

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования  
«Полоцкий государственный университет»

СЕРИЯ «САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ»

Л.С. Турищев

## **МЕТОД СИЛ**

Электронное учебное пособие  
для студентов строительных специальностей

*Текстовое электронное издание*

Новополоцк  
Полоцкий государственный университет  
2020

УДК 624.04(075.8)

ББК 38.112я73

Одобрено и рекомендовано к изданию методической комиссией  
инженерно-строительного факультета  
в качестве методического пособия  
(протокол № 4 от 28.05.2019)

Кафедра прикладной механики и графики

**РЕЦЕНЗЕНТЫ:**

канд. техн. наук, доц., зав. кафедры строительных конструкций

**А.И. КОЛТУНОВ**

канд. техн. наук, доц., доц. кафедры строительных конструкций

**Е.Д. ЛАЗОВСКИЙ**

**Турищев, Л. С.**

Метод сил [Электронный ресурс] : электрон. учеб. пособие для студентов  
строительных специальностей / Л.С. Турищев. – Новополоцк : Полоц. гос. ун-т,  
2020. – 1 электрон. опт. диск (CD-R).

ISBN 978-985-531-713-6.

На основе структурно-логических схем приведены рекомендации по технологии формирования междисциплинарной системы знаний, связанных с базовыми теоретическими положениями и понятиями модуля. Содержатся указания по приобретению умений и навыков, связанных с практическим применением знаний для решения типовых задач модуля. Имеется банк тестовых заданий для самоконтроля, связанных с изучаемым модулем. Приведен список рекомендуемой учебной литературы, интернет-источников. Составлен глоссарий модуля.

Предназначено для самостоятельной работы студентов строительных специальностей всех форм обучения при изучении курса «Строительная механика».

**№ госрегистрации 3302023420**

**ISBN 978-985-531-713-6**

© Турищев Л.С., 2020

© Полоцкий государственный университет, 2020

Для создания текстового электронного издания «Метод сил» Л.С. Турищева использованы текстовый процессор Microsoft Word и программа Adobe Acrobat XI Pro для создания и просмотра электронных публикаций в формате PDF.

Материалы включены в Государственный регистр информационного ресурса. Регистрационное свидетельство № 3302023420 от 09.09.2020 г.

**Технические требования:**

1 оптический диск.

**Системные требования:**

PC не ниже класса Pentium;

32 Mb RAM; свободное место на HDD 16 Mb;

Windows 95/98/Me/2000/XP/7;

Дисковод CD-ROM 2-скоростной и выше;

мышь

Редактор *О.Ю. Тарасевич*  
Техническое редактирование *О.Ю. Тарасевич*  
Компьютерный дизайн *М.С. Мухоморовой*

---

Подписано к использованию 25.09.2020.

Объем издания: 1,8 Мб. Заказ 501.

---

Свидетельство о государственной регистрации  
издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 1/305 от 22.04.2014.

211440, ул. Блохина, 29,  
г. Новополоцк,  
Тел. 8 (0214) 59-95-41, 59-95-44  
<http://www.psu.by>

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	5
1. РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА МОДУЛЯ .....	6
2. УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ МОДУЛЯ .....	10
2.1 Задачи по определению внутренних усилий в плоских статически неопределимых стержневых конструкциях.....	10
3. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ И УМЕНИЙ .....	19
3.1 Тестовые задания первого уровня .....	20
3.2 Тестовые задания второго уровня.....	21
3.3 Ответы на тестовые задания первого и второго уровней .....	25
ЛИТЕРАТУРА .....	26
ПРИЛОЖЕНИЕ 1.....	28
ПРИЛОЖЕНИЕ 2.....	32
ПРИЛОЖЕНИЕ 3.....	34
ПРИЛОЖЕНИЕ 4.....	39
ГЛОССАРИЙ МОДУЛЯ .....	42

## ВВЕДЕНИЕ

Формулировка задачи расчета статически-неопределимых стержневых конструкций, имеющая наибольшее значение для их проектирования, звучит следующим образом. При заданных геометрической схеме конструкции и приложенных к ней внешних воздействиях определить оптимальные поперечные сечения (форму и размеры) всех конструктивных элементов и обеспечить достаточную надежность (прочность, жесткость и устойчивость) конструкции в целом. В общем виде такая задача не решена.

Вместо этого строительная механика предлагает методы решения другой задачи, которые позволяют определять внутренние усилия и перемещения в статически-неопределимой стержневой конструкции при заданных геометрической схеме системы, поперечных сечениях стержней и внешних воздействиях.

Поскольку внутренние усилия в статически-неопределимой стержневой конструкции зависят от её геометрических и физических параметров, а те, в свою очередь, влияют на качественную и количественную стороны процесса ее деформирования, то для решения задачи используются дополнительные уравнения, отражающие особенности деформирования конструкции.

Входящие в дополнительные уравнения неизвестные величины называются основными неизвестными задачи и подлежат первоочередному определению. В качестве основных неизвестных задачи могут использоваться внутренние усилия в лишних связях или узловые перемещения стержневой конструкции.

В зависимости от природы используемых основных неизвестных различают следующие классические методы расчета статически неопределимых стержневых конструкций:

- метод сил – в качестве основных неизвестных используются внутренние усилия в лишних связях – стержневой конструкции;
- метод перемещений – в качестве основных неизвестных используются узловые перемещения стержневой конструкции;
- смешанный метод – в качестве основных неизвестных одновременно используются величины первого и второго вида.

В настоящем пособии рассматривается расчет произвольной плоской статически неопределимой стержневой конструкции методом сил при действии нагрузки, температуры и осадки опор.

## 1. РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА МОДУЛЯ

Изучение теоретического материала модуля следует начинать с повторения курса в целом [13]. Содержание изучаемого модуля связано с общими положениями и понятиями расчета методом сил плоских статически неопределимых стержневых конструкций при действии нагрузки, температуры и осадки опор. Структурно-логическая схема ключевых понятий, принципов, терминов рассматриваемого модуля, которые подлежат усвоению согласно [2], приведена на рисунке 1.



Рисунок 1. – Структурно-логическая схема ключевых понятий, принципов, терминов изучаемого модуля

Изучение материала модуля должно проходить в следующем порядке:

1) понять, что в основе расчета статически неопределимых стержневых конструкций методом сил лежит переход к эквивалентной статически определимой системе, получаемой из заданной системы удалением всех лишних связей, которая называется **основной системой метода сил**<sup>1</sup>. Разобраться с сутью **статической и кинематической эквивалентности** двух систем, и какова их роль в образовании основной системы.

<sup>1</sup> Здесь и далее полужирным курсивом выделяются термины, понятия и формулы курса, знание которых является обязательным.

Также важно уяснить, что возможны различные варианты образования основной системы метода сил.

