}\ln\left(6-2x^2\right)$.

9. $y=\dfrac{2(3x^3+4x^2-x-2)}{15\sqrt{1+x}}$. **Ответ:** $\dfrac{x\sqrt{x+1}}{2}$.

10. $y=x-\ln\left(2+e^x\right)+2\sqrt{e^{2x}+e^x+1}$.

Ответ: $\dfrac{2\cdot e^{2x}+e^x}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}-\dfrac{e^x}{e^x+2}+1$.

11. $y=\sqrt{x}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+a})-\sqrt{x+a}$. **Ответ:** $\dfrac{\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+5}\right)}{2\sqrt{x}}$.

12. $y=\sin\sqrt{3}+\dfrac{1}{3}\dfrac{\sin^2 3x}{3\cos 6x}$. **Ответ:** $\dfrac{\sin 6x}{3\left(\sin^2(6x)-1\right)}$.

13. $y=\dfrac{1}{24}(x^2+8)\sqrt{x^2-4}+\dfrac{x^4}{16}\arcsin\dfrac{2}{x}$.

Ответ: $\dfrac{x^3\sin\frac{2}{x}}{4}-\dfrac{x^2\cos\frac{2}{x}}{8}+\dfrac{x\sqrt{x^2-4}}{12}+\dfrac{x\left(\frac{x^2}{24}+\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{x^2-4}}$.

14. $y=\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\sqrt{1-x^2}$. **Ответ:** $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$.

Практическое занятие № 2

Правило Лопиталя

(неопределенности вида $0\cdot\infty,\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty$**,**

степенные неопределенности $0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty$**)**

Обучающий пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-2\text{arctg}x}{5^{\frac{1}{x}}-1}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi-2\text{arctg}x}{5^{\frac{1}{x}}-1}=\left(\frac{\pi-2\cdot\frac{\pi}{2}}{5^0-1}=\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\pi-2\text{arctg}x\right)'}{\left(5^{\frac{1}{x}}-1\right)'}.$$

$$f\left(x\right)=\pi-\text{arctg}x\Rightarrow f'(x)=-\frac{2}{1+x^2};\ g\left(x\right)=5^{\frac{1}{x}}-1\Rightarrow g'(x)=5^{\frac{1}{x}}\cdot\ln5\cdot\frac{-1}{x^2}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\pi-2\text{arctg}x\right)'}{\left(5^{\frac{1}{x}}-1\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{2}{1+x^2}}{5^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}\cdot\ln5}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x^2}{(1+x^2)5^{\frac{1}{x}}\cdot\ln5}\right]=\frac{2}{\ln5}.$$

Если при решении примера после применения правила Лопиталя попытка вычислить предел опять приводит к неопределенности, то правило Лопиталя может быть применено второй раз, третий и т.д., пока не будет получен результат. Естественно, это возможно только в том случае, если вновь полученные функции в свою очередь удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя.

Обучающий пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x}{x+e^x}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5e^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(5e^{\frac{x}{2}}\right)'}{\left(x+e^x\right)'}=\left[\begin{matrix}f'(x)=\frac{5}{2}e^{\frac{x}{2}}\\ g'(x)=1+e^x\end{matrix}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{2}e^{\frac{x}{2}}}{1+e^x}=$$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{5}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)'}{\left(1+e^x\right)'}=\left[\begin{matrix}f''(x)=\left(\frac{5}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)'=\frac{5}{4}e^{\frac{x}{2}}\\ g''(x)=e^x\end{matrix}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{4}e^{\frac{x}{2}}}{e^x}=\left[\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{4}}{e^{x-\frac{x}{2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{4}}{e^{\frac{x}{2}}}=\frac{\frac{5}{4}}{e^{\infty}}=\frac{\frac{5}{4}}{\infty}=0.$$

Следует отметить, что правило Лопиталя – всего лишь один из способов вычисления пределов. Часто в конкретном примере наряду с правилом Лопиталя может быть использован и какой-либо другой метод (замена переменных, домножение и др.).

Обучающий пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x-x}{x^2}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x-x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\operatorname{arctg}x-x\right)'}{\left(x^2\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-1-x^2}{1+x^2}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{2x\cdot\left(1+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{2\cdot\left(1+x^2\right)}=\frac{-0}{2\cdot\left(1+0\right)}=\frac{0}{2}=0.$$

Неопределенности вида 0^0; 1^{∞}; ∞^0 можно раскрыть с помощью логарифмирования. Такие неопределенности встречаются при нахождении пределов функций вида $y=\left[f(x)\right]^{g(x)}$, $f\left(x\right)>0$ вблизи точки a при $x\to a$.

Для нахождения предела такой функции достаточно найти предел функции $\ln y=\ln f\left(x\right)^{g(x)}=g\left(x\right)\cdot\ln f\left(x\right)$.

Обучающий пример. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x^{\sin x}$.

Здесь $y=x^{\sin x}$, $\ln y=\sin x\cdot\ln x$.

Тогда

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln y=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sin x\ln x=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\left(\ln x\right)'}{\left(\frac{1}{\sin x}\right)'}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1/x}{\frac{-1}{\sin^2 x}\cdot\cos x}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\sin^2 x}{x\cdot\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=-\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\left(\sin^2 x\right)'}{\left(x\cdot\cos x\right)'}=-\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{2\sin x\cos x}{1\cdot\cos x+x\cdot\left(-\sin x\right)}=$$

$$= \frac{2\sin 0 \cos 0}{1\cdot \cos 0 + 0\cdot(-\sin 0)} = \frac{0}{1+0} = 0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln y = \ln \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} y = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} y = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{\sin x} = 1.$

Задачи для самостоятельного решения

Найти предел по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}$. **Ответ:** $\dfrac{1}{120}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}$. **Ответ:** $\dfrac{1}{24}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x^2 - 1}{x^2}$. **Ответ:** 0.

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \cos x - x}{x^2}$. **Ответ:** 1.

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \cos x - x}{x^2}$. **Ответ:** ∞.

6. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$. **Ответ:** 1.

7. $\lim\limits_{x\to +0} (\sin x)^x$. **Ответ:** 1.

8. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$. **Ответ:** 1.

Практическое занятие № 3

Общая схема исследования и построения графика функции

Общая схема исследования функции

1. Найти область определения функции $D(y)$.
2. Выделить особенности функции (четность, нечетность, периодичность).
3. Найти вертикальные и горизонтальные асимптоты (исследовать поведение функции на концах интервалов из области определения с помощью пределов, сделать выводы о непрерывности функции, характере точек разрыва).
4. Найти промежутки монотонности, точки экстремума.
5. Найти промежутки выпуклости, вогнутости, точки перегиба.
6. Определить точки пересечения графика с осями координат.
7. Если есть необходимость, можно составить таблицу дополнительных точек.
8. Построить график.

Обучающий пример

Исследуйте функцию $y(x)=\dfrac{3x-2}{x^3}$ и постройте ее график.

1. Областью определения функции $y(x)=\dfrac{3x-2}{x^3}$ является область $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

2. Исследуем функцию на четность:

$y(-x)=\dfrac{3(-x)-2}{(-x)^3}=\dfrac{-3x-2}{-x^3}\neq y(x)$ – функция не является четной,

$y(-x)=\dfrac{3(-x)-2}{(-x)^3}=\dfrac{-3x-2}{-x^3}=-\dfrac{-3x-2}{x^3}\neq -y(x)$ – функция не является нечетной.

Функция не является периодической.

3. Найдем вертикальные асимптоты.

$x=0$ – вертикальная асимптота.

Исследуем поведение функции на концах интервалов из области определения с помощью пределов:

$\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{3x-2}{x^3}=\dfrac{-0-2}{(-0)^3}=\dfrac{-2}{-0}=+\infty$ – слева от вертикальной асимптоты график стремится к $+\infty$,

$\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{3x-2}{x^3}=\dfrac{+0-2}{(+0)^3}=\dfrac{-2}{0}=-\infty$ – справа от вертикальной асимптоты график стремится к $-\infty$,

$x=0$ – точка разрыва 2-го рода.

Найдем асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x-2}{x^3}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x-2}{x^4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x-2)'}{\left(x^4\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{4x^3}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{x^3}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x-2}{x^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{3x^2}=0,$$

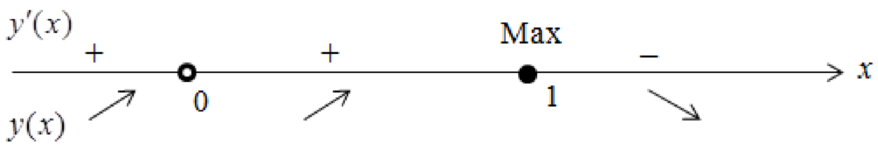
$y=0\cdot x-0=0\Rightarrow y=0$ – горизонтальная асимптота.

4. Найдем промежутки монотонности, точки экстремума.

$$y'(x)=\left(\frac{3x-2}{x^3}\right)'=\frac{(3x-2)'\cdot x^3-\left(x^3\right)'\cdot(3x-2)}{\left(x^3\right)^2}=\frac{3x^3-3x^2\cdot(3x-2)}{x^6}=$$

$$=\frac{3x^3-3x^2\cdot(3x-2)}{x^6}=\frac{3x^2\left(x-3x+2\right)}{x^6}=\frac{3(-2x+2)}{x^4},$$

$$y'(x)=0\Rightarrow\frac{3(-2x+2)}{x^4}=0\Rightarrow\begin{cases}-2x+2=0\\ x^4\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1,\\ x\neq 0.\end{cases}$$



Таким образом, на интервале $(-\infty;0)\cup(0;1)$ – функция возрастает, на интервале $(1;+\infty)$ – убывает.

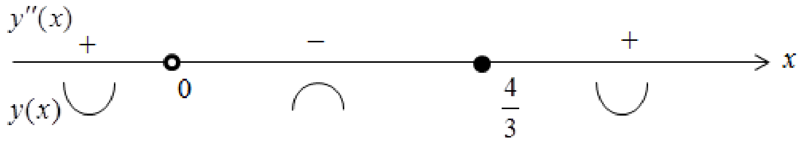
Вычислим точку максимума $y(1)=\frac{3x-2}{x^3}=\frac{3-2}{1}=1$, значит точка $(1;1)$ – точка максимума.

5. Найдем промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба.

$$y''(x)=\left(\frac{3(-2x+2)}{x^4}\right)'=\left(\frac{6(-x+1)}{x^4}\right)'=6\frac{(-x+1)'\cdot x^4-\left(x^4\right)'\cdot(-x+1)}{\left(x^4\right)^2}=$$

$$=6\cdot\frac{-x^4-4x^3\cdot(-x+1)}{\left(x^4\right)^2}=6\cdot\frac{-x^3\cdot(x-4x+4)}{x^8}=\frac{-6(-3x+4)}{x^5}=\frac{18x-24}{x^5},$$

$$y''(x)=0\Rightarrow\frac{18x-24}{x^5}=0\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{4}{3},\\ x\neq 0.\end{cases}$$



Таким образом, на интервале $(-\infty;0)\cup\left(\frac{4}{3};+\infty\right)$ – функция вогнутая, на интервале $\left(0;\frac{4}{3}\right)$ – функция выпуклая.

Вычислим точку перегиба:

$$y\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{3\cdot\frac{4}{3}-2}{\left(\frac{4}{3}\right)^3}=\frac{4-2}{\frac{64}{27}}=\frac{27\cdot 2}{64}=\frac{27}{32}=0{,}84375\approx 0{,}84.$$

Значит, точка $\left(\frac{4}{3};\frac{27}{32}\right)$ – точка перегиба.

6. Определим точки пересечения графика с осями координат:

пересечение с осью OX:

$$\begin{cases}y=\frac{3x-2}{x^3}\\ y=0\end{cases}\sim\begin{cases}\frac{3x-2}{x^3}=0\\ y=0\end{cases}\sim\begin{cases}\frac{3x-2}{x^3}=0\\ y=0\end{cases}\sim\begin{cases}x=\frac{2}{3},\\ y=0.\end{cases}$$

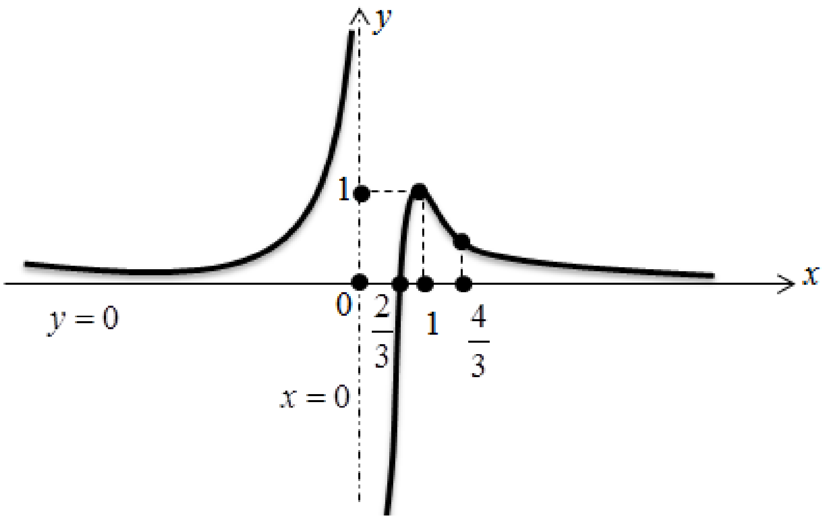
$\left(\frac{2}{3};0\right)$ – точка пересечения графика $y=\frac{3x-2}{x^3}$ с осью OX;

пересечение с осью *OY*:

$$\begin{cases} y = \dfrac{3x-2}{x^3} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{нет решений};$$

пересечений с *OY* у графика $y = \dfrac{3x-2}{x^3}$ нет.

7. Выполним построения графика функций.



Общая схема построения функции

1. Нанесите асимптоты.
2. Отметьте точки экстремума, точки перегиба, точки пересечения графика с осями координат.
3. Тонкой линией нанесите график функций в соответствии с промежутками монотонности.
4. Проверьте, совпадают ли у получившегося графика промежутки выпуклости, вогнутости с полученными в исследовании.
5. Уточните поведения функции на концах интервалов из области определения.
6. Обведите полученный график жирной линией.

Обучающий пример

Исследуйте функцию $y(x) = \sqrt{x^5 + 1}$ и постройте ее график.

1. Областью определения функции $y(x)=\sqrt{x^5+1}$ является область $D(y)=[-1;+\infty)$

2. Исследуем функцию на четность:

$y(-x)=\sqrt{(-x)^5+1}=\sqrt{-x^5+1}\neq y(x)$ – функция не является четной,

$y(-x)=\sqrt{(-x)^5+1}=\sqrt{-x^5+1}=-\left(-\sqrt{-x^5+1}\right)\neq -y(x)$ – функция не является нечетной.

Функция не является периодической.

3. Найдем вертикальные асимптоты.

Нет вертикальной асимптоты у рассматриваемого графика.

Найдем наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^5+1}}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^5+1}\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4}{2\sqrt{x^5+1}}=$$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(5x^4\right)'}{\left(2\sqrt{x^5+1}\right)'}=\ldots=\infty,$$

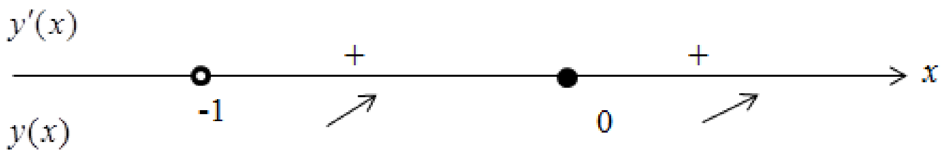
$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^5+1}-\infty\cdot x\right)=\infty.$$

Наклонных асимптот нет.

4. Найдем промежутки монотонности, точки экстремума.

$$y'(x)=\left(\sqrt{x^2+e^x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x^5+1}}\cdot\left(5x^4+0\right)=\frac{5x^4}{2\sqrt{x^5+1}},$$

$$y'(x)=0\Rightarrow\frac{5x^4}{2\sqrt{x^5+1}}=0\Rightarrow\begin{cases}5x^4=0\\ \sqrt{x^5+1}\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0,\\ x\neq -1.\end{cases}$$



Таким образом, на интервале $(-1;+\infty)$ – функция возрастает.

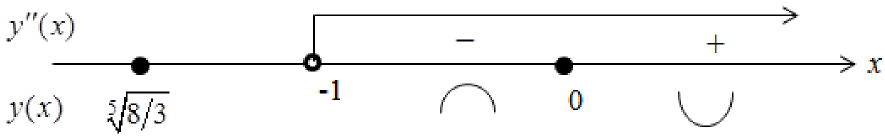
5. Найдем промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба.

$$y''(x)=\left(\frac{5x^4}{2\sqrt{x^5+1}}\right)'=\frac{20x^3\cdot 2\sqrt{x^5+1}-\frac{2}{2\sqrt{x^5+1}}\cdot 5x^4\cdot 5x^4}{\left(2\sqrt{x^5+1}\right)^2}=$$

$$=\frac{5x^3\left(3x^5+8\right)}{4\left(x^5+1\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$y''(x)=0\Rightarrow\frac{5x^3\left(3x^5+8\right)}{4\left(x^5+1\right)^{\frac{3}{2}}}=0\sim\begin{cases}5x^3\left(3x^5+8\right)=0\\ x^5+1\neq 0\end{cases}\sim\begin{cases}5x^3\left(3x^5+8\right)=0\\ x^5+1\neq 0\end{cases}\sim$$

$$\sim\begin{cases}x=0\cup x=-\sqrt[5]{8/3}\approx -1{,}2,\\ x\neq -1.\end{cases}$$



Таким образом, на интервале $(-1;0)$ – функция выпуклая, на интервале $(0;+\infty)$ – вогнутая.

Вычислим точку перегиба $y(0)=\sqrt{(0)^5+1}=\sqrt{0^5+1}=1$, значит, точка $(0;1)$ – точка перегиба.

6. Определим точки пересечения графика с осями координат:

пересечение с осью *OX*:

$$\begin{cases}y=\sqrt{x^5+1}\\ y=0\end{cases}\sim\begin{cases}\sqrt{x^5+1}=0\\ y=0\end{cases}\sim\begin{cases}x^5=-1\\ y=0\end{cases}\sim\begin{cases}x=-1,\\ y=0.\end{cases}$$

$(-1;0)$ – точка пересечения графика $y(x)=\sqrt{x^5+1}$ с осью *OX*;

пересечение с осью *OY*:

$$\begin{cases}y=\sqrt{x^5+1}\\ x=0\end{cases}\sim\begin{cases}y=1,\\ x=0.\end{cases}$$

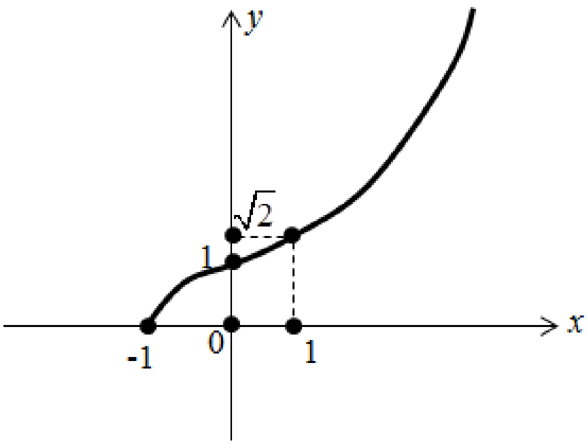
$(0;1)$ – точка пересечения графика $y(x)=\sqrt{x^5+1}$ с осью *OY*.