2) Вникнуть, как получаются **канонические уравнения** метода сил, какова их природа, смысл и математическая форма, что собой представляют входящие в них величины – **основные неизвестные, коэффициенты и свободные члены**, и какова их природа и смысл. Следует уделить внимание **матричной форме** канонических уравнений и связанных с ней массивов – **вектор основных неизвестных, матрица коэффициентов и векторы свободных членов**.

3) Узнать, по какой формуле определяются коэффициенты канонических уравнений, как образуются **единичные состояния** основной системы, что такое **единичные эпюры** внутренних усилий и как они связаны с коэффициентами канонических уравнений. Важно также уяснить, какие бывают разновидности коэффициентов и их свойства.

4) Выяснить, по каким формулам определяются свободные члены канонических уравнений, связанные с нагрузкой, температурой и осадкой опор. Какие состояния основной системы образуются для этих внешних воздействий, что является результатами расчетов этих состояниях и как они связаны с соответствующие свободными членами.

5) Познакомиться с методами решения канонических уравнений метода сил и понять, как используются результаты их решения для нахождения внутренних усилий в статически неопределимых стержневых конструкциях при действии нагрузки, температуры и осадки опор в скалярной форме. Следует также уделить внимание матричным формулам для нахождения внутренних усилий в статически неопределимых стержневых конструкциях при действии нагрузки.

6) Далее важно разобраться, какие существуют **промежуточные и окончательные проверки метода сил**, в чем они заключается и что позволяют проверять.

7) В заключение важно понять, что трудоемкость расчета статически неопределимых стержневых конструкций методом сил в основном определяется числом составляемых и совместно решаемых канонических уравнений. Их число существенным образом зависит от выбора варианта основной системы. Поэтому следует уметь различать три разновидности её вариантов – **обычная, идеальная и рациональная основные системы**. В связи с этим также важно усвоить понятие **симметричной статически**

**неопределимой стержневой конструкции** и его использование для образования рациональной основной системы метода сил.

При изучении материала модуля рекомендуется использование следующей литературы: [4, с.225–249]; [5, с.221–247]; [6, с.324–361]; [11, с.22–55]; [14, с.251–256].

Для осознанного понимания и усвоения материала рассматриваемого модуля курса, прежде всего, необходимо повторить:

– *изученное в математике* – понятия величины, функции, вектора, матрицы. Краткие справочные сведения, связанные с этими понятиями, приведены в приложении 1.

– *изученное в физике* – основные понятия и законы классической механики. Краткие справочные сведения, связанные с этими понятиями, приведены в приложении 2.

– *изученное в теоретической механике* – основные понятия, аксиомы и уравнения статики. Краткие справочные сведения, связанные с этими понятиями, аксиомами и уравнениями, приведены в приложении 3.

– *изученное в сопротивлении материалов* – порядок построения эпюр внутренних усилий при поперечном изгибе балок, правила знаков внутренних усилий при построении эпюр в балках, дифференциальные зависимости Журавского, правила контроля правильности построения эпюр в балках. Краткие справочные сведения, связанные с этими понятиями, приведены в приложении 4.

– *изученное в модуле «Введение в строительную механику»* – разделение расчетных схем по статическим и кинематическим признакам и их взаимосвязь, цель кинематического анализа и его основные понятия, виды кинематических связей, подсчет числа степеней свободы и анализ геометрической структуры для плоских стержневых конструкций, порядок установления кинематических и статических признаков стержневой конструкции.

– *изученное в модуле «Методы определения внутренних усилий от неподвижной нагрузки в плоских статически определимых стержневых системах»* – внутренние силы и их числовые характеристики, виды статически определимых конструкций и их свойства, статический метод определения внутренних усилий.

– *изученное в модуле «Определение перемещений в стержневых конструкциях»* – деформация конструкции, жесткость и податливость конструкции, полные, частичные и единичные перемещения, закон Гука для



конструкции, формулы для определения перемещений в статически определимых плоских стержневых конструкциях от нагрузки, температуры и осадки опор.

– *изученное в модуле «Введение в теорию расчета статически неопределимых систем»* – степень статической неопределимости и её составляющие, свойства статически неопределимых систем, основная и частная задачи расчета статически неопределимых систем, методы решения частной задачи расчета статически неопределимых систем.

## 2. УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ МОДУЛЯ

После завершения изучения теоретического материала модуля, его понимания и усвоения можно переходить к применению полученных знаний для решения типовых задач модуля. Согласно утвержденной учебной программе курса [3] Вы должны уметь определять для плоских статически неопределимых стержневых конструкций методом сил внутренние усилия от действия неподвижной постоянной нагрузки.

Прежде чем перейти к решению задач, приведенных в [9], [11], [15], [17], [18], рекомендуется сначала внимательно прочесть указания, разобраться с приводимыми примерами.

### 2.1 Задачи по определению внутренних усилий в плоских статически неопределимых стержневых конструкциях

В основе расчета стержневых конструкций методом сил лежит переход от заданной статически неопределимой системы к расчету основной статически определимой системы. Такая система получается из заданной удалением всех лишних связей.

Реакции удаленных связей называются основными неизвестными метода сил. Для их определения составляются канонические уравнения, которые при расчете на действие нагрузки имеют вид

$$\delta_{11}X_1 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} = 0,$$

.....

$$\delta_{n1}X_1 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nP} = 0.$$

Канонические уравнения представляют собой систему неоднородных линейных алгебраических уравнений относительно основных неизвестных  $X_1, \dots, X_n$ . Для решения канонических уравнений необходимо определить коэффициенты при основных неизвестных  $\delta_{ij}$  и свободные члены  $\Delta_{iP}$ .

Для определения коэффициентов  $\delta_{ij}$  нужно образовать единичные состояния основной системы, загрузив ее последовательно безразмерными силами  $\tilde{X}_j = 1 (j = 1, \dots, n)$ , найти для каждого нагружения внутренние усилия  $m_j, q_j, n_j$  и построить их эпюры. Такие внутренние усилия и их эпюры называются единичными. Вычисление коэффициентов  $\delta_{ij}$  осу-

ществляется по формуле Максвелла – Мора, в которой удерживается одно слагаемое, учитывающее влияние изгибающих моментов

$$\delta_{ij} = \sum_k \int_l \frac{m_i m_j}{EI_z} ds.$$

Для определения свободных членов канонических уравнений  $\Delta_{iP}$  необходимо рассмотреть основную систему под действием нагрузки, найти внутренние усилия  $M_P^0, Q_P^0, N_P^0$  и построить их эпюры. Такие внутренние усилия и их эпюры называются грузовыми, а соответствующая им схема нагружения считается грузовым состоянием основной системы. Вычисление свободных членов  $\Delta_{iP}$  осуществляется по формуле Максвелла – Мора, в которой удерживается одно слагаемое, учитывающее влияние изгибающих моментов

$$\Delta_{iP} = \sum_k \int_l \frac{m_i M_P^0}{EI_z} ds.$$

После решения канонических уравнений и нахождения основных неизвестных метода сил внутренние усилия, возникающие в заданной системе от нагрузки, определяются по формулам

$$M = m_1 X_1 + \dots + m_n X_n + M_P^0,$$

$$Q = q_1 X_1 + \dots + q_n X_n + Q_P^0,$$

$$N = n_1 X_1 + \dots + n_n X_n + N_P^0.$$

Для проверки правильности найденных внутренних усилий выполняются статические и кинематические проверки. Статические проверки заключаются в проверке равновесия узлов, стержней и заданной системы в целом по тем же правилам, что и для статически определимых систем. Кинематические проверки заключаются в проверке выполнения условий

$$\sum_k \int_s \frac{m_i M}{EI_z} ds = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

**Пример 1.** Для рамы, показанной на рисунке 2, определить внутренние усилия, построить эпюры внутренних усилий и проверить их правильность

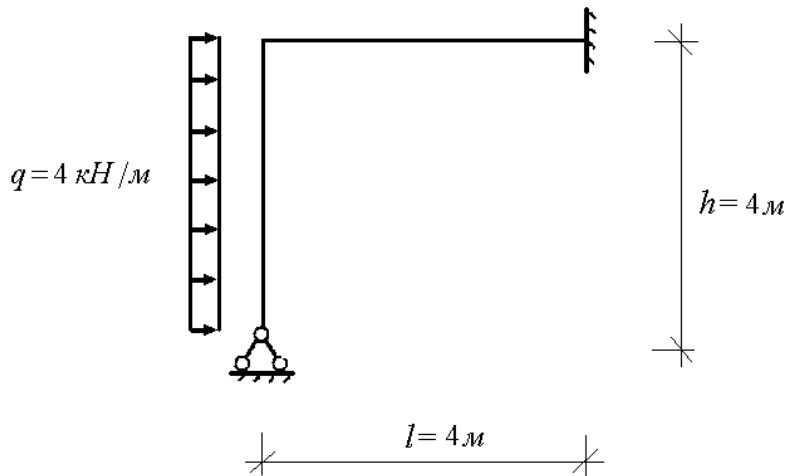


Рисунок 2. – Рама к примеру 1

Поперечные сечения всех элементов рамы имеют одинаковую изгибную жесткость  $EI_Z$ .

Так как у рамы отсутствуют замкнутые контуры, то степень ее статической неопределимости определяется по формуле

$$L = -W$$

и равняется

$$L = -3 \cdot 1 + 5 = 2.$$

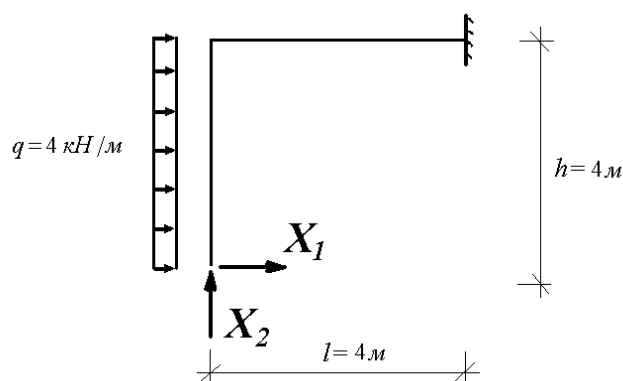
Для образования основной системы метода сил отбросим два опорных стержня на левой опоре. Выбранный вариант основной системы показан на рисунке 3.

Канонические уравнения метода сил для рассчитываемой рамы, с учетом ее степени статической неопределимости, имеют вид

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0,$$

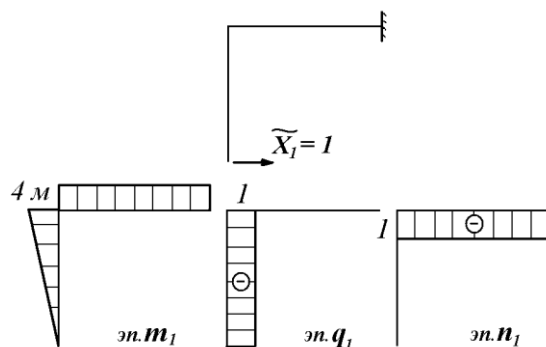
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0.$$

Для определения коэффициентов и свободных членов образуем единичные и грузовое состояния и строим для них эпюры внутренних усилий как для статически определимых рам.



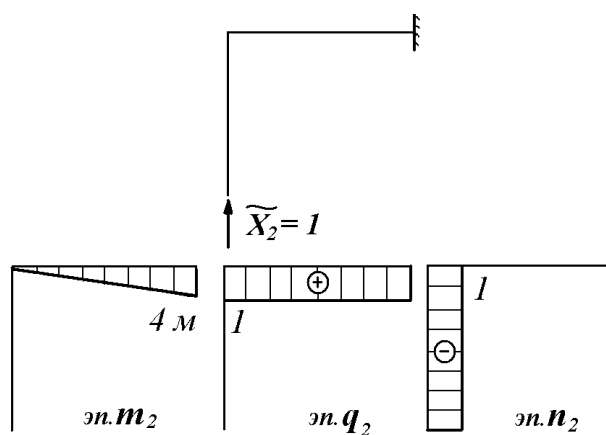
**Рисунок 3. – Основная система без двух опорных стержней на левой опоре**

Первое единичное состояние и соответствующие ему эпюры внутренних усилий показаны на рисунке 4.



**Рисунок 4. – Первое единичное состояние и соответствующие ему эпюры внутренних усилий**

Второе единичное состояние и соответствующие ему эпюры внутренних усилий показаны на рисунке 5.



**Рисунок 5. – Второе единичное состояние и соответствующие ему эпюры внутренних усилий**

Находим коэффициенты канонических уравнений по формуле Максвелла – Мора с использованием правила Верещагина

$$\delta_{11} = \sum_{k=1}^2 \int \frac{m_1^2}{EI_z} ds = \frac{1}{EI_z} \left( \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + 4 \cdot 4 \cdot 4 \right) = \frac{85,333}{EI_z},$$

$$\delta_{22} = \sum_{k=1}^2 \int \frac{m_2^2}{EI_z} ds = \frac{1}{EI_z} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{21,333}{EI_z},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum_{k=1}^2 \int \frac{m_1 m_2}{EI_z} ds = -\frac{1}{EI_z} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = -\frac{32}{EI_z}.$$

Грузовое состояние основной системы и соответствующие ему эпюры внутренних усилий показаны на рисунок 6.