7. Найдем дополнительные точки.

$y(1)=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}\approx 1,4$;

$y(0)=\sqrt{0+1}=\sqrt{1}=1$.

8. Выполним построение графика функций.



Задачи для самостоятельного решения

Выполнить построение следующих графиков функций:

1. $y(x)=\dfrac{x^2+1}{x^3}$.
2. $y(x)=\dfrac{2x^2+1}{x}$.
3. $y(x)=\sqrt{2x^5+7}$.

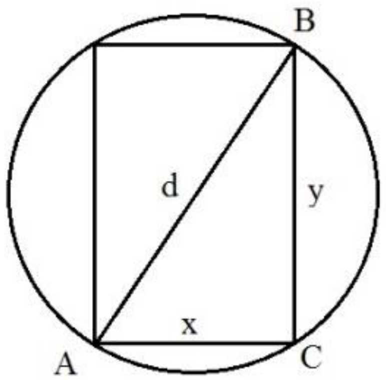
Практическое занятие № 4

Физические и механические приложения дифференциального исчисления

Обучающий пример

Известно, что прочность на горизонтальный изгиб балки прямоугольного горизонтального сечения пропорциональна произведению ширины балки на квадрат высоты. Найти отношение ширины к высоте поперечного сечения наиболее прочной балки, которую можно вырезать из цилиндрического бревна диаметром d см.

Пусть x см – ширина, y см – высота сечения балки.
По теореме Пифагора $d^2 = x^2 + y^2$.



Прочность σ балки определяется соотношением $\sigma = kxy^2$, где k – коэффициент прочности, зависящий от материала.
$\sigma = kxy^2 = kx\left(d^2 - x^2\right) = kxd^2 - kx^3$.

Исследуем функцию $\sigma = kxd^2 - kx^3$ на максимум и минимум:

1) $\sigma' = \left(kxd^2 - kx^3\right)' = kd^2 - k \cdot 3x^2 = kd^2 - 3kx^2$;

2) $\sigma' = 0 \Rightarrow kd^2 - 3kx^2 = 0$; $x^2 = \dfrac{d^2}{3} \Rightarrow x = \pm\dfrac{d}{\sqrt{3}}$;

3) $\sigma'' = \left(kd^2 - 3kx^2\right)' = -6kx$.

$\sigma''\left(\dfrac{d}{\sqrt{3}}\right) == -6k\dfrac{d}{\sqrt{3}} < 0$ – при $x = \dfrac{d}{\sqrt{3}}$ функция имеет максимум, балка – наибольшую прочность.

$\sigma''\left(-\frac{d}{\sqrt{3}}\right) = 6k\frac{d}{\sqrt{3}} > 0$ – при $x = -\frac{d}{\sqrt{3}}$ функция имеет минимум, но по условию задачи $x > 0$.

Вычислим высоту балки

$$y = \sqrt{d^2 - (\frac{d}{\sqrt{3}})^2} = \sqrt{\frac{3d^2 - d^2}{3}} = \frac{d\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Найдем отношение ширины к высоте поперечного сечения наиболее прочной балки

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{d}{\sqrt{3}}}{\frac{d\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx \frac{5}{7}.$$

Ответ: $\frac{5}{7}$.

Обучающий пример

Оборот предприятия за истекший год описывается через функцию $U(t) = 0{,}15t^3 - 2t^2 + 200$, где t – месяцы, U – бел. руб., млн. Исследуйте оборот предприятия.

Исследуем оборот предприятия с помощью производной: $U'(t) = 0{,}45t^2 - 4t$, $U''(t) = 0{,}9t - 4$, $U'''(t) = 0{,}9$. Момент наименьшего оборота при $U'(t) = 0$, т.е. при t = 8,9. Наименьший оборот приходился на девятый месяц. Первая производная показывает экстремальное изменение оборота. Из $U'(t) = 0 \Rightarrow t$ = 4,4. Поскольку $U'''(t) > 0$, значит, на пятом месяце имеется сильное снижение оборота**.**

Точки перегиба важны в экономике, т.к. именно по ним можно определить, в какой конкретно момент произошло изменение.

Например, по решению предложенной задачи можно сделать следующие выводы:

1. В начале исследуемого периода у предприятия наблюдалось снижение оборота.
2. Предприятие пыталось выйти из этого состояния и для этого использовало определенные средства.

Ответ: на пятом месяце (точка перегиба) что-то было предпринято и предприятие стало выходить из кризиса, на девятом месяце стало набирать обороты.

Обучающий пример

Нефтеперерабатывающий завод производит x т бензина в день. По договору он должен ежедневно поставлять автопаркам Республики Беларусь не менее 20 т бензина. Производственные мощности завода таковы, что выпуск бензина не может превышать 90 т в день. Определить, при каком объеме производства удельные затраты будут наибольшими (наименьшими), если функция затрат имеет вид: $K = -x^3 + 98x^2 + 200x$.

Удельные затраты составят $\frac{K}{x} = -x^2 + 98x + 200$.

Наша задача сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значения функции $Y = -x^2 + 98x + 200$.

$$Y' = \left(-x^2 + 98x + 200\right)' = -2x + 98,$$
$$Y' = 0 \;\Rightarrow\; -2x + 98 = 0,$$
$$-2x = -98,$$
$$x = 49.$$

Вычислим значение функции в точке $x = 49$ и на концах интервала $x = 20$, т.е. минимальное количество тонн бензина, которое необходимо поставлять в день автопаркам. $x = 90$ – максимальное количество тонн бензина, которое может произвести завод.

$$Y(20) = -20^2 + 98 \cdot 20 + 200 = -400 + 1960 + 200 = 1760,$$
$$Y(49) = -49^2 + 98 \cdot 49 + 200 = -2401 + 4820 + 200 = 2601,$$
$$Y(90) = -90^2 + 98 \cdot 90 + 200 = -8100 + 8820 + 200 = 920.$$

Таким образом, при выпуске 49 т бензина в день удельные издержки максимальны, это экономически не выгодно; при выпуске 90 т в день – минимальны. Следовательно, можно посоветовать работать заводу на предельной мощности, при этом находить возможности усовершенствования технологии, т.к. дальше будет действовать закон убывающей доходности и без реконструкции нельзя будет увеличить выпуск продукции.

Задачи для самостоятельного решения

1. Чтобы уменьшить трение жидкости о стенки и дно канала, нужно смачиваемую ею площадь сделать возможно малой. Требуется найти размеры открытого прямоугольного канала с площадью сечения 4,5 м^2, при которых смачиваемая площадь будет наименьшей.

2. Расход горючего легкового автомобиля (1 л на 100 км) в зависимости от скорости X км/ч при движении на 4-й передаче приблизительно описывается функцией $F(x) = 0,007x - 0,18x + 10,2$, $x > 30$. При какой скорости расход горючего будет наименьшим?

3. Участок площадью 2400 м^2 надо разбить на два участка прямоугольной формы так, чтобы длина изгороди была наименьшей. Найти размеры участков.

4. Участок прямоугольной формы одной стороной прилегает к зданию. При заданных размерах периметра 20 м надо огородить участок так, чтобы площадь была наибольшей. Найти длины сторон участка.

5. Над центром круглого стола радиуса r висит лампа. На какой высоте следует подвесить эту лампу, чтобы на краях стола получить наибольшую освещенность?

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ВНЕАУДИТОРНОЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

I. Найти производные следующих функций:

а) $y = x^3 \cdot \cos^2 x$;

$$y' = \left(x^3 \cdot \cos^2 x\right)' = 3x^2 \cos x + x^3 2\cos x \cdot \left(-\sin x\right) = 3x^2 \cos^2 x - x^3 \sin 2x;$$

б) $y = \arcsin\left(\ln x\right) + 5^x tg\left(2x\right)$;

$$y' = \left(\arcsin\left(\ln x\right) + 5^x tg\left(2x\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\ln x\right)^2}}\frac{1}{x} + 5^x \ln 5 \cdot tg\left(2x\right) + 5^x \frac{1}{\cos^2 2x}2;$$

в) $y = \sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$;

$$y' = \left(\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}}\frac{-2x\left(1+x^2\right) - 2x\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2} = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2};$$

г) $y = \dfrac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}$;

$$y' = \left(\frac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x\sqrt{1-3x^4} - \dfrac{-12x^3 \cdot x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}}{1-3x^4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4x(1-3x^4) + 12x^5}{2\sqrt{(1-3x^4)^3}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4x - 12x^5 + 12x^5}{2\sqrt{(1-3x^4)^3}} = \frac{x}{\sqrt{(1-3x^4)^3}};$$

д) $y = \left(\sin\left(6x+5\right)\right)^{\ln \arcsin 8x}$;

$$\ln y = \ln\left(\sin\left(6x+5\right)\right)^{\ln \arcsin 8x} \Rightarrow \ln y = \ln \arcsin 8x \cdot \ln\left(\sin\left(6x+5\right)\right),$$

$$\left(\ln y\right)' = \left(\ln \arcsin 8x \cdot \ln\left(\sin\left(6x+5\right)\right)\right)',$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \left(\ln \arcsin 8x\right)' \cdot \ln\left(\sin\left(6x+5\right)\right) + \left(\ln\left(\sin\left(6x+5\right)\right)\right)' \cdot \ln \arcsin 8x,$$

$$y' = y \cdot \left(\frac{1}{\arcsin 8x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-64x^2}} \cdot 8 \cdot \ln\left(\sin\left(6x+5\right)\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sin\left(6x+5\right)} \cdot \cos\left(6x+5\right) \cdot 6 \cdot \ln \arcsin 8x \right),$$

$$y' = \left(\sin\left(6x+5\right)\right)^{\ln \arcsin 8x} \cdot \left(\frac{8 \cdot \ln\left(\sin\left(6x+5\right)\right)}{\arcsin 8x \cdot \sqrt{1-64x^2}} + \frac{6 \cdot \cos\left(6x+5\right) \cdot \ln \arcsin 8x}{\sin\left(6x+5\right)} \right).$$

II. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

а) $y = \dfrac{\ln x}{x} + \sqrt{x} \cdot e^x$;

$$y' = \left(\frac{\ln x}{x} + \sqrt{x} \cdot e^x \right)' = \frac{1-\ln x}{x^2} + \frac{e^x}{2\sqrt{x}} + e^x \cdot \sqrt{x},$$

$$y'' = \left(\frac{1-\ln x}{x^2} + \frac{e^x}{2\sqrt{x}} + e^x \cdot \sqrt{x} \right)' = \frac{-3+2\ln x}{x^3} + \frac{2e^x x - e^x}{4x\sqrt{x}} + e^x\sqrt{x} + \frac{e^x}{2\sqrt{x}};$$

б) $\begin{cases} x = t^2, \\ y = \dfrac{t}{3-t}; \end{cases}$

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = \dfrac{t}{3-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \left(t^2\right)' \\ y' = \left(\dfrac{t}{3-t}\right)' \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} x' = 2t \\ y' = \left(\dfrac{t}{3-t}\right)' \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} x' = 2t \\ y' = \dfrac{3}{\left(3-t\right)^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\dfrac{3}{\left(3-t\right)^2}}{2t} = \frac{3}{2t\left(3-t\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y''_x = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} = \frac{\left(\dfrac{3}{2t\left(3-t\right)^2}\right)'}{2t} = \frac{-9\left(1-t\right)}{4t^3\left(3-t\right)^3}.$$

III. Определить наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x^2 + 1$ на отрезке [-1; 4].

Вычислим производную:

$$y' = \left(x^3 - 3x^2 + 1\right)' = 3x^2 - 6x.$$

Приравняем ее к нулю:

$$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 2. \end{cases}$$

Уточним, какие из точек принадлежат отрезку [-1; 4].

В рассматриваемом примере и $x = 0$, и $x = 2$ входят в рассматриваемый интервал.

Вычислим значение функции в найденных точках и на концах интервала:

$$y(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 1 = -1 + 3 + 1 = 3,$$
$$y(0) = (0)^3 - 3(0)^2 + 1 = 0 + 0 + 1 = 1,$$
$$y(2) = (2)^3 - 3(2)^2 + 1 = 8 - 6 + 1 = 3,$$
$$y(4) = (4)^3 - 3(4)^2 + 1 = 64 - 48 + 1 = 17.$$

Таким образом, проанализировав полученные данные, делаем вывод, что наибольшее значение $y(4) = 17$ функция принимает при $x = 4$, наименьшее $y(0) = 1$ при $x = 0$.

IV. Вычислить приближенно значение числа $\sqrt{8{,}76}$ (с помощью дифференциала).

Воспользуемся формулой $y(x) = y(x_0 + \Delta x) = y(x_0) + y'(x_0) \cdot \Delta x$.

Пусть $x = 8{,}76 \Rightarrow x_0 = 9,\ \Delta x = 0{,}24$.

$$\sqrt{8{,}76} = \sqrt{9 + (-0{,}24)} \approx \sqrt{9} + \frac{1}{2\sqrt{9}} \cdot (-0{,}24) = 3 + \frac{1}{3}(-0{,}12) = 3 - 0{,}04 = 2{,}96.$$

V. Найти касательную к гиперболе $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{7} = 1$, перпендикулярную прямой $2x + 4y - 3 = 0$.

1. Найдем угловой коэффициент прямой:

$$y = \frac{3 - 2x}{4} = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \Rightarrow k = -\frac{1}{2},$$

т.к. если прямые перпендикулярные, то выполняется условие

$k_1 \cdot k_2 = -1 \Rightarrow -\dfrac{1}{2} \cdot k_2 = -1 \Rightarrow k_2 = 2$ – угловой коэффициент искомой касательной.

$$y = \pm\sqrt{7 \cdot \left(\frac{x^2}{2} - 1\right)} = \pm\sqrt{\frac{7x^2}{2} - 7}.$$

2. Вычислим производные:

$$y_1' = \left(\sqrt{\frac{7x^2}{2} - 7}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{7x^2}{2} - 7}} \cdot \frac{7 \cdot 2x}{2} = \frac{x\sqrt{14}}{2\sqrt{x^2 - 2}},$$

$$y_2' = \left(-\sqrt{\frac{7x^2}{2} - 7}\right)' = -\frac{1}{2\sqrt{\frac{7x^2}{2} - 7}} \cdot \frac{7 \cdot 2x}{2} = -\frac{x\sqrt{14}}{2\sqrt{x^2 - 2}}.$$

3. Согласно геометрическому смыслу производной

$$y'(x_0) = k \Rightarrow \frac{x\sqrt{14}}{2\sqrt{x^2 - 2}} = 2 \text{ и } \frac{-x\sqrt{14}}{2\sqrt{x^2 - 2}} = 2,$$

$$\left(\frac{x\sqrt{14}}{2\sqrt{x^2 - 2}}\right)^2 = (2)^2 \text{ и } \left(-\frac{x\sqrt{14}}{2\sqrt{x^2 - 2}}\right)^2 = (2)^2,$$

$$\frac{14x^2}{4(x^2 - 2)} = 4 \Rightarrow \begin{cases} 14x^2 - 4 \cdot 4(x^2 - 2) = 0 \\ x^2 - 2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 4, \\ x \neq \pm\sqrt{2}. \end{cases}$$

4. Запишем уравнение касательных в точке $x_0 = 4$:

$$y(4) = \sqrt{\frac{7(4)^2}{2} - 7} = 7, y'(4) = 2 \Rightarrow y - 7 = 2(x - 4) \Rightarrow y = 2x - 1,$$

$$y(4) = -\sqrt{\frac{7(4)^2}{2} - 7} = -7, y'(4) = 2 \Rightarrow y + 7 = 2(x - 4) \Rightarrow y = 2x - 15.$$

5. Запишем уравнение касательных в точке $x_0 = -4$

$$y(-4) = \sqrt{\frac{7(-4)^2}{2} - 7} = 7, y'(-4) = 2 \Rightarrow y - 7 = 2(x + 4) \Rightarrow y = 2x + 15,$$

$$y(-4)=-\sqrt{\frac{7(-4)^2}{2}-7}=-7, y'(-4)=2\Rightarrow y+7=2(x+4)\Rightarrow y=2x+1.$$

Ответ: $y=2x-1$, $y=2x-15$, $y=2x+15$, $y=2x+1$.

VI. Газовая смесь состоит из оксида азота и кислорода. Требуется найти концентрацию кислорода, при которой содержащийся в смеси оксид азота окисляется с наибольшей скоростью.

Напишем уравнение реакции окисления оксида азота кислородом:

$$2NO + O_2 = 2NO_2.$$

Пусть x – концентрация оксида азота, y – концентрация кислорода, тогда скорость реакции

$$\vartheta=k\cdot x^2\cdot y,$$

где k – константа скорости реакции, зависящая только от температуры и не зависящая от концентрации реагирующих веществ. Концентрацию газов выразим в объемных процентах. Весь объем газовой смеси возьмем за 100%. В этом случае

$y=100-x$ и $\vartheta=kx^2(100-x)$,

где x принадлежит $[0;\ 100]$.

Найдем наибольшую скорость

$$\vartheta'(x)=\left(kx^2(100-x)\right)'=\left(100kx^2-kx^3\right)'=200kx-3kx^2,$$

$$\vartheta'(x)=0\Rightarrow 200kx-3kx^2=0.$$

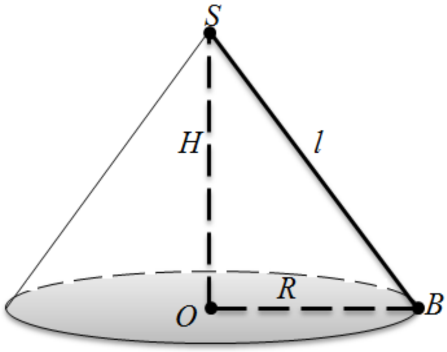
$$kx(200-3x)=0\Rightarrow\begin{cases}kx=0\\200-3kx=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0,\\x=\dfrac{200}{3}\approx 66,7.\end{cases}$$

$$y=100-66,7=33,3.$$

Ответ: при концентрации O_2, равной 33,3%, оксид азота окисляется с наибольшей скоростью.

VII. Фильтр-грязеуловитель объемом V имеет форму прямого конуса. Каково должно быть отношение высоты конуса к радиусу его основания, чтобы на фильтр пошло наименьшее количество материала.

1. Выполним схематический чертеж.



2. Пусть H – высота конуса, R – радиус его основания, l – образующая.

3. Из формулы объема $V=\frac{1}{3}\pi R^2 H$ выразим $H=\frac{3V}{\pi R^2}$.

4. Рассмотрим ΔSOB. По теореме Пифагора

$$l=\sqrt{H^2+R^2}=\sqrt{\frac{9V^2}{R^4\pi^2}+R^2}=\sqrt{\frac{9V^2+R^6\pi^2}{R^4\pi^2}}=\frac{\sqrt{9V^2+R^6\pi^2}}{R^2\pi}.$$

5. Подставим все данные в формулу

$$S_б=\pi Rl=\pi R\frac{\sqrt{9V^2+R^6\pi^2}}{R^2\pi}=\frac{\sqrt{9V^2+R^6\pi^2}}{R}.$$

6. Найдем производную:

$$S'_б=\left(\frac{\sqrt{9V^2+R^6\pi^2}}{R}\right)'=\frac{\left(\sqrt{9V^2+R^6\pi^2}\right)'\cdot R-(R)'\cdot\sqrt{9V^2+R^6\pi^2}}{R^2}=$$

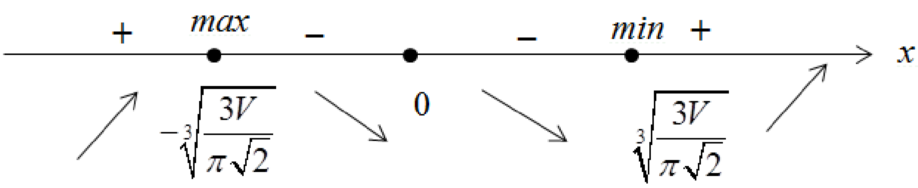
$$=\frac{\frac{1}{2\sqrt{9V^2+R^6\pi^2}}\cdot 6R^5\cdot\pi^2\cdot R-\sqrt{9V^2+R^6\pi^2}}{R^2}=\frac{6R^6\cdot\pi^2-2\cdot\left(9V^2+R^6\pi^2\right)}{2R^2\sqrt{9V^2+R^6\pi^2}}=$$

$$=\frac{6R^6\cdot\pi^2-2\left(9V^2+R^6\pi^2\right)}{2R^2\sqrt{9V^2+R^6\pi^2}}=\frac{6R^6\cdot\pi^2-18V^2-2R^6\pi^2}{2R^2\sqrt{9V^2+R^6\pi^2}}=\frac{4R^6\cdot\pi^2-18V^2}{2R^2\sqrt{9V^2+R^6\pi^2}}.$$

7. Приравняем ее к нулю:

$$S'=0\Rightarrow\frac{4R^6\cdot\pi-18V^2}{2R^2\sqrt{9V^2+R^6\pi^2}}=0\Rightarrow\begin{cases}4R^6\cdot\pi-18V^2=0\\2R^2\sqrt{9V^2+R^6\pi^2}\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}R=\pm\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi\sqrt{2}}},\\R\neq 0.\end{cases}$$

8. Нанесем найденные значения на числовую прямую и определим знак на каждом промежутке.



Так как в точке $R=\sqrt[3]{\dfrac{3V}{\pi\sqrt{2}}}$ функция принимает минимальное значение, то при нем на шатер пойдет наименьшее количество полотна.

9. Вычислим высоту конуса:

$$H=\frac{3V}{\pi R^2}=\frac{3V}{\pi\left(\sqrt[3]{\dfrac{3V}{\pi\sqrt{2}}}\right)^2}.$$

10. Найдем отношение высоты конуса-фильтра к радиусу его основания:

$$\frac{H}{R}=\frac{\dfrac{3V}{\pi\left(\sqrt[3]{\dfrac{3V}{\pi\sqrt{2}}}\right)^2}}{\sqrt[3]{\dfrac{3V}{\pi\sqrt{2}}}}=\frac{3V}{\pi\left(\sqrt[3]{\dfrac{3V}{\pi\sqrt{2}}}\right)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\dfrac{3V}{\pi\sqrt{2}}}}=\frac{3V}{\pi\cdot\left(\dfrac{3V}{\pi\sqrt{2}}\right)}=\sqrt{2}.$$

Ответ: $\sqrt{2}$.

VIII. Пользуясь правилом Лопиталя, вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{\sin x}\right)$;

$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x}=\left(\frac{\cos 0-1}{\sin 0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x}=\frac{-\sin 0}{\cos 0}=\frac{0}{1}=0;$$

б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg}\pi x}\right)$;

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg}\pi x}=\left(\frac{\ln(1-1)}{\operatorname{ctg}(\pi\cdot 1)}=\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\ln(x-1)\right)'}{\left(\operatorname{ctg}\pi x\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{\sin^2\pi x}\cdot\pi}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-\sin^2\pi x}{\pi\cdot(x-1)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\left(-\sin^2\pi x\right)'}{\left(\pi\cdot(x-1)\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{-2\sin\pi x\cdot\cos\pi x\cdot\pi}{\pi}=$$

$$=-2\sin\pi\cdot\cos\pi=0.$$

Ответ: 0, 0.

IX. Исследовать функцию $y=\frac{x^3+4}{x^2}$ и построить ее график.

1. Областью определения функции $y=\frac{x^3+4}{x^2}$ является область $D(y)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$.

2. Исследуем функцию на четность:

$y(-x)=\frac{(-x)^3+4}{(-x)^2}=\frac{-x^3+4}{x^2}\neq y(x)$ – функция не является четной;

$y(-x)=\frac{(-x)^3+4}{(-x)^2}=\frac{-x^3+4}{x^2}=-\frac{x^3-4}{x^2}\neq -y(x)$ – функция не является нечетной.

Функция не является периодической.

3. Найдем вертикальные асимптоты.

$x=0$ – вертикальная асимптота.

Исследуем поведение функции на концах интервалов из области определения с помощью пределов:

$\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{x^3+4}{x^2}=\frac{-0+4}{(-0)^2}=\frac{4}{0}=+\infty$ – слева от вертикальной асимптоты график стремится к $+\infty$;

$\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{x^3+4}{x^2}=\frac{+0+4}{(+0)^2}=\frac{4}{0}=+\infty$ – справа от вертикальной асимптоты график стремится к $+\infty$;

$x=0$ – точка разрыва 2-го рода.

Найдем наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3+4}{x^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4}{x^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^3+4\right)'}{\left(x^3\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{3x^2}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+4}{x^2}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4-x^3}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^3}=0,$$

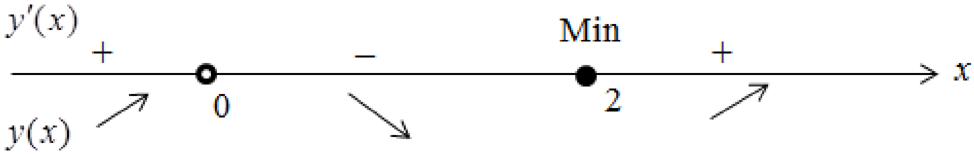
$y=1\cdot x+0\Rightarrow y=x$ – наклонная асимптота.

4. Найти промежутки монотонности, точки экстремума.

$$y'(x)=\left(\frac{x^3+4}{x^2}\right)'=\frac{\left(x^3+4\right)'\cdot x^2-\left(x^2\right)'\cdot\left(x^3+4\right)}{\left(x^2\right)^2}=\frac{3x^4-2x\cdot\left(x^3+4\right)}{x^4}=$$

$$=\frac{x\left(3x^3-2x^3-8\right)}{x^4}=\frac{x^3-8}{x^3}.$$

$$y'(x)=0\Rightarrow\frac{x^3-8}{x^3}=0\Rightarrow\begin{cases}x^3-8=0\\x^3\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2,\\x\neq 0.\end{cases}$$



Таким образом, на интервале $(-\infty;\ 0)\cup(2;\ +\infty)$ функция возрастает, на интервале $(0;2)$ – убывает.

Вычислим точку минимума:

$$y(2)=\frac{(2)^3+4}{(2)^2}=\frac{8+4}{4}=3,$$

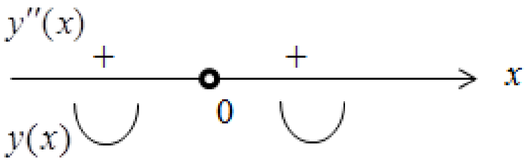
значит, точка $(2;\ 3)$ – точка минимума.

5. Найдем промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба.

$$y''(x)=\left(\frac{x^3-8}{x^3}\right)'=\frac{\left(x^3-8\right)'\cdot x^3-\left(x^3\right)'\cdot\left(x^3-8\right)}{\left(x^3\right)^2}=\frac{3x^5-3x^2\left(x^3-8\right)}{\left(x^3\right)^2}=$$

$$=\frac{24x^2}{x^6}=\frac{24}{x^4}.$$

$$y''(x)=0 \Rightarrow \frac{24}{x^4}=0 \Rightarrow x \neq 0.$$



Таким образом, на интервале $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$ функция вогнутая.

6. Определим точки пересечения графика с осями координат:
пересечение с осью OX:

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^3+4}{x^2} \\ y=0 \end{cases} \sim \begin{cases} \dfrac{x^3+4}{x^2}=0 \\ y=0 \end{cases} \sim \begin{cases} x=-\sqrt[3]{4}\approx -1{,}6, \\ y=0, \end{cases}$$

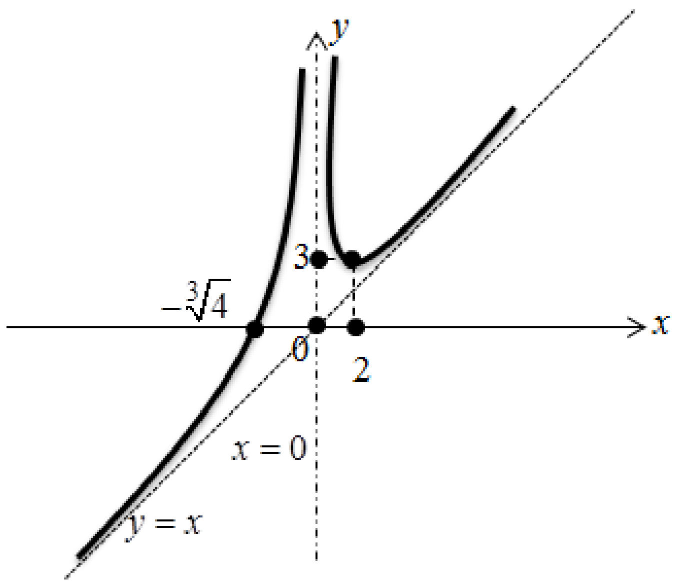
$\left(-\sqrt[3]{4};0\right)$ – точка пересечения графика $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$ с осью OX;

пересечение с осью OY:

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^3+4}{x^2} \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \text{нет решений}.$$

Пересечений с OY у графика $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$ нет.

7. Выполним схематичное построения графика функций.



X. Доказать, что функция $y=-x\cdot\cos x+3x$ удовлетворяет уравнению $xy'=y+x^2\sin x$.

$y'=\left(-x\cdot\cos x+3x\right)'=-\cos x+x\cdot\sin x+3$,

$x\cdot\left(-\cos x+x\cdot\sin x+3\right)=-x\cdot\cos x+3x+x^2\sin x$,

$-x\cos x+x^2\cdot\sin x+3x=-x\cdot\cos x+3x+x^2\sin x$,

$0=0$, что и требовалось доказать.

ЗАДАНИЯ
ДЛЯ ВНЕАУДИТОРНОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Получить выражение для мольной теплоемкости идеального газа при изохорическом процессе.

2. Приращение температуры идеального газа $\Delta T = dT$. Найти дифференциал его внутренней энергии.

3. Найти наиболее вероятную энергию молекул идеального газа.

4. Исследовать линию равновесия бинарной смеси из компонентов *A* и *B*, подчиняющихся закону Рауля, и построить ее график.

5. Установить, при каком процентном содержании кислорода в газовой смеси скорость окисления оксида азота будет максимальной.

6. Пусть в газовой смеси, помимо оксида азота и кислорода, содержатся и другие компоненты, не принимающие участия в химической реакции (инертные вещества). Определить, при каком стехиометрическом отношении $\frac{y}{x}$ скорость окисления по формуле $2NO + O_2 = 2NO_2$, будет максимальной.

7. Пусть газ, состоящий из оксида азота и инертного газа, смешивают с воздухом, концентрация кислорода в котором составляет 20,8%. Определить, какой объем воздуха необходимо добавить к объему оксида азота, чтобы обеспечить максимальную скорость окисления последнего (выполнить решение задачи в Mathcad).

8. Установить, при каком количестве изменяющегося исходного вещества *A* скорость образования продукта реакции начнет убывать, если известно, что скорость автокалитической реакции описывается уравнением $v = k\left(a_0 - x\right)^n \left(b_0 + x\right)^m$ (выполнить решение задачи в Maple).

9. Определить концентрацию ионов Ag^+ в 0,01*M* растворе аммиачного комплекса $\left[\mathrm{Ag}\left(\mathrm{NH_3}\right)_2\right]^+$, характеризующегося константой нестойкости $K = 6{,}8 \cdot 10^{-8}$.

10. Рассчитать pH среды, при котором скорость реакции $\left(\mathrm{CH_3}\right)_2\mathrm{COH{+}RNH_2} \rightleftarrows \left(\mathrm{CH_3}\right)_2\mathrm{C}\left(\mathrm{OH}\right)\mathrm{NH_2R}$ будет наибольшей при условии, что константы основности ацетона и первичного амина соответственно равны $K_B^{'} = 10^{-14}, K_B = 10^{-11}$. Определить, во сколько раз скорость реакции будет меньше при pH = 0 и при pH = 7 по сравнению с pH для случая максимальной скорости реакции (выполнить решение задачи в Mathcad или Maple).

ТРЕХУРОВНЕВЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ К РАЗДЕЛУ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

Уровень I

I. Показать, что функция y удовлетворяет соответствующему дифференциальному уравнению:

1) $y = xe^{-x^2/2}$; $xy' = (1-x^2)y$;

2) $y = \dfrac{\sin x}{x}$; $xy' + y = \cos x$;

3) $y = x\sqrt{1-x^2}$; $yy' = x - 2x^3$;

4) $y = \ln(C + e^x)$; $y' = e^{x-y}$.

II. Найти производную функции.

1) $y = 8\sqrt{5+2x-x^2} + 3\arcsin\dfrac{x-1}{6}$;

Ответ: $y'(x) = \dfrac{3}{\sqrt{-x^2+2x+35}} - \dfrac{8x-8}{\sqrt{-x^2+2x+5}}$.

2) $y = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + \operatorname{arctg}(x+1)$;

Ответ: $\dfrac{x+2}{x^2+2x+2}$.

3) $y = \sqrt{3-2x-x^2} + 4\arcsin\dfrac{x+1}{2}$;

Ответ: $-\dfrac{x-3}{\sqrt{3-2x-x^2}}$.

4) $\mathrm{y} = \dfrac{3}{8}[\ln(4\mathrm{x}^2 - 4\mathrm{x} + 17) + \dfrac{1}{6}\operatorname{arctg}\dfrac{2\mathrm{x}-1}{4}]$.

Ответ: $\dfrac{3x-1}{4x^2-4x+17}$.

III. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$.

1) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 3,\ [-1;\ 4]$;

Ответ: $y_{наиб.} = 7$ при $x = 1$ и $x = 4$, $y_{наим.} = -13$ при $x = -1$.

2) $y = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 5,\ [0;\ 6]$;

Ответ: $y_{наиб.} = 5$ при $x = 0$, $y_{наим.} = -107$ при $x = 4$.

3) $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 2,\ [-3;\ 4]$;

Ответ: $y_{наиб.} = 46$ при $x = -2$ и $x = 4$, $y_{наим.} = -79$ при $x = 3$.

4) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 6,\ [-2;\ 3]$.

Ответ: $y_{наиб.} = 1$ при $x = -1$ и $x = 4$, $y_{наим.} = -26$ при $x = 2$.

IV. Найти уравнения касательной и нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке x_o.

1) $y = \dfrac{x+1}{x-1};\ x_o = 3$;

Ответ: $y = -0{,}5x + 3{,}5$ – уравнение касательной, $y = 2x - 4$ – уравнение нормали.

2) $y = \sqrt{x} + x;\ x_o = 4$.

Ответ: $y = 1{,}25x + 1$ – уравнение касательной, $y = -0{,}8x + 9{,}2$ – уравнение нормали.

Уровень II

I. Найти производную от функции, заданной неявно.

1) $\sin(xy) - \ln(x + y) + a = 0$;

Ответ: $y' = \dfrac{1 - (x+y)\cdot y \cdot \cos xy}{(x+y)\cdot x \cdot \cos xy - 1}$.

2) $\cos(x + y) - \dfrac{x}{y} + a = 0$.

Ответ: $y' = \dfrac{y + y \cdot \sin(x+y)}{-y^2 \cdot \sin(x+y) + x}$.

II. Найти производную 2-го порядка от функции, заданной параметрически.

1) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1}, \\ y = e^t; \end{cases}$ **Ответ:** $e^t \cdot \left(t+1\right)^3 \cdot \left(t+3\right)$.

2) $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^3. \end{cases}$ **Ответ:** $9t^3$.

III. На графике функции $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ взята точка A. Касательная к графику в точке A наклонена к оси Ox под углом, тангенс которого равен -4. Найти ординату точки A.

Ответ: 2.

IV. Найти предел по правилу Лопиталя.

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x + \dfrac{x^3}{6}}{x^5}$; **Ответ:** ∞.

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}}{x^4}$; **Ответ:** $-\infty$.

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$; **Ответ:** $-\dfrac{1}{2}$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{arctgx} - \mathrm{x}}{\mathrm{x}^2}$. **Ответ:** $\dfrac{1}{6}$.

V. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции $y = f(x)$.

1) $y = 9\sqrt[3]{x^5} + 5x^2 + 3x + 1$;

Ответ: $\left(-\infty;-1\right) \cup \left(0;+\infty\right)$ – вогнутая; $\left(-1;0\right)$ – выпуклая; $x = -1$ – точка перегиба.

2) $y = xe^x$.

Ответ: $\left(-2;+\infty\right)$ – вогнутая; $\left(-\infty;-2\right)$ – выпуклая; $x = -2$ – точка перегиба.

3) $y = x^2 - \frac{8}{x}$.

Ответ: $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$ – вогнутая; $(0;2)$ –выпуклая; $x=2$ – точка перегиба.

VI. Провести полное исследование функции $y = f(x)$ и построить ее график.

1) $y = \frac{x^2+2x+4}{x+2}$;

2) $y = \frac{x^2-4x+7}{x-3}$;

3) $y = \frac{x^2-x-1}{x+1}$.

VII. Решить задачи:

1. Зависимость между массой x кг вещества, получаемого в некоторой химической реакции, и времени t выражается уравнением $x = 7\left(1-e^{-4t}\right)$. Определить скорость реакции в начальный момент времени.

Ответ: 28 кг/с.

2. Из всех прямоугольников данной площади S определить тот, периметр которого наименьший.

Ответ: периметр прямоугольника $4\sqrt{S}$.