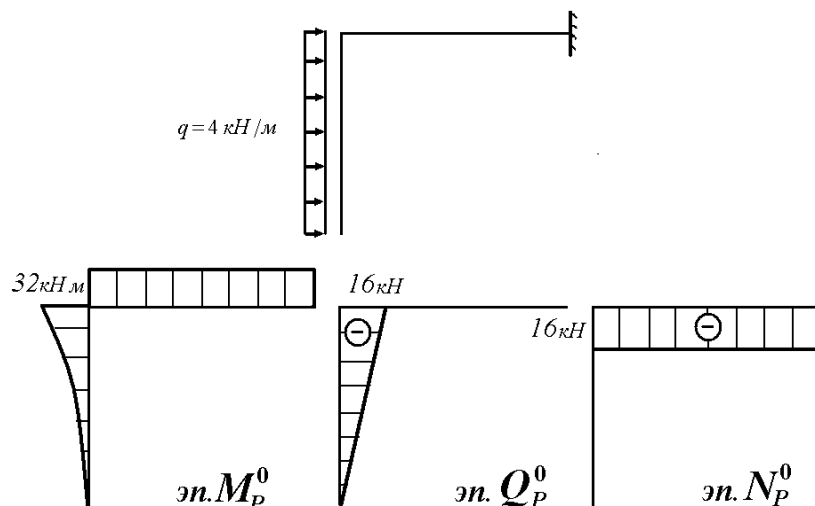


Рисунок 6. – Грузовое состояние основной системы и соответствующие ему эпюры внутренних усилий

Находим свободные члены канонических уравнений по формуле Максвелла – Мора с использованием правила Верещагина

$$\Delta_{1P} = \sum_{k=1}^2 \int \frac{m_1 M_P^0}{EI_z} ds = \frac{1}{EI_z} \left( \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 - \frac{2}{3} \cdot \frac{4 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 + 32 \cdot 4 \cdot 4 \right) = \frac{640}{EI_z},$$

$$\Delta_{2P} = \sum_{k=1}^2 \int \frac{m_2 M_P^0}{EI_z} ds = -\frac{1}{EI_z} \cdot 32 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = -\frac{256}{EI_z}.$$

Таким образом, канонические уравнения метода сил для рассчитываемой рамы, с учетом найденных значений коэффициентов и свободных членов, принимают вид

$$\begin{aligned} 85,333X_1 - 32X_2 + 640 &= 0, \\ -32X_1 + 21,333X_2 - 256 &= 0. \end{aligned}$$

Решая систему канонических уравнений, получим следующие значения основных неизвестных

$$X_1 = -6,857 \text{ кН}, \quad X_2 = 1,714 \text{ кН}.$$

Формулы для определения окончательных внутренних усилий рассчитываемой рамы принимают вид

$$\begin{aligned} M &= m_1X_1 + m_2X_2 + M_P^0, \\ Q &= q_1X_1 + q_2X_2 + Q_P^0, \\ N &= n_1X_1 + n_2X_2 + N_P^0. \end{aligned}$$

Построенные в соответствии с этими формулами эпюры окончательных внутренних усилий приведены на рисунке 7.

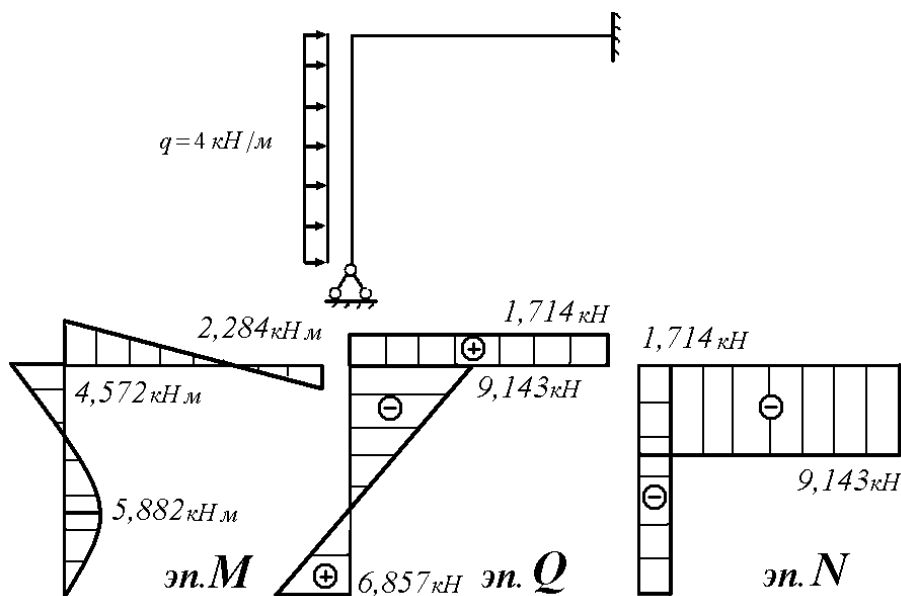


Рисунок 7. – Построенные в соответствии с формулами эпюры окончательных внутренних усилий

Для проверки правильности найденных внутренних усилий сначала выполним статические проверки. С этой целью проверим равновесие узлов и стержней рамы согласно схемам, приведенным на рисунке 8.

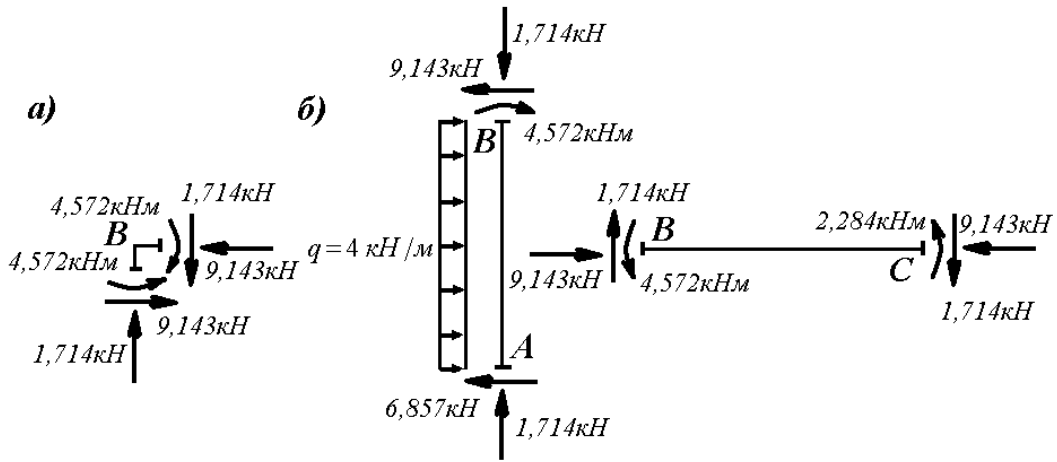


Рисунок 8. – Схемы для проверки равновесия узлов и стержней рамы

и проверку равновесия рамы в целом согласно схеме, приведенной на рисунке 9.