3. Выпущенный из орудия снаряд пролетел по горизонтали 100 м. При этом максимальная высота подъема снаряда составила 2500 м. Считая траекторию полета параболой, определить, под каким углом к горизонту был произведен выстрел.

Ответ: $\alpha = \mathrm{arctg}(100) \approx 89^\circ$

4. Найти высоту прямого кругового конуса наименьшего объема, описанного около шара радиусом R.

Ответ: $8R$.

5. Требуется сделать коническую воронку с образующей, равной 20 см. Какой должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наименьшим?

Ответ: $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ см.

Уровень III

Решить задачи:

1. Сосуд с вертикальными стенками высотой H, наполненный невязкой жидкостью, стоит на горизонтальной плоскости. Определить местоположение отверстия, при котором дальность струи будет наибольшей, если скорость вытекающей жидкости по закону Торричелли равна $\sqrt{2gx}$, где x – расстояние от отверстия до поверхности жидкости; g – ускорение свободного падения.

Ответ: $\frac{H}{2}$.

2. Требуется изготовить открытый цилиндрический бак вместимостью V. Стоимость 1 м^2 материала, из которого изготавливается дно бака, составляет P_1 руб., а стоимость 1 м^2 материала, идущего на стенки бака, – P_2 руб. При каком отношении радиуса дна к высоте бака затраты на материал будут минимальны?

Ответ: $\frac{P_2}{P_1}$.

3. Лампа висит над центром круглого стола радиусом r. При какой высоте лампы над столом освещенность предмета, лежащего на его крае, будет наилучшей? (Освещенность прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей света и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света.)

Ответ: $\frac{r}{\sqrt{2}}$.

4. По оси Ox движутся две материальные точки, законы движения которых $x = 3t^2 - 8$ и $x = 2t^2 + 5t + 6$. С какой скоростью удаляются эти точки друг от друга в момент встречи?

Ответ: 42 м/с, 33 м/с.

5. Полоса жести шириной a, имеющая прямоугольную форму, должна быть согнута в виде открытого кругового цилиндрического желоба так, чтобы его сечение имело форму сегмента. Каким должен быть центральный угол φ, опирающийся на дугу этого сегмента, чтобы вместимость желоба была наибольшей?

Ответ: $\varphi = \pi$.

ГЛОССАРИЙ

Новые понятия	Содержание
Производная функции в точке x	предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при стремлении Δx к нулю: $y' = f'(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
Функция имеет бесконечную производную	если для некоторого значения x выполняется одно из условий $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$ или $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$
Производная 2-го порядка от функции $y = f(x)$	производная от ее первой производной. Обозначают y'', $f''(x) = \left(f'(x)\right)'$, y''_{x^2}
Дифференциал функции $y = f(x)$ *в точке* x_0	произведение производной функции $f'(x_0)$ на приращение аргумента Δx, т.е. $dy = f'(x_0)\cdot\Delta x$, если x – независимая переменная, то $dy = f'(x_0)\cdot dx$.
Геометрический смысл дифференциала	дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0 равен приращению ординаты касательной в этой точке
Точка максимума (минимума) функции $y = f(x)$	точка x_0, для которой существует такая окрестность точки x_0, что для всех точек $x \ne x_0$, принадлежащих этой окрестности, выполняется неравенство $f(x_0) > f(x)\left(f(x_0) < f(x)\right)$
Асимптота к графику функции $y = f(x)$	прямая, к которой приближается точка $M(x, y)$, лежащая на графике, при неограниченном удалении ее от начала координат; асимптоты бывают наклонные $y = kx + b$, вертикальные $x = a$ или горизонтальные $y = b$
Производная n-го порядка от функции $y = f(x)$	производная от ее производной (n-1)-го порядка. Приняты следующие обозначения: $y^{(III)}, y^{(IY)}, \ldots, y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$, $\dfrac{d^n y}{dx^n}$
Свойство инвариантности (неизменности) дифференциала первого порядка	дифференциал функции равен произведению производной на дифференциал аргумента, независимо от того, является ли этот аргумент независимой переменной или функцией другой независимой переменной: $dy = y'\cdot dx$
Точка локального минимума (максимума) функции $y = f(x)$	точка x_0; если $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, выполняется неравенство $f(x) \ge f(x_0)$, $\left(f(x) \le f(x_0)\right)$
Точка перегиба	точка, в которой функция меняет направление выпуклости

ПРИЛОЖЕНИЕ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ» С ПОМОЩЬЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПАКЕТОВ Maple и Mathcad

Предлагаемые программы помогут Вам при проверке домашнего задания или, при необходимости, предоставят возможность быстрого вычисления производной любого порядка и сложности, исследования функций и построения графиков и др.

Рассмотрим вычисление производной, исследование функций с построением графика с помощью математического пакета **Maple**. Maple имеет следующий оператор для вычисления производной: Diff (функция, *x*) – выводит ответ. Нужно помнить, что в выбранной программе очень важное место занимают операторы «:» – присвоить, «;» – окончание предложения.

> Вычисление производной

> $Diff(\sin(x^3), x) = diff(\sin(x^3), x);$

$$\frac{d}{dx}\sin(x^2) = 2\cos(x^2)\,x$$

> $Diff(\cos(2\cdot x)^2, x\$4) = diff(\cos(2\cdot x)^2, x\$4);$ # **после значка $ указывается порядок производной**

$$\frac{d^4}{dx^4}\left(\cos(2x)^2\right) = -128\sin(2x)^2 + 128\cos(2x)^2$$

> $simplify(\%);$ # ***упрощение выражения***

$$\frac{d^4}{dx^4}\left(\cos(2x)^2\right) = 256\cos(2x)^2 - 128$$

> $combine(\%);$# **или так можно упростить выражение**

$$\frac{d^4}{dx^4}\left(\frac{1}{2}\cos(4x) + \frac{1}{2}\right) = 128\cos(4x)$$

> $D(\sin)(\pi) : eval(\%);$# **Вычисление призводной в точке, f(x) = sinx при x = π**

$$-1$$

Исследование графика функций

```
> y := x^3/(x-4);# проведём исследования данного графика функций
```

$$y := \frac{x^3}{x-4}$$

```
> readlib(iscont): readlib(discont): readlib(singular):
> iscont(y, x=-infinity..infinity);# проверяем функцию на непрерывность
```

false

```
> наша функция не является непрерывной, а следовательно, найдём точки разрыва
> discont(y, x);
```

$\{4\}$

```
> xr := convert(%, `+`);
```

$xr := 4$

```
> Существует вертикальная асимптота x = 4, найдём коэффициенты наклонной асимптоты
> k1 := limit(y/x, x=+infinity);
```

$k1 := \infty$

```
> b1 := limit(y-k1*x, x=+infinity);
```

$b1 := \infty$

```
> k2 := limit(y/x, x=-infinity);
```

$k2 := -\infty$

```
> b2 := limit(y-k2*x, x=-infinity);
```

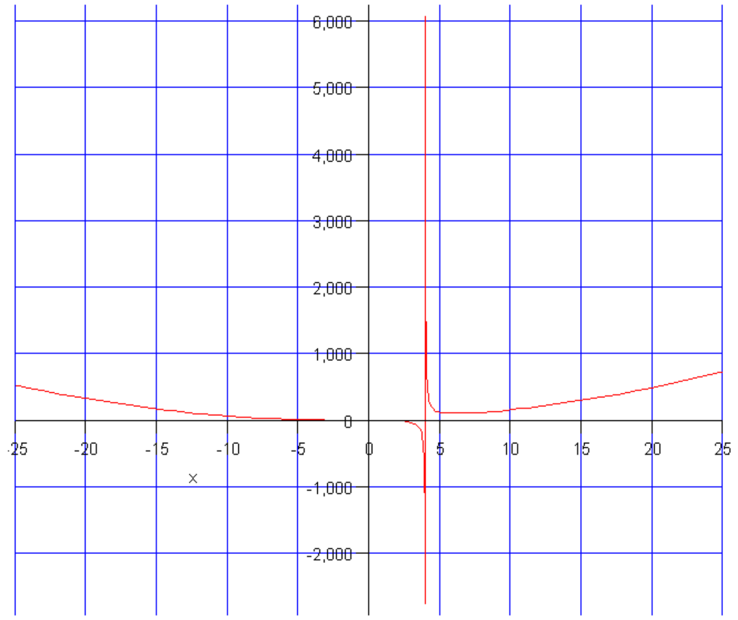
$b2 := \infty$

```
> Наклонной ассимптоты нет
> eadlib(extrema): readlib(maximize): readlib(minimize):
> extrema(y,{}, x,'s'); s; #найдём экстремумы
```

$\{0, 108\}$

$\{\{x = 6\}, \{x = 0\}\}$

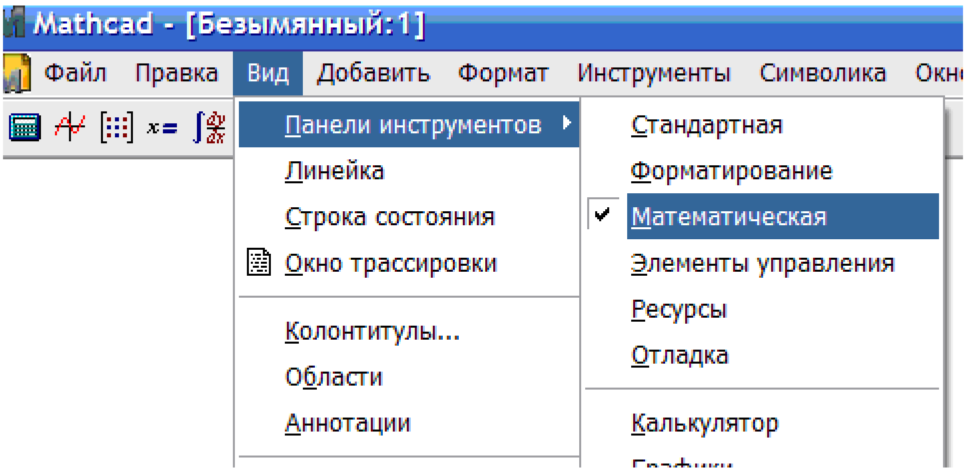
> plot(y, x = −25..25, axis=[gridlines=[10, color = blue]]);# Построим график функций



Рассмотрим один из наиболее популярных математических пакетов **MathCAD**.

Чтобы начать работать с приложением, вызовите панель Calculus (вычисления).

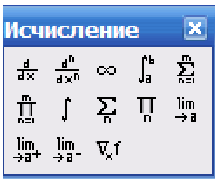
Выберите на панели вкладку ВИД → ПАНЕЛИ ИНСТРУМЕНТОВ → МАТЕМАТИЧЕСКАЯ



Появится панель

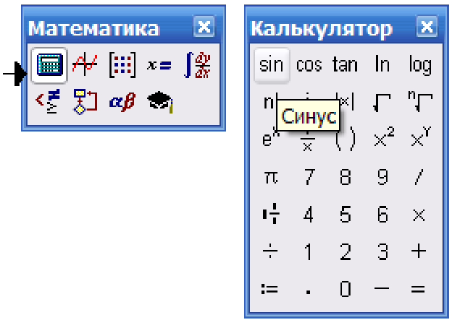
.

На данной вкладке необходимо выбрать панель «Исчисление»

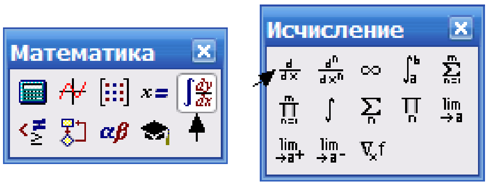


и продолжить работу.

Например, Вы хотите вычислить производную функции $\frac{\sin x}{x}$. Для этого можно сначала задать функцию: ввести $y(x):=$, выбрать вкладку «калькулятор»

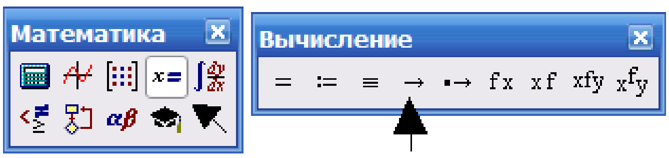


и с ее помощью набрать нужную функцию $y(x) := \frac{\sin(x)}{x}$. После этого используйте вкладки



.

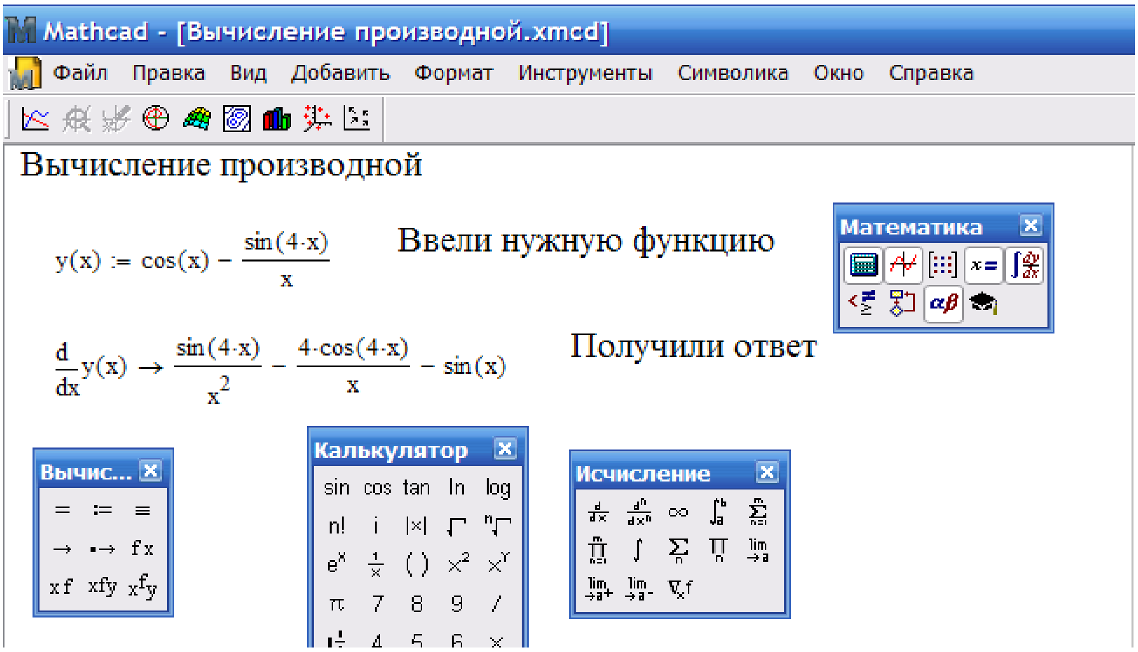
Появляется следующий символ $\frac{d}{d\blacksquare}$. Нижнее поле заполняется x, верхнее – $y(x)$. Получим $\frac{d}{dx}y(x)$. Теперь выбираете вкладку «вычисление», затем стрелочку



,

появляется результат $\frac{d}{dx}y(x) \to \frac{\cos(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2}$.

Далее разобраны задачи, наиболее часто встречаемые в теме «Дифференциальное исчисление функции одной переменной».



Исследовать график функций

$$f(x) := \frac{x^2 + 6 \cdot x + 9}{x + 4}$$

Найдём точки пересечения с координатными осями

$$f(0) = 2.25$$

$$\frac{x^2 + 6 \cdot x + 9}{x + 4} \quad \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Найдём асимптоты

$x + 4$ $\quad -4$ $\quad$ Исследуем точку x=-4

$$\lim_{x \to -4^+} f(x) \to \infty \qquad \lim_{x \to -4^-} f(x) \to -\infty$$

$$k := \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \to 1 \qquad k = 1$$

$$b := \lim_{x \to \infty} (f(x) - x) \to 2 \qquad b = 2$$

$y(x) := x + 2$ $\quad$ наклонная асимптота

Вычислим первую производную

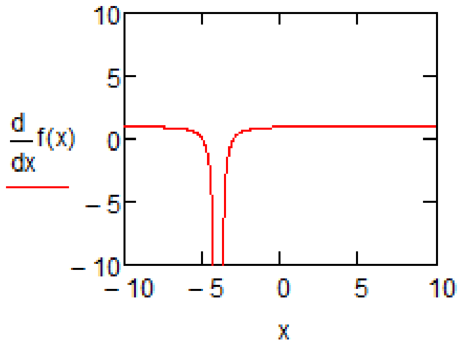
$$\frac{d}{dx}f(x) \to \frac{2\cdot x+6}{x+4} - \frac{x^2+6\cdot x+9}{(x+4)^2} = 0$$

$$\frac{2\cdot x+6}{x+4} - \frac{x^2+6\cdot x+9}{(x+4)^2}$$ преобразуем первую производную, вычислим ее значение при y=0

$$1 - \frac{1}{(x+4)^2} \qquad \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$f(-5) = -4$ $\qquad f(-3) = 0$ значение функции в точках экстремума

Строим график производной



(–5 , 4) – максимум

(–3 , 0) – минимум

Найдём вторую производную

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) \rightarrow \frac{2\cdot\left(x^2+6\cdot x+9\right)}{(x+4)^3}-\frac{2\cdot(2\cdot x+6)}{(x+4)^2}+\frac{2}{x+4}$$

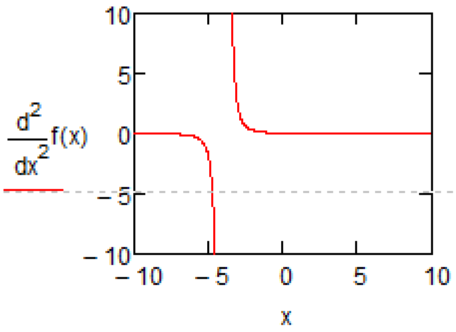
$$\frac{2\cdot\left(x^2+6\cdot x+9\right)}{(x+4)^3}-\frac{2\cdot(2\cdot x+6)}{(x+4)^2}+\frac{2}{x+4}$$

преобразуем вторую производную, вычислим ее значение при y=0

$$\frac{2}{(x+4)^3}$$

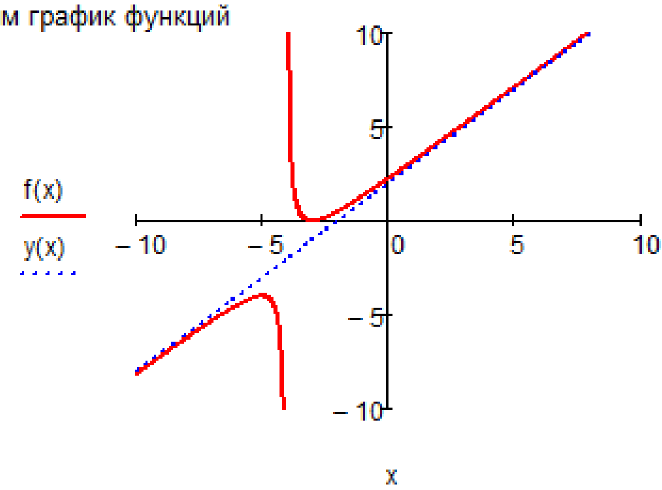
решений нет

Строим график второй производной



выпуклости и вогнутости видны из графика

Строим график функций



Записать уравнение касательной и нормали к графику функций y=x^3 в точке x=2

$$y(x) := x^3$$

Вычислим угловой коэффициент k=y'(2)

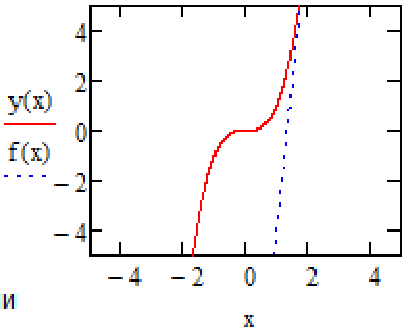
$$\frac{d}{dx}y(x) \to 3\cdot x^2$$

$$k := 3\cdot 2^2 = 12$$

Запишем уравнение касательной

$$f(x) := k\cdot(x-2) + y(2)$$

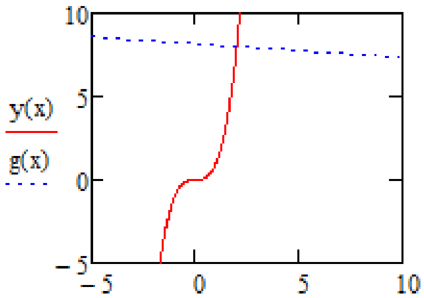
Строим график функций



Запишем уравнение нормали

$$n := \frac{-1}{k} \qquad n = -0.083$$

$$g(x) := n\cdot(x-2) + y(2)$$



Модуль 4
ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Графическая схема

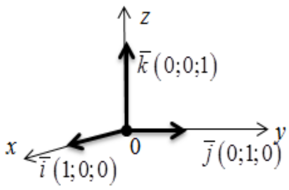
Информационная таблица

Направленный отрезок прямой или упорядоченную пару точек называют *связным* (геометрическим) *вектором:* $\vec{a}$; $\bar{b}$; $\overline{AB}$; $\overline{M_1M_2}$ – векторы

Расстояние между началом и концом вектора называют *длиной вектора*.
Длина вектора $\leftrightarrow$ *модуль вектора*.

$\bar{a}(a_x;a_y;a_z)$, $|\bar{a}|=\sqrt{(a_x)^2+(a_y)^2+(a_z)^2}$

В ДПСК базисные векторы принято обозначать:



для $R^1-\{\bar{i}\}$

для $R^2-\{\bar{i};\bar{j}\}$

для $R^3-\{\bar{i};\bar{j};\bar{k}\}$

Вектор, длина которого равна нулю, – *нулевой* вектор. Вектор, длина которого равна единице, – *единичный* вектор. Векторы *коллинеарны*, если они лежат на одной или параллельных прямых.
Единичный вектор, сонаправленный с вектором $\bar{a}$, называют его *ортом*: $\bar{a}_0=\frac{1}{|\bar{a}|}\bar{a}$. Векторы, лежащие в одной или параллельных плоскостях, называются *компланарными*

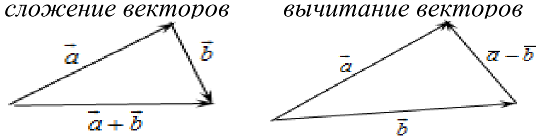
Аналитический способ задания вектора

1) координатами: $\bar{a}(a_x;a_y;a_z)$;
2) разложением по базису: $\bar{a}=a_x\cdot\bar{i}+a_y\cdot\bar{j}+a_z\cdot\bar{k}$;
3) двумя точками: $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $\overline{M_1M_2}(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$;
4) орт вектором и длиной вектора: $\bar{a}_0;|\bar{a}|$;
5) направляющими косинусами и длиной вектора: $(\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma)$; $|\bar{a}|$

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

Вектор задан геометрически

сложение векторов *вычитание векторов*



умножение вектора на число

Вектор задан алгебраически

Если $\bar{a}(a_x;a_y;a_z)$ и $\bar{b}(b_x;b_y;b_z)$, то

сложение векторов

$\bar{a}+\bar{b}=(a_x+b_x;a_y+b_y;a_y+b_y)$;

вычитание векторов

$\bar{a}-\bar{b}=(a_x-b_x;a_y-b_y;a_y-b_y)$;

умножение вектора на число

$\lambda\cdot\bar{a}=(\lambda a_x;\lambda a_y;\lambda a_z)$

Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение двух векторов – число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними: $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos(\bar{a}\hat{}\bar{b})$.

Геометрические свойства: $\bar{a}\perp\bar{b}\Leftrightarrow\bar{a}\cdot\bar{b}=0$, вычисление угла между векторами: $\cos(a\hat{}b)=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|a|\cdot|b|}$ $\Rightarrow$

$$\cos(a\hat{}b)=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

Физические приложения: вычисление работы силы, действующей при прямолинейном перемещении: $A=F\cdot S$

Векторное произведение векторов

Векторное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – вектор $\bar{c}$ $(\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b})$, удовлетворяющий следующим условиям: 1) $\bar{c}\perp\bar{a}$ и $\bar{c}\perp\bar{b}$; 2) упорядоченная тройка векторов $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$ – правая; 3) $|\bar{c}|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\sin(\bar{a}\hat{}\bar{b})$.

Геометрические свойства: $\bar{a}\parallel\bar{b}\Leftrightarrow\bar{a}\times\bar{b}=0$;

$S_{параллелограмма}=|\bar{a}\times\bar{b}|$; 3) $S_\Delta=\frac{1}{2}|\bar{a}\times\bar{b}|$.

Физические приложения: если $\bar{F}$ – сила, приложенная к точке *M*, то момент этой силы относительно точки *O* равен векторному произведению векторов $\bar{F}$ и $\overline{OM}$.

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}.$$ **ВАЖНО!** $\bar{a}\times\bar{b}=-\bar{b}\times\bar{a}$

Векторно-скалярным, или *смешанным*, *произведением* упорядоченной тройки векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ в R^3 называется число $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$, которое получается скалярным умножением векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ на третий вектор $\bar{c}$ и обозначается $\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}$ или $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$: $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}$.

Приложение: вычисление объемов параллелепипеда и пирамиды $V_{параллелепипеда}=|\bar{a}\bar{b}\bar{c}|$; $V_{пирамиды}=\frac{1}{6}\cdot|\bar{a}\bar{b}\bar{c}|$

ЛЕКЦИОННЫЙ КУРС

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Определение. *Вектором* называется направленный отрезок (упорядоченная пара точек). К векторам относится также и *нулевой вектор*, начало и конец которого совпадают.

Определение. *Длиной (модулем)* вектора называется расстояние между началом и концом вектора.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\vec{a}\right|$$

Определение. Векторы называются *коллинеарными*, если они расположены на одной или параллельных прямых. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Определение. Векторы называются *компланарными*, если существует плоскость, которой они параллельны.

Коллинеарные векторы всегда компланарны, но не все компланарные векторы коллинеарны.

Определение. Векторы называются *равными*, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые модули.

Всякие векторы можно привести к общему началу, т.е. построить векторы, соответственно равные данным и имеющие общее начало. Из определения равенства векторов следует, что любой вектор имеет бесконечно много векторов, равных ему.

Определение. *Линейными операциями* над векторами называется сложение и умножение на число.

Суммой векторов является вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Произведение $\vec{b} = \alpha\,\vec{a}$; $\left|\vec{b}\right| = \alpha\left|\vec{a}\right|$, при этом $\vec{a}$ коллинеарен $\vec{b}$.

Вектор $\vec{a}$ сонаправлен с вектором $\vec{b}$ ($\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$), если $\alpha > 0$.

Вектор $\vec{a}$ противоположно направлен с вектором $\vec{b}$ ($\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$), если $\alpha < 0$.

Свойства векторов

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ – коммутативность;

2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$;

3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;

4) $\vec{a} + (-1)\vec{a} = \vec{0}$;

5) $(\alpha\cdot\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$ – ассоциативность;

6) $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ – дистрибутивность;

7) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$;

8) $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$.

Определение.

1. *Базисом* в пространстве называются любые три некомпланарных вектора, взятые в определенном порядке.
2. *Базисом* на плоскости называются любые два неколлинеарных вектора, взятые в определенном порядке.
3. *Базисом* на прямой называется любой ненулевой вектор.

Определение.

Если $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ – базис в пространстве и $\vec{a} = \alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\overrightarrow{e_2} + \gamma\overrightarrow{e_3}$, то числа α, β и γ называются *компонентами***,** или *координатами***,** вектора $\vec{a}$ в этом базисе.

В связи с этим можно записать следующие *свойства*:

– равные векторы имеют одинаковые координаты;

– при умножении вектора на число его компоненты тоже умножаются на это число:

$$\lambda\vec{a} = \lambda(\alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\overrightarrow{e_2} + \gamma\overrightarrow{e_3}) = (\lambda\alpha)\overrightarrow{e_1} + (\lambda\beta)\overrightarrow{e_2} + (\lambda\gamma)\overrightarrow{e_3};$$

– при сложении векторов складываются их соответствующие компоненты:

$$\vec{a} = \alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2} + \alpha_3\overrightarrow{e_3}, \quad \vec{b} = \beta_1\overrightarrow{e_1} + \beta_2\overrightarrow{e_2} + \beta_3\overrightarrow{e_3},$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1)\overrightarrow{e_1} + (\alpha_2 + \beta_2)\overrightarrow{e_2} + (\alpha_3 + \beta_3)\overrightarrow{e_3}.$$

ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ

Определение. Векторы $\overrightarrow{a_1}, ..., \overrightarrow{a_n}$ называются *линейно зависимыми,* если существует такая линейная комбинация $\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{a_n} = 0$ при не равных нулю одновременно α_i, т.е. $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2 \neq 0$.

Если же только при $\alpha_i = 0$ выполняется $\alpha_1 \vec{a_1} + \alpha_2 \vec{a_2} + ... + \alpha_n \vec{a_n} = 0$, то векторы называются *линейно независимыми*.

Свойство 1. Если среди векторов $\vec{a_i}$ есть нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы.

Свойство 2. Если к системе линейно зависимых векторов добавить один или несколько векторов, то полученная система тоже будет линейно зависима.

Свойство 3. Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов раскладывается в линейную комбинацию остальных векторов.

Свойство 4. Любые два коллинеарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые два линейно зависимых вектора коллинеарны.

Свойство 5. Любые три компланарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые три линейно зависимых векторы компланарны.

Свойство 6. Любые четыре вектора линейно зависимы.

СИСТЕМА КООРДИНАТ

Для определения положения произвольной точки могут использоваться различные системы координат. Положение произвольной точки в какой-либо системе координат должно однозначно определяться. Понятие системы координат представляет собой совокупность точки начала отсчета (начала координат) и некоторого базиса. Как на плоскости, так и в пространстве возможно задание самых разнообразных систем координат. Выбор системы координат зависит от характера поставленной геометрической, физической или технической задачи. Рассмотрим некоторые наиболее часто применяемые на практике системы координат.

Чтобы найти компоненты вектора нужно из координат его конца вычесть координаты начала.

Если заданы точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$,

то $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Определение. Базис называется *ортонормированным*, если его векторы попарно ортогональны и равны единице.

Определение. Декартова система координат, базис которой ортонормирован, называется *декартовой прямоугольной системой координат*.

Пример. Даны векторы $\vec{a}$ (1; 2; 3), $\vec{b}$ (-1; 0; 3), $\vec{c}$ (2; 1; -1) и $\vec{d}$ (3; 2; 2) в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Векторы образуют базис, если они линейно независимы. Другими словами, если уравнения, входящие в систему

$$\begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma = 0, \\ 2\alpha + 0 \cdot \beta + \gamma = 0, \\ 3\alpha + 3\beta - \gamma = 0, \end{cases}$$

линейно независимы.

Тогда $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.

Это условие выполняется, если определитель матрицы системы отличен от нуля.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3 + (-2-3) + 12 = 4 \neq 0,$$

$$\begin{cases} \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 = d_1, \\ \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 = d_2, \\ \alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3 = d_3. \end{cases}$$

Для решения этой системы воспользуемся методом Крамера.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-3) + (-2-2) + 12 = -1,$$

$$\alpha = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{1}{4}.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-2-2) - 3(-2-3) + 2(4-6) = -4 + 15 - 4 = 7,$$

$$\beta = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{7}{4}.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -6 + (4-6) + 18 = 10,$$

$$\gamma = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{2}.$$

Итого, координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ $\vec{d}$ $\{-\frac{1}{4}; \frac{7}{4}; \frac{5}{2}\}$.

Длина вектора в координатах определяется как расстояние между точками начала и конца вектора. Если заданы две точки в пространстве $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$,

то $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Если точка $M(x, y, z)$ *делит отрезок AB в соотношении* λ/μ, то координаты этой точки определяются как

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

В частном случае координаты *середины отрезка* находятся как

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ В КООРДИНАТАХ

Пусть заданы векторы в прямоугольной системе координат

$$\vec{a}(x_A, y_A, z_A),\ \ \vec{b}(x_B, y_B, z_B),$$

тогда

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(x_A + x_B; y_A + y_B; z_A + z_B); \quad \alpha \cdot \vec{a} = (\alpha x_A; \alpha y_A; \alpha z_A).$$

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Определение. *Скалярным произведением* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих сторон на косинус угла между ними:

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\,\vec{a}\,|\,|\,\vec{b}\,|\cos\varphi$.

Свойства скалярного произведения:

1) $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\,\vec{a}\,|^2$;
2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, если $\vec{a}\perp\vec{b}$ или $\vec{a}= 0$ или $\vec{b} = 0$;
3) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$;
4) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$;
5) $(m\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(m\vec{b}) = m(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

Если рассматривать векторы $\vec{a}(x_a, y_a, z_a)$ и $\vec{b}(x_b, y_b, z_b)$ в декартовой прямоугольной системе координат, то

$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$.

Используя полученные равенства, получаем формулу для вычисления угла между векторами

$$\cos\varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

Пример. Найти $(5\vec{a} + 3\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b})$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a}\perp\vec{b}$.

$10\vec{a}\cdot\vec{a} - 5\vec{a}\cdot\vec{b} + 6\vec{a}\cdot\vec{b} - 3\vec{b}\cdot\vec{b} = 10|\vec{a}|^2 - 3|\vec{b}|^2 = 40 - 27 = 13$,

т.к. $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 = 4$, $\vec{b}\cdot\vec{b} = |\vec{b}|^2 = 9$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

Пример. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

Т.е. $\vec{a}$ = (1; 2; 3), $\vec{b}$ = (6, 4, -2), $\vec{a}\cdot\vec{b}$ = 6 + 8 – 6 = 8.

$|\vec{a}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$; $|\vec{b}| = \sqrt{36+16+4} = \sqrt{56}$.

$$\cos\varphi = \frac{8}{\sqrt{14}\sqrt{56}} = \frac{8}{2\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7},$$

$\varphi = \arccos\frac{2}{7}$.

Пример. Найти скалярное произведение $(3\vec{a} - 2\vec{b})\cdot(5\vec{a} - 6\vec{b})$, если $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 6$, $\vec{a}\wedge\vec{b} = \frac{\pi}{3}$.

$15\vec{a}\cdot\vec{a} - 18\vec{a}\cdot\vec{b} - 10\vec{a}\cdot\vec{b} + 12\vec{b}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|^2 - 28|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3} + 12|\vec{b}|^2 =$

$= 15\cdot 16 - 28\cdot 4\cdot 6\cdot\frac{1}{2} + 12\cdot 36 = 240 - 336 + 432 = 672 - 336 = 336.$

Пример. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}, \vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

Т.е. $\vec{a} = (3; 4; 5)$, $\vec{b} = (4; 5; -3)$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 12 + 20 - 15 = 17$.

$|\vec{a}| = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50}$, $|\vec{b}| = \sqrt{16+25+9} = \sqrt{50}$.

$\cos\varphi = \frac{17}{\sqrt{50}\sqrt{50}} = \frac{17}{50}$,

$\varphi = \arccos\frac{17}{50}$.

Пример. При каком m векторы $\vec{a} = m\vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$ перпендикулярны?

$\vec{a} = (m; 1; 0)$, $\vec{b} = (3; -3; -4)$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3m - 3 = 0 \quad \Rightarrow m = 1.$

Пример. Найти скалярное произведение векторов $2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c}$ и $5\vec{a} + 6\vec{b} + 7\vec{c}$, если $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$, $\vec{a}\wedge\vec{b} = \vec{a}\wedge\vec{c} = \vec{b}\wedge\vec{c} = \frac{\pi}{3}$.

$(2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c})(5\vec{a} + 6\vec{b} + 7\vec{c}) =$

$10\vec{a}\cdot\vec{a} + 12\vec{a}\cdot\vec{b} + 14\vec{a}\cdot\vec{c} + 15\vec{a}\cdot\vec{b} + 18\vec{b}\cdot\vec{b} + 21\vec{b}\cdot\vec{c} + 20\vec{c}\cdot\vec{a} + 24\vec{b}\cdot\vec{c} + 28\vec{c}\cdot\vec{c} =$

$= 10\vec{a}\cdot\vec{a} + 27\vec{a}\cdot\vec{b} + 34\vec{a}\cdot\vec{c} + 45\vec{b}\cdot\vec{c} + 18\vec{b}\cdot\vec{b} + 28\vec{c}\cdot\vec{c} = 10 + 27 + 51 + 135 +$
$+ 72 + 252 = 547.$

ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Определение. *Векторным произведением* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$,

$\sin\varphi \geq 0; \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$;

2) вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов.

Обозначается: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ или $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

Свойства векторного произведения векторов:

1) $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$;

2) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, если $\vec{a} \,||\, \vec{b}$ или $\vec{a} = 0$ или $\vec{b} = 0$;

3) $(m\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m\vec{b}) = m(\vec{a} \times \vec{b})$;

4) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;

5) если заданы векторы $\vec{a}\,(x_a, y_a, z_a)$ и $\vec{b}\,(x_b, y_b, z_b)$ в декартовой прямоугольной системе координат с единичными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix};$$

6) геометрическим смыслом векторного произведения векторов является площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Пример. Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

$\vec{a}$ = (2; 5; 1); $\vec{b}$ = (1; 2; -3).

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -17\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k}.$$

Пример. Вычислить площадь треугольника с вершинами A(2; 2; 2), B(4; 0; 3), C(0; 1; 0).

$$\overrightarrow{AC} = (0-2;1-2;0-2) = (-2;-1;-2),$$
$$\overrightarrow{AB} = (4-2;0-2;3-2) = (2;-2;1).$$

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(-1-4) - \vec{j}(-2+4) + \vec{k}(4+2) = -5\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}.$$

$$\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{25+4+36} = \sqrt{65}.$$

$$S_\Delta = \frac{\sqrt{65}}{2} \text{ (ед}^2\text{).}$$

Пример. Доказать, что векторы $\vec{a} = 7\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j} + 8\vec{k}$ и $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ компланарны.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & 8 \\ 7 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix},$$

т.к. векторы линейно зависимы, то они компланарны.