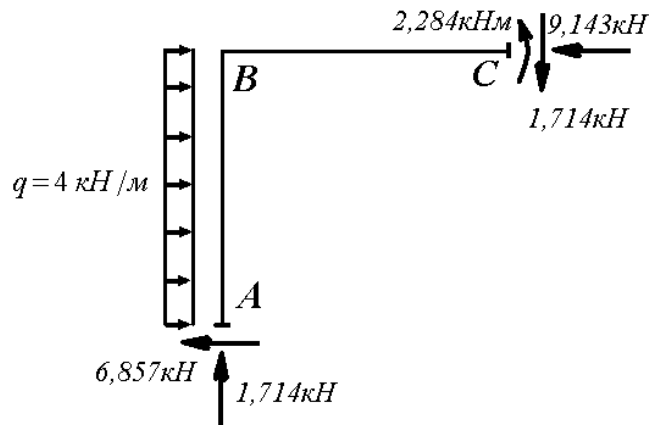


Рисунок 9. – Схема для проверки равновесия рамы в целом

Составляя уравнения равновесия для узла  $B$  (рисунок 8,  $a$ )

$$\sum M = 0; 4,572 - 4,572 \equiv 0,$$

$$\sum y = 0; 1,714 - 1,714 \equiv 0,$$

$$\sum x = 0; 9,143 - 9,143 \equiv 0,$$

для стержня  $AB$  (рисунок 8,  $b$ )

$$\sum M_A = 0; 4 \cdot 4 \cdot 2 + 4,572 - 9,143 \cdot 4 = 36,572 - 36,572 = 0,$$

$$\sum M_B = 0; 6,857 \cdot 4 - 4 \cdot 4 \cdot 2 + 4,572 = 32 - 32 = 0,$$

для стержня  $BC$  (рисунок 8,  $b$ )



$$\sum M_B = 0; 1,714 \cdot 4 - 2,284 - 4,572 = 6,856 - 6,856 = 0,$$

$$\sum M_C = 0; 1,714 \cdot 4 - 4,572 - 2,284 = 6,856 - 6,856 = 0,$$

и для рамы в целом (рисунок 9)

$$\sum M_A = 0; 4 \cdot 4 \cdot 2 + 1,714 \cdot 4 - 2,284 - 9,143 \cdot 4 = 38,856 - 38,856 = 0,$$

$$\sum M_C = 0; 6,857 \cdot 4 + 1,714 \cdot 4 - 4 \cdot 4 \cdot 2 - 2,284 = 34,284 - 34,284 = 0,$$

можно увидеть, что все статические проверки для заданной рамы выполняются.

Кинематические проверки правильности найденных внутренних усилий для заданной рамы имеют вид

$$\sum_{k=1}^2 \int \frac{m_i M}{EI_Z} ds = 0 \quad (i=1,2),$$

и для их осуществления необходимо последовательно перемножить эпюру окончательных изгибающих моментов с эпюрами изгибающих моментов единичных состояний.

В результате осуществления первой кинематической проверки получим

$$\sum_{k=1}^2 \int \frac{m_1 M}{EI_Z} ds = \frac{1}{EI_Z} \left( \frac{1}{2} \cdot 4,572 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 - \frac{2}{3} \cdot \frac{4 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4,572 \cdot 4 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 2,284 \cdot 4 \cdot 4 \right) = \frac{1}{EI_Z} (60,960 - 60,939) = \frac{0,021}{EI_Z}.$$

Невязка составляет

$$\frac{0,021 \cdot 100}{60,939} = 0,034\% ,$$

что меньше допустимой погрешности в 5%.

В результате осуществления второй кинематической проверки получим

$$\sum_{k=1}^2 \int \frac{m_1 M}{EI_Z} ds = \frac{1}{EI_Z} \left( -\frac{1}{2} \cdot 4,572 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 2,284 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) = \frac{1}{EI_Z} (-12,192 + 12,181) = -\frac{0,011}{EI_Z}.$$

Невязка во втором случае составляет

$$\frac{0,011 \cdot 100}{12,181} = 0,09\% ,$$

что также меньше допустимой погрешности в 5%.

Таким образом, выполненные статические и кинематические проверки показывают, что эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил для заданной рамы построены правильно.

### 3. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ И УМЕНИЙ

При изучении строительной механики важную роль играет адекватная самостоятельная оценка приобретенных знаний и умений. Это можно осуществлять с помощью самотестирования. Для его проведения в пособии содержатся:

- тестовые задания первого уровня, позволяющие проверить понимание и усвоение основных понятий, принципов, терминов изученного модуля;

- тестовые задания второго уровня, позволяющие проверить умение решать типовые задачи модуля.

В представленных тестовых заданиях первого уровня использованы следующие их виды:

- задания закрытой формы;
- задания на установление соответствия;
- задания на установление правильной последовательности;
- задания открытой формы.

В тестовых заданиях закрытой формы необходимо выбрать правильный ответ из представленных вариантов. Возможны две разновидности таких заданий: с выбором одного и нескольких правильных ответов.

В тестовых заданиях на установление соответствия нужно указать связь между элементами двух столбцов – задающего столбца и столбца выбора. Элементы задающего столбца располагаются слева, а элементы столбца выбора – справа. Правый столбец содержит элементов больше, чем левый, и все его элементы являются истинными высказываниями.

В тестовых заданиях на установление последовательности нужно восстановить правильный порядок некоторых действий, приведенных произвольным образом.

В тестовых заданиях открытой формы требуется дописать правильный ответ, связанный с определенным понятием, принципом или термином.

В тестовых заданиях второго уровня необходимо показать умение решать стандартные задачи, связанные с определением степени статической неопределимости плоских стержневых конструкций.

### **3.1 Тестовые задания первого уровня**

#### **1.1. Укажите, как достигается требование статической эквивалентности заданной и основной системы метода сил.**

1. приложением к основной системе реакций удаленных связей и введением условий обращения в ноль перемещений основной системы в местах удаления связей.

2. приложением к основной системе реакций удаленных связей.

3. введением условий обращения в ноль перемещений основной системы в местах удаления связей.

4.

#### **1.2. Укажите, как достигается требование кинематической эквивалентности заданной и основной системы метода сил?**

1. приложением к основной системе реакций удаленных связей и введением условий обращения в ноль перемещений основной системы в местах удаления связей

2. приложением к основной системе реакций удаленных связей

3. введением условий обращения в ноль перемещений основной системы в местах удаления связей

4.

#### **1.3. Укажите, какую природу имеют канонические уравнения метода сил?**

1. Статическую.

2. Кинематическую.

3. Смешанную.

#### **1.4. Укажите, какие бывают промежуточные проверки метода сил**

1. Статические.

2. Кинематические.

3. Алгебраические.

#### **1.5. Укажите, какие бывают окончательные проверки метода сил**

1. Статические.

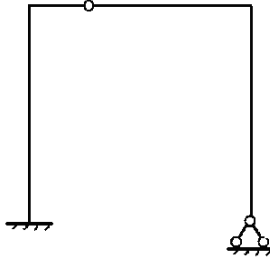
2. Кинематические.

3. Алгебраические.

### 3.2 Тестовые задания второго уровня

2.1. Определите степень полной, внешней и внутренней статической для следующих стержневых конструкций и сделайте заключение о её разновидности.

2.1.1.



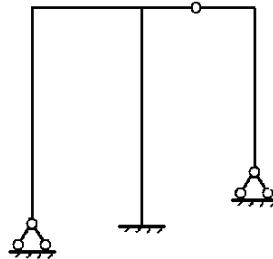
а)  $L = ?$

б)  $L_1 = ?$

в)  $L_2 = ?$

1. статически неопределимая система общего вида;
2. внешне статически неопределимая система;
3. внутренне статически неопределимая система.

2.1.2.



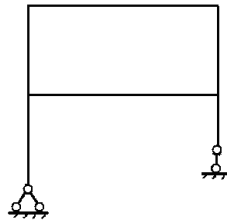
а)  $L = ?$

б)  $L_1 = ?$

в)  $L_2 = ?$

1. статически неопределимая система общего вида;
2. внешне статически неопределимая система;
3. внутренне статически неопределимая система.

2.1.3.



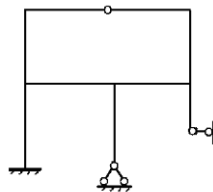
а)  $L = ?$

б)  $L_1 = ?$

в)  $L_2 = ?$

1. статически неопределимая система общего вида;
2. внешне статически неопределимая система;
3. внутренне статически неопределимая система;

2.1.4.



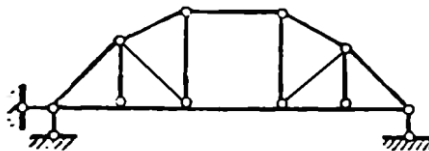
а)  $L = ?$

б)  $L_1 = ?$

в)  $L_2 = ?$

1. статически неопределимая система общего вида;
2. внешне статически неопределимая система;
3. внутренне статически неопределимая система.

2.1.5.



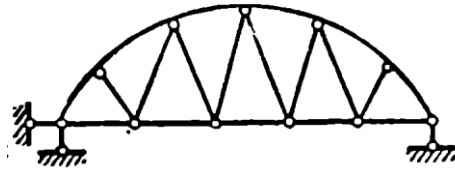
а)  $L = ?$

б)  $L_1 = ?$

в)  $L_2 = ?$

1. статически неопределимая система общего вида;
2. внешне статически неопределимая система;
3. внутренне статически неопределимая система.

2.1.6.



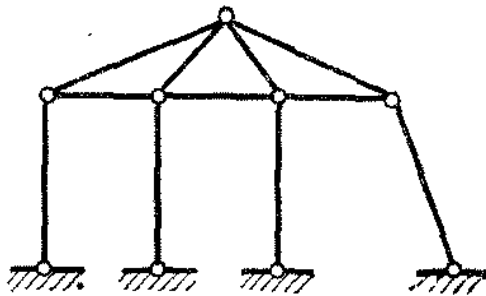
а)  $L = ?$

б)  $L_1 = ?$

в)  $L_2 = ?$

1. статически неопределимая система общего вида;
2. внешне статически неопределимая система;
3. внутренне статически неопределимая система.

2.1.7.



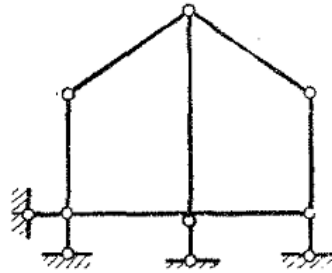
а)  $L = ?$

б)  $L_1 = ?$

в)  $L_2 = ?$

1. статически неопределимая система общего вида;
2. внешне статически неопределимая система;
3. внутренне статически неопределимая система.

2.1.8.



а)  $L = ?$

б)  $L_1 = ?$

в)  $L_2 = ?$

1. статически неопределимая система общего вида;
2. внешне статически неопределимая система;
3. внутренне статически неопределимая система.

2.1.9.



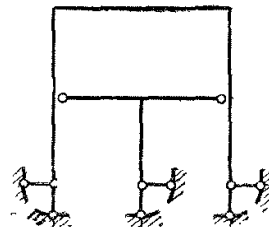
а)  $L = ?$

б)  $L_1 = ?$

в)  $L_2 = ?$

1. статически неопределимая система общего вида;
2. внешне статически неопределимая система;
3. внутренне статически неопределимая система.

2.1.10.



а)  $L = ?$

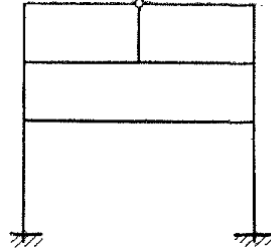
б)  $L_1 = ?$

в)  $L_2 = ?$

1. статически неопределимая система общего вида;
2. внешне статически неопределимая система;
3. внутренне статически неопределимая система.



2.1.11.



а)  $L = ?$

б)  $L_1 = ?$

в)  $L_2 = ?$

1. статически неопределимая система общего вида;
2. внешне статически неопределимая система;
3. внутренне статически неопределимая система.

### 3.3 Ответы на тестовые задания первого и второго уровней

1.1. – 2.

1.2. – 3.

1.3. – 2.

1.4. – 1-3.

1.5. – 1, 2.

2.1.1. а)  $L = 1$ , б)  $L_1 = 1$ , в)  $L_2 = 0$ ; **2.**

2.1.2. а)  $L = 3$ , б)  $L_1 = 3$ , в)  $L_2 = 0$ ; **2.**

2.1.3. а)  $L = 3$ , б)  $L_1 = 0$ , в)  $L_2 = 3$ ; **3.**

2.1.4. а)  $L = 5$ , б)  $L_1 = 3$ , в)  $L_2 = 2$ ; **1.**

2.1.5. а)  $L = 3$ , б)  $L_1 = 0$ , в)  $L_2 = 3$ ; **3.**

2.1.6. а)  $L = 5$ , б)  $L_1 = 0$ , в)  $L_2 = 5$ ; **3.**

2.1.7. а)  $L = 1$ , б)  $L_1 = 1$ , в)  $L_2 = 0$ ; **2.**

2.1.8. а)  $L = 3$ , б)  $L_1 = 1$ , в)  $L_2 = 2$ ; **2.**

2.1.9. а)  $L = 1$ , б)  $L_1 = 0$ , в)  $L_2 = 1$ ; **3.**

2.1.10. а)  $L = 4$ , б)  $L_1 = 3$ , в)  $L_2 = 1$ ; **1.**

2.1.11. а)  $L = 10$ , б)  $L_1 = 3$ , в)  $L_2 = 7$ ; **1.**

## ЛИТЕРАТУРА

### Учебно-нормативные документы

1. Образовательный стандарт высшего образования первой степени специальности Промышленное и гражданское строительство ОСВО 1-70 02 01-2013, утвержден 30.08.2013, Минск, 2013.