Пример. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} + 3\vec{b}$; $3\vec{a} + \vec{b}$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$; $\vec{a} \wedge \vec{b} = 30^0$.

$$(\vec{a} + 3\vec{b}) \times (3\vec{a} + \vec{b}) = 3\vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} + 9\vec{b} \times \vec{a} + 3\vec{b} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} + 9\vec{b} \times \vec{a} = 8\vec{b} \times \vec{a}.$$
$$S = 8|\vec{b}||\vec{a}|\sin 30^0 = 4 \text{ (ед}^2\text{).}$$

СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Определение. *Смешанным произведением* векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на вектор, равный векторному произведению векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Обозначается $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ или ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$).

Смешанное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Свойства смешанного произведения:

1. Смешанное произведение равно нулю, если:
   а) хоть один из векторов равен нулю;
   б) два из векторов коллинеарны;
   в) векторы компланарны.
2. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.
3. $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{b},\vec{c},\vec{a})=(\vec{c},\vec{a},\vec{b})=-(\vec{b},\vec{a},\vec{c})=-(\vec{c},\vec{b},\vec{a})=-(\vec{a},\vec{c},\vec{b})$.
4. $(\lambda\vec{a}_1+\mu\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})=\lambda(\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c})+\mu(\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})$.
5. Объем треугольной пирамиды, образованной векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равен

$$\frac{1}{6}\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|.$$

6. Если $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$, $\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$, то

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Пример. Доказать, что точки A(5; 7; 2), B(3; 1; -1), C(9; 4; -4), D(1; 5; 0) лежат в одной плоскости.

Найдем координаты векторов: $\overrightarrow{AB}=(-2;\ -6;\ 1)$, $\overrightarrow{AC}=(4;\ -3;\ -2)$, $\overrightarrow{AD}=(-4;\ -2;\ 2)$.

Найдем смешанное произведение полученных векторов:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Таким образом, полученные выше векторы компланарны, следовательно, точки A, B, C и D лежат в одной плоскости.

Пример. Найти объем пирамиды и длину высоты, опущенной на грань BCD, если вершины имеют координаты A(0; 0; 1), B(2; 3; 5), C(6; 2; 3), D(3; 7; 2).

Найдем координаты векторов: $\overrightarrow{BA}=(-2;-3;-4)$, $\overrightarrow{BD}=(1;4;-3)$, $\overrightarrow{BC}=(4;-1;-2)$.

Объем пирамиды

$$V=\frac{1}{6}=\begin{vmatrix}-2 & -3 & -4\\ 1 & 4 & -3\\ 4 & -1 & -2\end{vmatrix}=\frac{1}{6}(-2(-8-3)+3(-2+12)-4(-1-16))=$$

$$=\frac{1}{6}(22+30+68)=20\ (\text{ед}^3).$$

Для нахождения длины высоты пирамиды найдем сначала площадь основания *BCD*.

$$\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \overline{j} & \vec{k}\\ 1 & 4 & -3\\ 4 & -1 & -2\end{vmatrix}=\vec{i}(-8-3)-\vec{j}(-2+12)+\vec{k}(-1-16)=$$

$$=-11\vec{i}-10\vec{j}-17\vec{k}.$$

$$\left|\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{11^2+10^2+17^2}=\sqrt{121+100+289}=\sqrt{510}\,.$$

$$S_{осн}=\frac{\sqrt{510}}{2}\ (\text{ед}^2).$$

Т.к. $V=\dfrac{S_{осн}\cdot h}{3}$, $h=\dfrac{3V}{S_{осн}}=\dfrac{120}{\sqrt{510}}=\dfrac{4\sqrt{510}}{17}$ (ед).

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

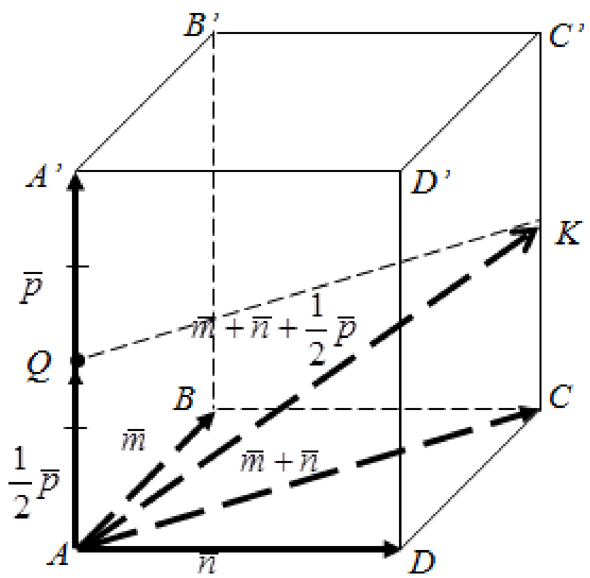
Практическое занятие № 1

Системы координат на плоскости и в пространстве. Линейные операции над векторами и их свойства. Условие коллинеарности векторов. Базис, разложение векторов по базису. Проекция на ось, координаты векторов. Линейные операции над векторами в координатной форме. Модуль и направляющие косинусы вектора, их выражение через координаты

Обучающий пример

В параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ заданы векторы, совпадающие с его ребрами: $\overline{AB}=\overline{m}$, $\overline{AD}=\overline{n}$, $\overline{AA'}=\overline{p}$. Построить вектор: $\overline{m}+\overline{n}+\frac{1}{2}\overline{p}$.

1. Выполним построение параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$.
2. Выделим жирными линиями векторы, совпадающие с его ребрами: $\overline{AB}=\overline{m}$, $\overline{AD}=\overline{n}$, $\overline{AA'}=\overline{p}$.
3. По правилу параллелограмма выполним сложение векторов $\overline{m}$ и $\overline{n}$. Получим вектор $\overline{AC}=\overline{m}+\overline{n}$.
4. Разделим ребро $\overline{AA'}=\overline{p}$ на две равные части точкой Q. Вектор $\overline{AQ}=\frac{1}{2}\overline{p}$.



5. Через точку Q проведем прямую $QK \parallel AC$.

6. По правилу параллелограмма выполним сложение векторов $\overline{AC} = \overline{m} + \overline{n}$ и $\overline{AQ} = \frac{1}{2}\overline{p}$. Получим вектор $\overline{AK} = \overline{m} + \overline{n} + \frac{1}{2}\overline{p}$.

Ответ: $\overline{AK} = \overline{m} + \overline{n} + \frac{1}{2}\overline{p}$.

Обучающий пример

Заданы векторы $\overline{a}$(-1; 2; 0), $\overline{b}$(3; 1; 1), $\overline{c}$(2; 0; 1) и $\overline{d} = \overline{a} - 2\overline{b} + \frac{1}{3}\overline{c}$.

Вычислить:

а) $\overline{a}$, направляющие косинусы вектора $\overline{a}$ и его $\overline{a_0}$;

б) $\cos\left(\overline{b},\widehat{\ }\,\overline{j}\right)$;

в) координаты вектора $\overline{d}$.

1. Вычислим длину вектора $\overline{a}\left(-1;\ 2;\ 0\right)$: $|\overline{a}| = \sqrt{\left(-1\right)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}$.

Вычислим направляющие косинусы вектора:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\overline{a}|} = \frac{-1}{\sqrt{5}},$$

$$\cos\beta = \frac{a_y}{|\overline{a}|} = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{|\overline{a}|} = \frac{0}{\sqrt{5}} = 0.$$

Найдем орт-вектор $\overline{a_0}$: $\overline{a_0}\left(\frac{a_x}{|\overline{a}|},\ \frac{a_y}{|\overline{a}|},\ \frac{a_z}{|\overline{a}|}\right) = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}};\ \frac{2}{\sqrt{5}};\ 0\right)$.

2. Вычислим $\cos\left(\overline{b},\widehat{\ }\,\overline{j}\right)$: $b_y = np_{\overline{j}}\overline{b} = \left|\overline{b}\right| \cdot \cos\left(\overline{b}\widehat{\ }\,\overline{j}\right)$, $0 \le \left(\overline{b}\widehat{\ }\,\overline{j}\right) \le \pi$.

Вычислим длину вектора $\overline{b}\left(3;\ 1;\ 1\right)$:

$$\left|\overline{b}\right| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{11},\ 1 = \sqrt{11}\cos\left(\overline{b}\widehat{\ }\,\overline{j}\right) \Rightarrow \cos\left(\overline{b}\widehat{\ }\,\overline{j}\right) = \frac{1}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11}}{11}.$$

3. Вычислим координаты вектора $\overline{d}$:

$$\overline{d} = \overline{a} - 2\overline{b} + \frac{1}{3}\overline{c} \ \Rightarrow\ \overline{d} = \overline{a}\left(-1;\ 2;\ 0\right) - 2\cdot\overline{b}\left(3;\ 1;\ 1\right) + \frac{1}{3}\overline{c}\left(2;\ 0;\ 1\right) =$$

$$=\left(-1-2\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot 2;\ 2-2\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot 0;\ 0-2\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot 1\right)=\left(-\frac{19}{3};\ 0;\ -\frac{5}{3}\right).$$

Ответ: $\left(\frac{-1}{\sqrt{5}};\ \frac{2}{\sqrt{5}};\ 0\right)$, $\frac{\sqrt{11}}{11}$, $\left(-\frac{19}{3};\ 0;\ -\frac{5}{3}\right)$.

Обучающий пример

Однородный стержень с концами в точках $A(3;\,2)$ и $B(12;\,8)$ разделен точками M и N на три равные части. Найти:

1) длину стержня;
2) координаты центра тяжести стержня;
3) координаты точек M и N;
4) отношение λ_B, в котором точка B делит отрезок MN.

1. Воспользуемся формулой: $AB=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$. Тогда $AB=\sqrt{(12-3)^2+(8-2)^2}=\sqrt{9^2+6^2}=\sqrt{81+36}=\sqrt{117}$ (ед.).

2. Центр тяжести стержня, т.к. он однородный, будет находиться в его середине. Математически это означает, что нужно определить середину отрезка AB.

Для точки 0 отношение $\lambda_0=1$, т.к. $\overline{AO}=1\cdot\overline{OB}$. Значит,

$$x_0=\frac{x_A-x_B}{2}=\frac{3+12}{2}=\frac{15}{2},$$

$$y_0=\frac{y_A-y_B}{2}=\frac{2+8}{2}=5\quad\Rightarrow\left(\frac{15}{2};\ 5\right).$$

3. Для точки M найдем такое отношение $\lambda_м$, что $\overline{AM}=\lambda\cdot\overline{MB}$. Т.к. $\overline{AM}\downarrow\downarrow\overline{MB}$ и $\left|\overline{AM}\right|=\frac{1}{2}\left|\overline{MB}\right|$, то $\lambda_м=\frac{1}{2}$.

Вычислим координаты точки M:

$$x_M=\frac{x_A+\lambda_M\cdot x_B}{1+\lambda_M}=\frac{3+\frac{1}{2}\cdot 12}{1+\frac{1}{2}}=\frac{9}{\frac{3}{2}}=6,$$

$$y_M=\frac{y_A+\lambda_M\cdot y_B}{1+\lambda_M}=\frac{2+\frac{1}{2}\cdot 8}{\frac{3}{2}}=\frac{6}{\frac{3}{2}}=4\ \Rightarrow M\left(6;4\right).$$

4. Искомое отношение λ_B = -2, т.к. векторы $\overline{MB}$ и $\overline{BN}$ противонаправлены и $\left|\overline{MB}\right| = 2 \cdot \left|\overline{BN}\right|$.

Обучающий пример

Вектор $\bar{x}$, коллинеарный вектору $\bar{a}$(0; 6; -8), образует острый угол с осью *Oz*. Зная, что $\left|\bar{x}\right|$ = 50, найти его координаты.

1. Пусть координаты вектора $\bar{x}\left(x; y; z\right)$.
2. Т.к. векторы $\bar{x}$ и $\bar{a}$ коллинеарны, то выполняется следующее соотношение:

$$\frac{x_x}{a_x} = \frac{x_y}{a_y} = \frac{x_z}{a_z} = \lambda \Rightarrow \frac{x_x}{0} = \frac{x_y}{6} = \frac{x_z}{-8} = \lambda \Rightarrow \begin{cases} x_x = 0 \cdot \lambda \\ x_y = 6 \cdot \lambda \\ x_z = -8 \cdot \lambda \end{cases} \Rightarrow \bar{x}\left(0; 6\lambda; -8\lambda\right).$$

3. Вычислим длину вектора $\bar{x}\left(0; 6\lambda; -8\lambda\right)$:

$$\left|\bar{x}\right| = \sqrt{0^2 + \left(6\lambda\right)^2 + \left(-8\lambda\right)^2} = \sqrt{0 + 36\lambda^2 + 64\lambda^2} = \sqrt{100\lambda^2} = 10\left|\lambda\right|.$$

4. По условию $\left|\bar{x}\right|$ = 50, следовательно, $10\left|\lambda\right| = 50 \Rightarrow \left|\lambda\right| = 5$.
5. По условию вектор $\bar{x}$ образует острый угол с осью *Oz*, значит, координата $x_z > 0$, $\bar{x}\left(0;\ 6\lambda;\ -8\lambda\right) \Rightarrow\ -8\lambda > 0\ \Rightarrow \lambda < 0 \Rightarrow\ \lambda = -5$.
6. $\bar{x}\left(0 \cdot (-5);\ 6 \cdot (-5);\ -8 \cdot (-5)\right) = \left(0;\ -30;\ 40\right)$.

Ответ: $\left(0;\ -30;\ 40\right)$.

Обучающий пример

На плоскости заданы векторы $\overline{e_1}$(-1; 2), $\overline{e_2}$(2; 1) и $\bar{a}$(0; -2). Убедиться, что $\left\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\right\}$ – базис. Найти разложение вектора $\bar{a}$ по базису $\left\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\right\}$.

1. Убедимся, что векторы $\left\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\right\}$ образуют базис: $\frac{-1}{2} \neq \frac{2}{1} \Rightarrow$ векторы $\overline{e_1}, \overline{e_2}$ не компланарны, значит, могут образовывать базис.
2. Запишем векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{a}$ разложением по базису $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$:

$\bar{e}_1 = -1\bar{i} + 2\bar{j}; \bar{e}_2 = 2\bar{i} + 1\bar{j}; \bar{a} = 0\bar{i} - 2\bar{j}$.

3. Пусть разложение вектора $\overline{a}$ по базису $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$ будет иметь следующие координаты $\overline{a}(\alpha;\beta)$, тогда

$$\overline{a} = \alpha\overline{e}_1 + \beta\overline{e}_2 \Rightarrow 0\overline{i} - 2\overline{j} = \left(-1\overline{i} + 2\overline{j}\right)\cdot\alpha + \left(2\overline{i} + 1\overline{j}\right)\cdot\beta .$$

Раскроем скобки и выполним преобразования:

$$0\overline{i} - 2\overline{j} = -1\overline{i}\cdot\alpha + 2\overline{j}\cdot\alpha + 2\overline{i}\cdot\beta + 1\overline{j}\cdot\beta \Rightarrow$$
$$0\overline{i} - 2\overline{j} = (-\alpha + 2\beta)\cdot\overline{i} + (2\alpha + \beta)\cdot\overline{j} .$$

Приравняем коэффициенты, стоящие при одинаковых векторах в левой и правой частях и решим систему:

$$\begin{cases} -\alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha + \beta = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\dfrac{4}{5} \\ \beta = -\dfrac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow \overline{a} = -\frac{4}{5}\overline{e}_1 - \frac{2}{5}\overline{e}_2 .$$

Ответ: $\overline{a} = -\frac{4}{5}\overline{e}_1 - \frac{2}{5}\overline{e}_2$.

Обучающий пример

В произвольной точке пространства приложены силы $\overline{F_1}(0;\ 6;\ 8)$ и $\overline{F_2}(4;\ 0;\ 3)$. Определить вектор $\overline{S}$, направленный по биссектрисе угла между силами $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$.

Для определения $\overline{S}$ необходимо использовать свойство диагоналей ромба, которые являются биссектрисами своих углов.

Для этого построим ромб на $\overline{F_1}(0;\ 6;\ 8)$и $\overline{F_2}(4;\ 0;\ 3)$. У ромба все стороны равны, поэтому вычислим орты указанных векторов:

$$\left|\overline{F_1}\right| = \sqrt{0+36+64} = \sqrt{100} = 10,\ \left|\overline{F_2}\right| = \sqrt{16+0+9} = 5 .$$

$$\overline{F}_1^0 = \left(\frac{0}{10};\ \frac{6}{10};\ \frac{8}{10}\right) = (0;\ 0,6;\ 0,8),\ \overline{F}_2^0 = \left(\frac{4}{5};\ \frac{0}{5};\ \frac{3}{5}\right) = (0,8;\ 0;\ 0,6).$$

$$\overline{S} = (0+0,8;\ 0,6+0;\ 0,8+0,6) = (0,8;\ 0,6;\ 1,4).$$

Ответ: $(0,8;\ 0,6;\ 1,4)$.

Решить самостоятельно в командах

Вариант 1

1. Дана прямоугольная трапеция *ABCD*, длины оснований *AD* и *BC* которой соответственно равны 4 и 2, а угол *D* равен 45°. Найти проекции векторов $\overline{AD}, \overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$ на ось *l*, определяемую вектором $\overline{CD}$.

Ответ: $\text{Пр}_l\overline{AD} = 2\sqrt{2}$, $\text{Пр}_l\overline{AB} = \sqrt{2}$, $\text{Пр}_l\overline{BC} = -\sqrt{2}$, $\text{Пр}_l\overline{AC} = 0$.

2. Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}(3;\ -5;\ 8)$ и $\overline{b}(-1;\ 1;\ -4)$.

Ответ: 6; 14.

3. Вычислить длину медиан треугольника, зная координаты его вершин: *A*(3; -2), *B*(5; 2) и *C*(-1; 4).

Ответ: $\sqrt{26}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{41}$.

4. Отрезок, ограниченный точками $A(-1;\ 8;\ -3)$ и $B(9;\ -7;\ 2)$, разделен точками M_1, M_2, M_3, M_4 на пять равных частей. Найдите координаты точек M_1 и M_3.

Ответ: M_1 **(**1; 5; -2), M_3 **(**5; -1; 0).

5. Найти вектор $\overline{x}$, направленный по орту биссектрисы угла между векторами $\overline{a}$(1; 2; 2) и $\overline{b}$(2; 3; -6).

Ответ: $\overline{x}\left(\frac{13}{21}; \frac{23}{21}; -\frac{4}{21}\right)$.

6. Даны векторы $\overline{e_1}$ (2; 7; 3), $\overline{e_2}$ (3; 1; 8), $\overline{e_3}$ (2; -7; 4) в некотором базисе. Показать, что векторы $\left\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\right\}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\overline{a}$ (16; 14; 27) в этом базисе.

Ответ: $\overline{a} = 5\overline{e_1} + 3\overline{e_3}$.

Вариант 2

1. В треугольной пирамиде *SABCD* известны векторы $\overline{SA} = \overline{a}$, $\overline{SB} = \overline{b}$, $\overline{SC} = \overline{c}$. Найти вектор $\overline{SO}$, если точка *O* является центром масс треугольника *ABC*.