2. Типовая учебная программа дисциплины «Строительная механика», регистрационный № ТД-Ј.066/тип, утверждена 30.06.2010, Минск, 2010.

3. Учебная программа дисциплины «Строительная механика», регистрационный №03/15/уч., утверждена 01.07.2015.

### Учебная литература основная

4. Борисевич, А.А. Строительная механика: учебное пособие для вузов / А.А. Борисевич, Е.М. Сидорович, В.И. Игнатюк. – Минск : БНТУ, 2009. – 756 с.

5. Дарков, А.В. Строительная механика: учебник для вузов. / А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. – СПб. : Изд. Лань, 2010. – 656 с.

6. Строительная механика. Стержневые системы: учебник для вузов / А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лашеников, Н.Н. Шапошников. Под ред. А.Ф. Смирнова. – М. : Стройиздат, 1981. – 512 с.

7. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений: учебник для вузов / А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лашеников, Н.Н. Шапошников. Под ред. А.Ф. Смирнова. – М. : Стройиздат, 1984. – 416 с.

8. Клейн, Г.К. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики / Г.К. Клейн, В.Г. Рекач, Г.И. Розенблат. – М. : Высшая школа, 1972. – 320 с.

9. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики. Статика стержневых систем / Под ред. Г.К. Клейна. – М. : Высшая школа, 1980. – 384 с.

10. Турищев, Л.С. Строительная механика: в 3 ч. /Л.С. Турищев. – Новополюк: ПГУ. 2010. – Ч.1. Статически определимые системы: учебно-методический комплекс. – 224 с.

11. Турищев, Л.С. Строительная механика: учеб.-метод. комплекс в 3 ч. /Л.С. Турищев. – Новополюцк: ПГУ, 2009. – Ч.2. Статически неопределимые системы. – 200 с.

12. Турищев, Л.С. Строительная механика: в 3 ч. /Л.С. Турищев. – Новополюцк: ПГУ. 2010. – Ч.3. Основы динамики и устойчивости сооружений: учебно-методический комплекс – 136 с.

### **Учебная литература дополнительная**

13. Рабинович, И.М. Основы строительной механики стержневых систем / И.М. Рабинович. – М. : Госстройиздат, 1960. – 520 с.

14. Строительная механика. Основы теории с примерами расчетов: учебник для вузов / А.Е. Саргсян, А.Т. Демченко, Н.В. Дворянчиков, Г.А. Джинчвелашвили. Под ред. А.Е. Саргсяна. – М. : Высш. шк., 2000. – 416 с.

15. Безухов, Н.И. Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах /Н.И. Безухов, О.В. Лужин, Н.В. Колкунов. – М. : Высшая школа, 1987. – 264 с.

16. Кузьмин В.А., Рекач В.Г., Розенблат Г.И. Сборник задач по курсу строительной механики / Под редакцией И.М. Рабиновича. М. : Госстройиздат, 1963. – 331 с.

17. Строительная механика в примерах и задачах / Под ред. В.А. Киселева. М. : Стройиздат, 1986. -387с.

### **Интернет-ресурсы**

18. Учебные курсы для студентов по сопротивлению материалов и строительной механики [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [http://mysopromat.ru/uchebnye\\_kursu/](http://mysopromat.ru/uchebnye_kursu/).

19. Сайт кафедры строительной механики СПб ГПУ с учебными материалами по строительной механике [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://smitu.cef.spbstu.ru/index.htm>.

20. Сайт кафедры строительной механики БелГУТ с учебными материалами по строительной механике [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.mechanika.org.ru/index>.

**Краткие справочные сведения по математике,  
связанные с содержанием изучаемого модуля<sup>2</sup>**

**Величина** – характеристика объекта (предмета или процесса), которую можно численно измерить. Величина может быть скалярной и векторной.

**Скалярная величина (скаляр)<sup>3</sup>** – величина, результат измерения которой характеризуется одним числом.

**Абсолютная величина (модуль)** – само числовое значение величины, если оно положительное, или числовое значение величины, взятое со знаком «плюс», если оно отрицательное.

**Единица измерения** – скалярная величина, результат измерения которой есть число 1.

**Размерность величины** – единица измерения, через которую эта величина выражена.

**Безразмерная величина** – отношение двух величин одинаковой размерности.

**Постоянная величина (константа)** – величина, принимающая одно определенное числовое значение.

**Переменная величина** – величина, принимающая различные числовые значения.

**Параметр** – постоянная величина, характеризующая некоторый объект, процесс или явление, которая может изменяться в зависимости от рассматриваемых условий.

**Непрерывная переменная величина** – величина, принимающая все значения, заключенные между некоторыми границами.

**Дискретная переменная величина** – величина, принимающая отдельные значения, заключенные между некоторыми границами.

**Область изменения переменной величины** – совокупность значений, которые может принимать величина.

---

<sup>2</sup> Составлены с использованием учебного пособия для студентов технических вузов: Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. – СПб. : Издательство «Лань», 2007.

<sup>3</sup> Далее понятие «скалярная величина» эквивалентно понятию «величина».

**Числовая ось** – прямолинейная ось с выбранным положительным направлением, началом отсчета, шкалой (равномерной или неравномерной) и единицей масштаба для наглядного изображения числового значения величины в виде точки на оси.

**Функция** – закон (правило), по которому значениям одних переменных величин (независимая переменная  $x$ ) соответствуют значения других переменных величин (зависимая переменная  $y$ ). Независимая переменная называется аргументом функции, а зависимая переменная – значением функции.

**Область определения функции** – совокупность значений независимой переменной  $x$ , при которых эта функция определена.

**Способы задания функции** – аналитический, табличный, графический, компьютерной программой.

**Плоская декартова система координат** – две взаимно перпендикулярные числовые оси с началом отсчёта в точке их пересечения. Горизонтальная числовая ось, направленная слева направо, называется осью абсцисс  $x$ , обычно, это ось независимой переменной  $x$ . Вертикальная числовая ось, направленная снизу вверх, называется осью ординат  $y$ , обычно, это ось зависимой переменной  $y$ .