Ответ: $\overline{SO} = \dfrac{\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}}{3}$.

2. Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}(6;\ -1;\ 8)$ и $\overline{b}(0;\ 1;\ -4)$.

Ответ: $2\sqrt{13},\ 2\sqrt{46}$.

3. Найти расстояние от точки C(3; -4) до середины отрезка, концы которого A(1; 2) и B(5; 4).

Ответ: 7.

4. Отрезок, ограниченный точками $A(-1,8,-3)$ и $B(9,-7,2)$, разделен точками M_1, M_2, M_3, M_4 на пять равных частей. Найдите координаты точек M_2 и M_4.

Ответ: M_2 **(**3; 2; –1), M_4 **(**7; –4; 1).

5. Даны векторы $\overline{e_1}$ (1; 2; –3), $\overline{e_2}$ (–1; 0; 3), $\overline{e_3}$ (7; 9; –15), $\overline{a}$ (4; 10; –12) в некотором базисе. Показать, что векторы $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\overline{a}$ в этом базисе.

Ответ: $\overline{a} = 5\overline{e_1} + \overline{e_2}$.

6. Найти силу $\overline{F}$, направленную по орту биссектрисы угла между силами $\overline{F_1}$ (1; 2; –2) и $\overline{F_2}$ (4; –5; 20).

Ответ: $\overline{F}\left(\frac{11}{21};\ \frac{3}{7};\ \frac{2}{7}\right)$.

Вариант 3

1. В правильном пятиугольнике *ABCDE* заданы векторы, совпадающие с его сторонами: $\overline{AB} = \overline{m}$, $\overline{BC} = \overline{n}$, $\overline{CD} = \overline{p}$, $\overline{DE} = \overline{q}$ и $\overline{EA} = \overline{r}$. Построить векторы:

1) $\overline{m} - \overline{n} + \overline{p} - \overline{q} + \overline{r}$; 2) $\overline{m} + 2\overline{p} + \frac{1}{2}\overline{r}$; $2\overline{m} + \frac{1}{2}\overline{n} - 3\overline{p} - \overline{q} + 2\overline{r}$.

2. Определить, при каких значениях α, β векторы $\overline{a} = -2\overline{i} + 3\overline{j} + \beta\overline{k}$ и $\overline{b} = \alpha\overline{i} - 6\overline{j} + 2\overline{k}$ коллинеарны.

Ответ: $\alpha = 4$, $\beta = -1$.

3. Отрезок AB с концами в точках A(-3; 2) и B(4; -5) делится точкой C в отношении $\lambda = 3$. Найти координаты точки деления.

Ответ: $C(2,25;\ -3,25)$.

4. Отрезок, ограниченный точками $A(-1;\ 8;\ -3)$ и $B(9;\ -7;\ 2)$, разделен точками M_1, M_2 на три равные части. Найдите координаты точек M_1 и M_2.

Ответ: $M_1\left(\frac{7}{3};\ 3;\ \frac{4}{3}\right)$, $M_2\left(\frac{17}{3};\ -2;\ \frac{1}{3}\right)$.

5. Даны векторы $\overline{e_1}$(2; 0; 1), $\overline{e_2}$(1; -1; 2), $\overline{e_3}$(3; 4; -2), $\overline{a}$(8; -1; 8) в некотором базисе. Показать, что векторы $\left\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\right\}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\overline{a}$ в этом базисе.

Ответ: $\overline{a} = 5\overline{e_2} + \overline{e_3}$.

6. Найти силу $\overline{F}$, направленную по биссектрисе угла между силами $\overline{F_1}$(2; -3; 6) и $\overline{F_2}$(4; 5; -20).

Ответ: $\overline{F}\left(\frac{10}{21}; -\frac{4}{21}; -\frac{2}{21}\right)$.

Вариант 4

1. Дана прямоугольная трапеция *ABCD*, длины оснований *AD* и *BC* которой соответственно равны 4 и 1, а угол *D* равен 60°. Найти проекции векторов $\overline{AD}, \overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$ на ось *l*, определяемую вектором $\overline{CD}$.

Ответ: Пр$_l\overline{AD}$ = 2, Пр$_l\overline{AB}$ = -4,5, Пр$_l\overline{BC}$ = 0,5, Пр$_l\overline{AC}$ = 4.

2. Даны точки $A(-1;\ 5;\ -10)$, $B(5;\ -7;\ 8)$, $A(2;\ 2;\ -7)$ и $D(5;\ -4;\ 2)$. Проверить, что векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ коллинеарны, и установить, какой из них длиннее другого и во сколько раз, как они направлены – в одну или в противоположные стороны.

Ответ: $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ коллинеарны; $\overline{AB}$ длиннее $\overline{CD}$ в 2 раза; направлены в одну сторону.

3. Отрезок *AB*, соединяющий точки *A*(2; 5) и *B*(4; 9), разделить в отношении 1:3.

Ответ: $C(\frac{5}{2}; 6)$.

4. Отрезок, ограниченный точками $A(0;\ 1;\ -5)$ и $B(9;\ -7;\ 2)$, разделен точками M_1, M_2, M_3, M_4 на пять равных частей. Найдите координаты точек M_1 и M_3.

Ответ: M_1**(**1,8; -0,6; -3,6), M_3**(**5,4; -3,8; -0,8).

5. Даны векторы $\overline{e_1}$ (1; -3; 4), $\overline{e_2}$ (7; 3; -2), $\overline{e_3}$ (-2; 1; -1), $\overline{a}$ (-3; -1; 2) в некотором базисе. Показать, что векторы $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\overline{a}$ в этом базисе.

Ответ: $\overline{a} = \overline{e_1} + 2\overline{e_3}$.

6. Найти вектор $\overline{x}$, направленный по орту биссектрисы угла между векторами $\overline{a}$ (2; 4; 4) и $\overline{b}$ (4; 5; -20).

Ответ: $\overline{x}\left(\frac{11}{21}; \frac{19}{21}; -\frac{6}{21}\right)$.

Вариант 5

1. В параллелограмме *ABCDA'B'C'D'* заданы векторы совпадающие с его ребрами: $\overline{AB} = \overline{m}$, $\overline{AD} = \overline{n}$ и $\overline{AA'} = \overline{p}$. Построить каждый из следующих векторов: 1) $\overline{m} + \overline{n} + \overline{p}$; 2) $\overline{m} + \overline{n} + \frac{1}{2}\overline{p}$; 3) $\frac{1}{2}\overline{m} + \frac{1}{2}\overline{n} + \overline{p}$; 4) $\overline{m} + \overline{n} - \overline{p}$; 5) $-\overline{m} - \overline{n} + \frac{1}{2}\overline{p}$.

2. Определить модули суммы и разности векторов $\overline{a}(3;-5;8)$ и $\overline{b}(-1;1;-4)$.

Ответ: $|\overline{a} + \overline{b}| = 6$, $|\overline{a} - \overline{b}| = 14$.

3. Даны вершины треугольника: *A*(-4; 6), *B*(-8; 9), *C*(5; -6). Определить середины его сторон.

Ответ: $E(-6;\ \frac{15}{2})$, $F(\frac{1}{2};\ 0)$, $K\left(-\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}\right)$.

4. Отрезок, ограниченный точками $A(-1;\ 8;\ -3)$ и $B(0;\ -3;\ 2)$, разделен точками M_1, M_2, M_3, M_4 на пять равных частей. Найдите координаты точек M_1 и M_3.

Ответ: M_1**(**-0,8; 5,8; –2), M_3**(**–0,4; 1,4; 0).

5. Даны векторы $\overline{e_1}$ (1; 2; 3), $\overline{e_2}$ (-1; 3; 2), $\overline{e_3}$ (7; –3; 5), $\overline{a}$ (6; 10; 17) в некотором базисе. Показать, что векторы $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\overline{a}$ в этом базисе.

Ответ: $\overline{a} = 2\overline{e_1} + 3\overline{e_2} + \overline{e_3}$.

6. Две силы $\overline{F_1}$ (2; –3; 6) и $\overline{F_2}$ (–1; 2; –2) приложены к одной точке. Определить координаты силы $\overline{F}$, направленной по биссектрисе угла между силами $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$, при условии, что $\left|\overline{F}\right| = 3\sqrt{42}$.

Ответ: $\overline{F}$ (–3; 15; 12).

Практическое занятие № 2

Скалярное произведение векторов, его свойства и выражение через координаты. Условие ортогональности векторов. Векторное произведение векторов, его свойства и выражение через координаты. Смешанное произведение трех векторов, его свойства и выражение через координаты. Условие компланарности трех векторов

Обучающий пример

Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют угол $\varphi=\frac{5\pi}{6}$. Зная, что $\left|\overline{a}\right|=6$, $\left|\overline{b}\right|=4$, вычислить $\left|\left(3\overline{a}-2\overline{b}\right)\times\left(2\overline{a}+5\overline{b}\right)\right|$.

Используя свойства векторного произведения, упростим выражение для вектора:

$$\left(3\overline{a}-2\overline{b}\right)\times\left(2\overline{a}+5\overline{b}\right)=3\overline{a}\times 2\overline{a}+3\overline{a}\times 5\overline{b}+\left(-2\overline{b}\right)\times 2\overline{a}+\left(-2\overline{b}\right)\times 5\overline{b}=$$

$$=6\overline{a}\times\overline{a}+15\overline{a}\times\overline{b}-4\overline{b}\times\overline{a}-10\overline{b}\times\overline{b}=\left[\overline{a}\times\overline{a}=\overline{b}\times\overline{b}=0;\overline{a}\times\overline{b}=-\overline{b}\times\overline{a}\right]=$$

$$=6\cdot 0+15\overline{a}\times\overline{b}+4\overline{a}\times\overline{b}-10\cdot 0=19\overline{a}\times\overline{b}.$$

Следовательно,

$$\left|\left(3\overline{a}-2\overline{b}\right)\times\left(2\overline{a}+5\overline{b}\right)\right|=\left|19\overline{a}\times\overline{b}\right|=19\cdot\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\sin\varphi==19\cdot 6\cdot 4\cdot\sin\frac{5\pi}{6}=228.$$

Ответ: 228.

Обучающий пример

Вектор $\overline{x}$, перпендикулярный к вектору $\overline{a}\left(6;\ -8;\ 1\right)$ и оси *Ox*, образует острый угол с осью *Oz*. Зная, что $\left|\overline{x}\right|=\sqrt{65}$, найти его координаты.

Пусть вектор имеет следующие координаты $\overline{x}\left(x;y;z\right)$. По условию $\overline{x}\left(x;y;z\right)\perp\overline{a}\left(6;\ -8;\ 1\right)$ и $\overline{x}\left(x;y;z\right)\perp Ox\Rightarrow\overline{x}\left(x;y;z\right)\perp\overline{i}\left(1;\ 0;\ 0\right)$. По определению векторного произведения $\overline{c}=\overline{a}\times\overline{i}\Rightarrow\overline{c}\perp\overline{a}$ и $\overline{c}\perp\overline{i}\ \Rightarrow\overline{c}\parallel\overline{x}$.

$$\overline{c}=\overline{a}\times\overline{i}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 6 & -8 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=\overline{i}\cdot\begin{vmatrix}-8 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}-\overline{j}\begin{vmatrix}6 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}+k\begin{vmatrix}6 & -8\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0\cdot\overline{i}+1\cdot\overline{j}+8\cdot\overline{k}.$$

$\bar{c}(0;\ 1;\ 8) \Rightarrow \bar{c} \parallel \bar{x} \Rightarrow \dfrac{x}{0} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{8} = \lambda \Rightarrow \bar{x}(0\cdot\lambda; 1\cdot\lambda; 8\cdot\lambda) = \bar{x}(0;\ \lambda;\ 8\lambda)$.

Зная, что

$|\bar{x}| = \sqrt{65} \Rightarrow |\bar{x}| = \sqrt{0^2 + \lambda^2 + (8\lambda)^2} = \sqrt{65\lambda^2} = |\lambda| \cdot \sqrt{65} = \sqrt{65}$,

$|\lambda| \cdot \sqrt{65} = \sqrt{65} \Rightarrow |\lambda| = 1$. Вектор $\bar{x}(0;\ \lambda;\ 8\lambda)$ образует острый угол с осью Oz, поэтому координата $z = 8\lambda > 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \bar{x}(0;\ 1;\ 8)$.

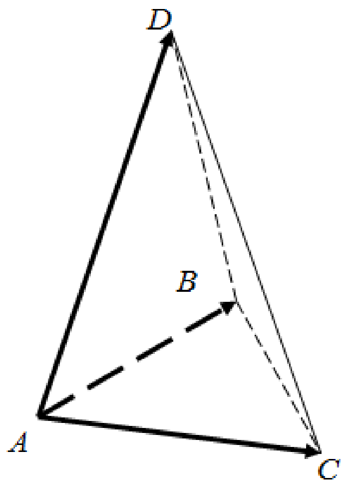
Ответ: $\bar{x}(0;\ 1;\ 8)$.

Обучающий пример

1. Даны вершины пирамиды A(1;-1; 4), B(0; 3; 7), C(0; 0; -6), D(4; 3; 0). Вычислить:

а) площадь основания ΔABC;
б) угол между ребрами AB и AC;
в) объем пирамиды;
г) высоту пирамиды.

Сделаем схематический чертеж.



Вычислим координаты следующих векторов по формуле

$A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2) \Rightarrow \overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$:

$\overline{AB} = (0-1;\ 3+1;\ 7-4) = (-1;\ 4;\ 3)$,

$\overline{AC} = (0-1;\ 0+1;\ -6-4) = (-1;\ 1;\ -10)$,

$\overline{AD} = (4-1;\ 3+1;\ 0-4) = (3;\ 4;\ -4)$.

Вычислим площадь основания ΔABC по формуле $S = \dfrac{1}{2} \cdot \left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right|$:

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -1 & 4 & 3\\ -1 & 1 & -10\end{vmatrix}=-40\bar{i}-3\bar{j}-\bar{k}+4\bar{k}-3\bar{i}-10\bar{j}=$$

$$=-43\bar{i}-13\bar{j}+3\bar{k}\Rightarrow\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\sqrt{(-43)^2+(-13)^2+(3)^2}=\sqrt{2027}\approx 45,02.$$

$$S=\frac{1}{2}\cdot\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\cdot 45,02=22,51.$$

Вычислим угол между ребрами AB и AC по формуле

$$\bar{a}\left(a_x;a_y;a_z\right),\bar{b}\left(b_x;b_y;b_z\right)\Rightarrow\cos\alpha=\frac{a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}},$$

$$\cos\alpha=\frac{(-1)\cdot(-1)+4\cdot 1+3\cdot(-10)}{\sqrt{(-1)^2+4^2+3^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+1^2+(-10)^2}}=\frac{1+4-30}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{102}}=\frac{-25}{\sqrt{2652}}\approx -0,46,$$

$$\alpha=\arccos(-0,46)\approx 118.$$

Вычислим объем пирамиды по формуле $V=\frac{1}{6}\cdot\left|\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}\right|$:

$$\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}=\begin{vmatrix}-1 & 4 & 3\\ -1 & 1 & -10\\ 3 & 4 & -4\end{vmatrix}=4-12-120-9-40-16=-193.$$

$$V=\frac{1}{6}\cdot\left|\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}\right|=\frac{1}{6}\cdot\left|-193\right|=\frac{193}{6}\approx 32,2.$$

Вычислим высоту пирамиды

$$V=\frac{1}{3}\cdot S_{осн}\cdot H\Rightarrow H=\frac{3V}{S_{осн}}=\frac{3\cdot 32,3}{22,51}\approx 4,3.$$

Ответ: 22,51; 118°; 32,2; 4,3.

Решить самостоятельно в командах

Вариант 1

1. Вычислите длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}=2\bar{m}+\bar{n}$ и $\bar{b}=\bar{m}-2\bar{n}$, где $\bar{m}$ и $\bar{n}$ – единичные векторы, угол между которыми 60°.

Ответ: $\sqrt{7}$ и $\sqrt{13}$.

2. Найти координаты вектора $\overline{x}$, коллинеарного вектору $\overline{a}(2; 1; -1)$ и удовлетворяющего условию $\overline{a}\cdot\overline{x}=3$.

Ответ: $\overline{x}(1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$.

3. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\overline{a}|=3$, $|\overline{b}|=4$, вычислить $|(a+b)\times(a-b)|$.

Ответ: 24.

4. Вектор $\overline{c}$ перпендикулярен векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$, угол между $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равен 30°. Зная, что $|\overline{a}|=6$, $|\overline{b}|=3$, $|\overline{c}|=3$, вычислить $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$.

Ответ: ±27.

5. Вектор $\overline{m}$, перпендикулярный к оси *Oz* и к вектору $\overline{a}(8;\ -15;\ 3)$, образует с осью *Ox* острый угол. Зная, что $|\overline{x}|=51$, найти его координаты.

Ответ: $\overline{m}(45; 24; 0)$.

6. Даны вершины пирамиды $A(2; 0; 4)$, $B(0; 3; 7)$, $C(0; 0; 6)$, $D(4; 3; 5)$. Вычислить:

а) площадь основания ΔABC;
б) угол между ребрами AB и AC;
в) объем пирамиды;
г) высоту пирамиды.

Ответ: $\sqrt{19}$; $\arccos\left(\frac{5}{2\sqrt{11}}\right)$; 2; $\frac{6}{\sqrt{19}}$.

Вариант 2

1. Найти координаты вектора $\overline{x}$, коллинеарного вектору $\overline{a}(1; 2; -3)$ и удовлетворяющего условию $\overline{a}\cdot\overline{x} = 28$.

Ответ: $\overline{x}(2; 4; -6)$.

2. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\overline{c}(2; 1; 0)$, $\overline{b}(0; -2; 1)$.

Ответ: 90°.

3. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{\pi}{6}$, зная, что $|\bar{a}| = \sqrt{3}$, $|\bar{b}| = 1$, вычислить угол α между векторами $\bar{p} = \bar{a} + \bar{b}$ и $\bar{q} = \bar{a} - \bar{b}$.

Ответ: $\arccos\frac{2}{7}$.

4. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, образующие правую тройку, взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\bar{a}| = 4$, $|\bar{b}| = 2$, $|\bar{c}| = 3$, вычислить $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

Ответ: 24.

5. Найти вектор $\bar{x}$, зная, что он перпендикулярен к векторам $\bar{a}(2;-3;1)$ и $\bar{b}(1;-2;3)$ и удовлетворяет условию: $\bar{x}\left(\bar{i} + 2\bar{j} - 7\bar{k}\right) = 10$.

Ответ: (7; 5; 1).

6. Даны вершины пирамиды A(3; 4; 5), B(1; 2; 1), C(-2; -3; 6), D(3;-6;-3). Вычислить:

а) площадь основания ΔABC;
б) угол между ребрами AB и AC;
в) объем пирамиды;
г) высоту пирамиды.

Ответ: $5\sqrt{14}$; $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$; 42; $\frac{9\sqrt{14}}{5}$.

Вариант 3

1. Вектор $\bar{x}$, коллинеарный вектору $\bar{a}$ (3; 4; -12), образует с осью Oy тупой угол. Зная, что $|\bar{x}|$ = 26, найти его координаты.

Ответ: $\bar{x}$(-6; –8; 24).

2. Даны вершины треугольника A(-1; -2; 4), B(-4; -2; 0) и C(3; -2; 1). Определить его внутренний угол при вершине B.

Ответ: 45^0.

3. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$, вычислить $\left|\left(3\bar{a} - \bar{b}\right) \times \left(\bar{a} - 2\bar{b}\right)\right|$.

Ответ: -60.

4. Вектор $\bar{x}$, перпендикулярный к векторам $\bar{a}(4;-2;-3)$ и $\bar{b}(0;1;3)$, образует с осью *Oy* тупой угол. Зная, что $|\bar{x}|=26$, найти его координаты.

Ответ: (-6; -24; 8).

5. Доказать тождество $(\bar{a}+\bar{b})(\bar{b}+\bar{c})(\bar{c}+\bar{a})=2\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

6. Даны вершины пирамиды $A(3;\ -2;\ 6)$, $B(-6;\ -2;\ 3)$, $C(1;\ 1;\ -4)$, $D(4;\ 6;\ -7)$. Вычислить:

а) площадь основания ΔABC;

б) угол между ребрами *AB* и *AC*;

в) объем пирамиды;

г) высоту пирамиды.

Ответ: $\frac{3}{2}\sqrt{874}$; $\arccos\left(\frac{8\sqrt{1130}}{565}\right)$; 52; $\frac{52\sqrt{874}}{437}$.

Вариант 4

1. Найти вектор $\bar{x}$, коллинеарный вектору $\bar{a}(4;\ 2;\ -5)$ и удовлетворяющий условию $\bar{x}\cdot\bar{a}=-90$.

Ответ: $\bar{x}(-8;\ -4;\ 10)$.

2. Даны вершины треугольника $A(3;\ 2;\ -3)$, $B(5;\ 1;\ -1)$ и $C(1;\ -2;\ 1)$. Определить внешний угол при вершине *A*.

Ответ: $\arccos\left(-\frac{4}{9}\right)$.

3. Даны точки $A(-1;3;-7), B(2;-1;5)$ и $C(0;1;-5)$. Вычислить $\left(2\overline{AB}-\overline{CB}\right)\cdot\left(2\overline{BC}+\overline{BA}\right)$.

Ответ: -524.

4. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\bar{a}|=4$, $|\bar{b}|=1$, вычислить: $|(a+4b)\times(2a-b)|$.

Ответ: 36.

5. Даны силы $\bar{M}(2;\ -1;\ -3)$, $\bar{N}(3;\ 2;\ -1)$ и $\bar{P}(-4;\ 1;\ 3)$, приложенные к точке $C(-1;\ 4;\ -2)$. Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки $A(2;\ 3;\ -1)$.

Ответ: $\sqrt{66},\ \cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{66}},\ \cos\beta=\dfrac{-4}{\sqrt{66}},\ \cos\gamma=\dfrac{-7}{\sqrt{66}}$.

6. Даны вершины пирамиды $A(2;\ 0;\ 4)$, $B(0;\ 3;\ 7)$, $C(0;\ 0;\ 6)$, $D(4;\ 3;\ 5)$. Вычислить:

а) площадь основания ΔABC;
б) угол между ребрами AB и AC;
в) объем пирамиды;
г) высоту пирамиды.

Ответ: $9\sqrt{35};\ \arccos\left(\dfrac{4\sqrt{715}}{143}\right);\ 46;\ \dfrac{46\sqrt{35}}{105}$.

Вариант 5

1. Найти вектор $\bar{x}$, коллинеарный вектору $\bar{a}(5;\ 2;\ –1)$ и удовлетворяющий условию $\bar{x}\cdot\bar{a}=90$.

Ответ: $\bar{x}(15;\ 6;\ –3)$.

2. Даны вершины треугольника ABC $A(-1;\ -2;\ 4)$, $B(-4;\ -2;\ 0)$ и C $(3;\ -2;\ 1)$. Вычислить внешний угол при вершине B.

Ответ: $\dfrac{3\pi}{4}$.

3. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\varphi=\dfrac{2}{3}\pi$. Зная, что $|\bar{a}|=1$, $|\bar{b}|=2$, вычислить $\left((2a+b)\times(a+2b)\right)^2$.

Ответ: 27.

4. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, образующие левую тройку, взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\bar{a}|=1$, $|\bar{b}|=4$, $|\bar{c}|=3$, вычислить $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

Ответ: –12.

5. Даны два вектора: $\overline{a}(3;\ -1;\ 5)$ и $\overline{b}(1;\ 2;\ -3)$. Найти вектор $\overline{x}$ при условии, что он перпендикулярен к оси *Oz* и удовлетворяет условиям: $\overline{x}\cdot\overline{a}=9$, $\overline{x}\cdot\overline{b}=-4$.

Ответ: (2; –3; 0).

6. Даны вершины пирамиды $A(-5;\ -4;\ -3)$, $B(7;\ 3;\ -1)$, $C(6;\ -2;\ 0)$, $D(3;\ 2;\ -7)$. Вычислить:

а) площадь основания ΔABC;

б) угол между ребрами *AB* и *AC*;

в) объем пирамиды;

г) высоту пирамиды.

Ответ: $3\sqrt{366}$; $\arccos\left(\dfrac{76\sqrt{26398}}{13199}\right)$; 44; $\dfrac{22\sqrt{366}}{183}$.

ТРЕХУРОВНЕВЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ К РАЗДЕЛУ «ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА»

Уровень I

1. Даны векторы $\bar{a}$ (2; 1; -2), $\bar{b}$ (3; 2; 4), $\bar{c}$ (-4; -2; 4). Найти:

I.

– какие из заданных векторов:
  а) коллинеарные;
  б) перпендикулярные;

– найти $\bar{a} \times \bar{c}$.

II.

– $\bar{a}_0$;

– $\left(\bar{a} \hat{\ } \bar{b}\right)$;

– $\text{Пр}_{\bar{a}} \bar{c}$.

2. На плоскости даны точки A(1; 2), B(-1; 3), C(2; 5). Доказать, что векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ образуют базис. Разложить $\overline{BC}$ по этому базису, найти направляющие косинусы вектора $\overline{AB}$.

Уровень II

1. Заданы векторы $\bar{a}$ = (-1; 2; 0), $\bar{b}$ = (3; 1; 1), $\bar{c}$ = (2; 0; 1). Найти:

а) $\bar{a} \times \bar{b}$, $\bar{a} \cdot \bar{c}$;

б) $\text{Пр}_{\bar{a}} \bar{c}$, $\cos\left(\bar{a} \hat{\ } \bar{b}\right)$;

в) S *параллелограмма*, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

г) $\bar{x} \uparrow\downarrow \bar{a}$, $|\bar{x}| = 2\sqrt{5}$, $\bar{x}$ – ?

2. Даны вершины пирамиды A_1(2; 0; -1), A_2(-2; -11; 5), A_3(1; -4; -1), A_4(-2; 1; -4). Найти:

а) проекцию вектора $\overline{A_3M}$ на вектор $\overline{A_3A_4}$;

б) угол $A_4A_1A_3$;

в) площадь грани $A_4A_1A_3$;

г) объем пирамиды;

д) высоту пирамиды.

3. Образует ли тройка $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ базис в пространстве? ($\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ из п. 1)

4.
а) Как вычислить работу силы?
б) $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0 \Leftrightarrow$?

5. Найти $|\bar{a}|^2$, если $\bar{a} = \bar{p} + \bar{r}$, $|\bar{p}| = 1$, $|\bar{r}| = 2$, $(\widehat{\bar{p}, \bar{r}}) = 60^0$.

Ответ: 7.

6. Даны векторы $\bar{a} = (4;\ 2;\ -1)$, $\bar{b} = (5;\ 3;\ -2)$, $\bar{c} = (3;\ 2;\ -1)$, $\bar{d} = (12;\ 7;\ -3)$ со своими координатами в базисе $(\bar{e}_1; \bar{e}_2; \bar{e}_3)$. Показать, что векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ сами образуют базис, найти разложение вектора $\bar{d}$ в новом базисе.

Ответ: $\bar{d} = 2\bar{a} - \bar{b} + 3\bar{c}$.

Уровень III

1. Найти вектор, перпендикулярный векторам $\bar{a}$ (1; 2; -3) и $\bar{b}$ (2; 4; 6).

2. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ имеют равные длины и образуют попарно равные углы. Найти координаты вектора $\bar{c}$, если $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j}$, $\bar{b} = \bar{j} + \bar{k}$.

Ответ: $\bar{c}\left(-\frac{1}{3};\ \frac{4}{3};\ -\frac{1}{3}\right)$ или $\bar{c}$ (1; 0; 1).

3. Даны векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, удовлетворяющие условию $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \bar{0}$. Зная, что $|\bar{a}| = 5$, $|\bar{b}| = 2$ и $|\bar{c}| = 3$, вычислить $\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{c} \cdot \bar{a} = \bar{0}$.

Ответ: -19.

4. Четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм, O – точка пересечения его диагоналей, M – произвольная точка, отличная от O. Можно ли выразить вектор $\bar{a} = \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD}$ через вектор $\overline{MO}$?

Ответ: да, $\bar{a} = 4\overline{MO}$.

5. Точка O является центром тяжести треугольника ABC. Доказать, что $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \bar{0}$.

6. В равнобочной трапеции $ABCD$ известны нижнее основание $\overline{AB} = \bar{a}$, боковая сторона $\overline{AD} = \bar{b}$ и угол между ними $\angle A = \frac{\pi}{3}$. Разложить по $\bar{a}$ и $\bar{b}$ все векторы, составляющие остальные стороны и диагонали трапеции.

Ответ: $\overline{BC} = -\frac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}\bar{a} + \bar{b}$; $\overline{CD} = \frac{|\bar{b}| - |\bar{a}|}{|\bar{a}|}\bar{a}$; $\overline{AC} = \frac{|\bar{a}| - |\bar{b}|}{|\bar{a}|}\bar{a} + \bar{b}$.

7. Вычислить высоту пирамиды, опущенную на ABD. При этом $A(-1;\ 2;\ 1)$, $B(1;\ -2;\ -3)$, $C(1;\ -1;\ -4)$, $D(-1;\ -4;\ -2)$.

Ответ: $h = \frac{1}{2}$.

ГЛОССАРИЙ

Новые понятия	Содержание
1	*2*
Скалярная величина	величина, которая может быть задана числом в выбранной системе единиц
Векторная величина	величина, которая задается значением и направлением
Коллинеарные вектора	вектора, лежащие на параллельных прямых (или на одной и той же прямой)
Координаты вектора $\overline{a}$ *в базисе* $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$	коэффициенты *X*, *Y*, *Z* в разложении вектора $\overline{a}$ по базису $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$: $\overline{a} = X \cdot \overline{i} + Y \cdot \overline{j} + Z \cdot \overline{k}$
Условие коллинеарности двух векторов, заданных координатами $\overline{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$ *и* $\overline{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$	пропорциональность их соответствующих координат: $\dfrac{X_1}{X_2} = \dfrac{Y_1}{Y_2} = \dfrac{Z_1}{Z_2}$
Направляющие косинусы вектора $\overline{a} = \{X, Y, Z\}$	косинусы углов, образуемых вектором $\overline{a}$ с положительными направлениями осей *OX*, *OY*, *OZ*: $\cos\alpha = \dfrac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$; $\cos\beta = \dfrac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$; $\cos\gamma = \dfrac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$
Скалярное произведение вектора $\overline{a}$ *на вектор* $\overline{b}$	число, равное произведению их модулей на косинус угла между ними: $\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \left\|\overline{a}\right\| \cdot \left\|\overline{b}\right\| \cdot \cos\varphi$
Формула вычисления скалярного произведения векторов $\overline{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$ *и* $\overline{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$, *заданных в координатной форме*	$\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = X_1 \cdot X_2 + Y_1 \cdot Y_2 + Z_1 \cdot Z_2$
Формула вычисления угла φ между векторами $\overline{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$ *и* $\overline{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$	$\cos\varphi = \dfrac{X_1 \cdot X_2 + Y_1 \cdot Y_2 + Z_1 \cdot Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \cdot \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}$
Условие перпендикулярности (ортогональности) двух векторов	$X_1 \cdot X_2 + Y_1 \cdot Y_2 + Z_1 \cdot Z_2 = 0$

1	2
Векторное произведение векторов в координатной форме	$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$
Геометрический смысл векторного произведения	$S_{\square}=\left\|\bar{a}\times\bar{b}\right\|$
Смешанное произведение	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)$
Смешанное произведение в координатной форме	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$
Условие компланарности трех векторов	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=0$
Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ *, как на сторонах*	$V=\left\|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right\|$

ПРИЛОЖЕНИЕ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА» С ПОМОЩЬЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПАКЕТОВ Maple и Mathcad

Предлагаемые программы помогут Вам при проверке домашнего задания, решении задач или, при необходимости, предоставят возможность удобной и быстрой работы с векторами.

Рассмотрим решения задач из указанной темы с помощью математического пакета **Maple.**

```
> with(linalg);
> u := [2, 3, 4] : v := [5, 6, 7];
                                        v := [5, 6, 7]
> linalg[dotprod](u, v);# Вычисляем скалярное произведение
                                              56
> linalg[crossprod](u, v); Вычисляем векторное произведение
                                        [-3  6  -3]
> evalm(v + u);# Сложение двух векторов
                                         [7  9  11]
> evalm(v- u) # Вычитание векторов
                                         [3  3  3]
> φ = angle(v, u);# Вычисление угла между векторами
```

$$\phi = \arccos\left(\frac{28}{1595}\sqrt{110}\sqrt{29}\right)$$

```
> norm(v, 2); # Вычисление длины вектора
```

$$\sqrt{110}$$

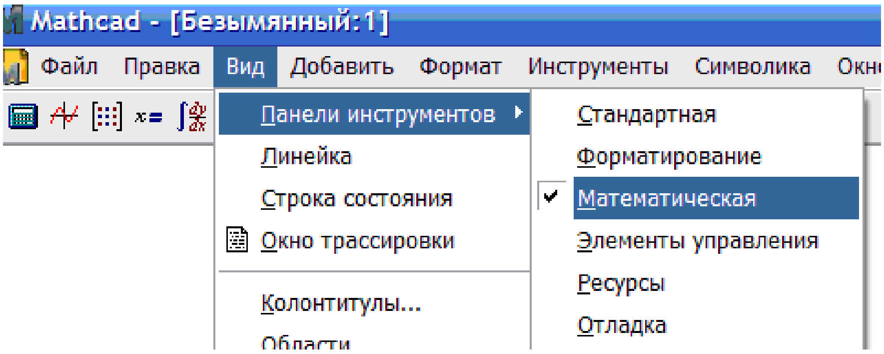
```
> normalize(v); Нормализация вектора
```

$$\left[\frac{1}{22}\sqrt{110}\ \ \frac{3}{55}\sqrt{110}\ \ \frac{7}{110}\sqrt{110}\right]$$

Рассмотрим один из наиболее популярных математических пакетов MathCAD.

Чтобы начать работать с приложением, вызовите панель Calculus (вычисления).

Выберите на панели вкладку ВИД → ПАНЕЛИ ИНСТРУМЕНТОВ → МАТЕМАТИЧЕСКАЯ



Далее появится панель 

. На данной вкладке необходимо выбрать панель «Матрица»

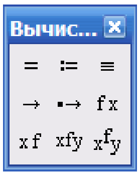
и продолжить работу.

Далее разобраны задачи, наиболее часто встречаемые в теме «Векторная алгебра».

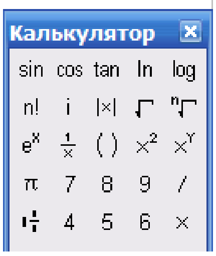
Операции над векторами

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = 32$$ скалярное произведение

$$\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-6\\3\end{pmatrix}$$ векторное произведение



$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\7\\9\end{pmatrix}$$ сложение двух векторов



$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-3\\-3\end{pmatrix}$$ разность двух векторов

Найти координаты вектора **d** в базисе **a,b,c**

$$\bar{a}(3,-1,2),\bar{b}(-2,3,1),\bar{c}(4,-5,-3),\bar{d}(-3,2,-3)$$

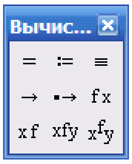
$$a := \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad c := \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

составим матрицу перехода

$$H := \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad d := \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Координаты вектора d в новом базисе

$$D := H^{-1} \cdot d \qquad D = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



ЛИТЕРАТУРА

1. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для втузов : в 2 ч. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – 4-е изд., испр. и доп. – М. : Высш. шк., 1986. – Ч. 1. – 304 с.

2. Высшая математика : учеб.-метод. комплекс / Т.А. Жур [и др.]. – Минск : БГАТУ, 2009. – 139 с.

3. Индивидуальные задания по высшей математике : учеб. пособие : в 4 ч. / под общ. ред. А.П. Рябушко. – 7-е изд. – Минск : Выш. шк., 2013. – Ч. 1 : Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. – 304 с.

4. Кротов, В.Г. Математический анализ [Электронный ресурс] : учеб. пособие / В.Г. Кротов. – Минск, 2017. – Режим доступа: http://elib.bsu.by/handle/123456789/191394. – Дата доступа: 12.10.2019.

5. Ларин, А.А. Курс высшей математики [Электронный ресурс] : в 4 ч. / А.А. Ларин. – 2015. – Ч. 1. – Режим доступа: https://alexlarin.net/lect1.pdf. – Дата доступа: 12.10.2019.

6. Руководство к решению задач по высшей математике : учеб. пособие для втузов : в 2 ч. / Е.И. Гурский [и др.] ; под общ. ред. Е.И. Гурского. – Минск : Выш. шк., 1989. – Ч. 1. – 348 с.

7. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учеб. пособие / Б.П. Демидович. – Изд. 20-е, стереотип. – СПб. : Лань, 2018. – 623 с.

8. Скатецкий, В.Г. Математическое моделирование физико-химических процессов : учеб. пособие / В.Г. Скатецкий, Д.В. Свиридов, В.И. Яшкин. – Минск : Белорус. гос. ун-т, 2003. – 392 с.

9. Черняк, А.А. УМК по высшей математике для инженерно-экономических специальностей / А.А. Черняк, Ж.А. Черняк. – Минск : Харвест, 2009. – 350 с.

10. Элементы векторной алгебры. Элементы аналитической геометрии на плоскости и в пространстве : учеб.-метод. комплекс / В. С. Вакульчик [и др.] ; под общ. ред. В.С. Вакульчик. – Новополоцк : ПГУ, 2009. – 220 с.

11. Элементы линейной алгебры. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной : учеб.-метод. комплекс / сост. и общ. ред. В.С. Вакульчик. – Новополоцк : ПГУ, 2007. – 352 с.