**Векторная величина (вектор)** – величина, результат измерения которой характеризуется не только числом, но и направлением в пространстве.

**Модуль вектора** – положительная скалярная величина, характеризующая длину вектора.

**Проекция вектора на ось** – направленный отрезок оси между основаниями перпендикуляров, опущенных из начала и конца вектора на ось.

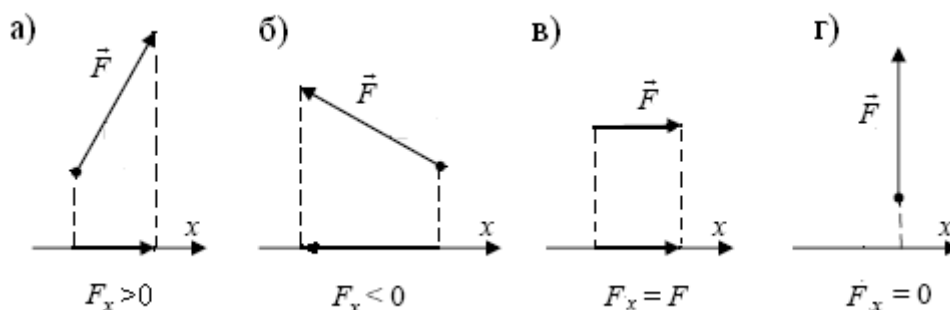


Рисунок 10. – К понятию проекции вектора на ось

Величина проекции вектора есть скаляр, равна длине отрезка, и может быть положительной или отрицательной. Она берется со знаком «+», если направление отрезка совпадает с положительным направлением оси (рисунок 10, а), в противном случае она берется со знаком «-» (рисунок 10, б).

Если вектор параллелен оси, то он проецируется на эту ось в натуральную величину (рисунок 10, в). Если вектор перпендикулярен оси, то его проекция на эту ось равна нулю (рисунок 10, г).

**Матрица** – прямоугольная таблица, составленная из вещественных чисел и имеющая в общем случае вид.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Размеры матрицы характеризуются количество строк и столбцов и записываются в виде  $m \times n$ .

**Квадратная матрица** – матрица, у которой число строк  $m$  равняется числу столбцов  $n$ .

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{nn} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Вместо термина «размеры» для такой матрицы применяется термин «порядок» и для матрицы  $A$  он равен  $n$ .

**Нулевая матрица** – матрица, у которой все элементы равны нулю.

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

**Диагональная матрица** – квадратная матрица, у которой равны нулю все элементы, стоящие вне главной (левой) диагонали.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

**Единичная матрица** – диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны единице. Обычно обозначается буквой  $E$ .

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

**Матрица-столбец (вектор)** – матрица, у которой число столбцов  $n=1$ .

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

Второй индекс у элементов в этом случае опускается.

**Матрица-строка** – матрица, у которой число строк  $m=1$ .

$$\mathbf{a} = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$$

В этом случае у элементов опускается первый индекс.

**Краткие справочные сведения по физике,  
связанные с содержанием изучаемого модуля<sup>4</sup>**

**Механическое движение** – процесс изменения взаимного расположения материальных тел или их частей в пространстве с течением времени.

**Механическое воздействие** – воздействие одного тела на другое, вызывающее деформацию тела или его ускорение при механическом движении или одновременно и то и другое.

**Сила (внешняя сила)** – векторная величина, которая является мерой механического воздействия на тело со стороны другого тела.

**Деформация тела** – изменение размеров и формы материального тела под действием внешних сил.

**Упругая деформация** – деформация тела, исчезающая после снятия внешних сил.

**Пластическая (остаточная) деформация** – деформация, сохраняющаяся в теле, после прекращения действия внешних сил.

**Внутренние силы** – силы взаимодействия между атомами тела, возникающие при его деформации вследствие смещения атомов из равновесных положений в узлах кристаллической решетки. Эти силы носят дискретный характер (являются дискретными переменными величинами) и имеют электромагнитную природу.

**Силы упругости** – внутренние силы, возникающие в теле при его упругой деформации.

**Тело отсчета** – тело, по отношению к которому рассматривается механическое движение прочих тел.

**Система отсчета** – тело отсчета вместе со связанной с ним системой координат.

**Инерциальная система отсчета** – система отсчета, которая может покоиться или двигаться только равномерно и прямолинейно.

**Первый закон Ньютона (закон инерции<sup>5</sup>)** – существуют системы отсчета, в которых всякое материальное тело сохраняет состояние покоя или

---

<sup>4</sup> Составлены с использованием учебного пособия для студентов технических вузов: Макаренко Г.М. Курс общей физики. – Минск : Издательство «Дизайн ПРО», 2003.

<sup>5</sup> Впервые был сформулирован Галилеем.



равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока при воздействии со стороны других тел это состояние не изменится.

**Инертность** – свойство материальных тел сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.

**Второй закон Ньютона** – ускорение, которое материальное тело приобретает в инерциальной системе отсчёта, пропорционально действующей на тело силе, обратно пропорционально массе тела и по направлению совпадает с силой.

**Масса** – физическая величина, характеризующая инерционные и гравитационные свойства материальных тел.

**Третий закон Ньютона** – всякое действие материальных тел друг на друга носит характер взаимодействия; силы, с которыми действуют друг на друга материальные тела, всегда равны по модулю, противоположно направлены, действуют вдоль прямой, соединяющей точки их приложения, и приложены к разным телам.

**Сила тяжести** – сила, с которой материальное тело притягивается к Земле.

**Вес тела** – сила, с которой тело, притягиваясь к Земле, действует на горизонтальную опору или натягивает нить вертикального подвеса. Вес тела равен силе тяжести, когда ускорение тела относительно Земли равно нулю.

**Ускорение свободного падения** – ускорение, с которым все тела падают в определенном месте под действием силы притяжения к Земле. Оно не зависит от массы тела, но зависит от высоты тела над поверхностью Земли. Вблизи поверхности Земли ускорение свободного падения примерно одинаково и равно  $9.81 \text{ м/с}^2$ .

**Краткие справочные сведения по теоретической механике,  
связанные с содержанием изучаемого модуля<sup>6</sup>**

**Абсолютно твердое тело<sup>7</sup>** – материальное тело, у которого под действием приложенных к нему сил не возникают деформации.

**Материальная точка** – частный случай тела, размеры которого малы или ими можно пренебречь по сравнению с размерами других тел или расстояниями между ними.

**Кинематические состояния тела** – два состояния тела - равновесие или движение определенного характера.

**Равновесие тела** – неподвижность (покой) тела относительно Земли.

**Свободное тело** – тело, которое может перемещаться в пространстве в любом направлении.

**Связи тела** – другие тела, с которыми соприкасается или на которые опирается рассматриваемое тело и которые ограничивают свободу его движения. Принято говорить, что связи наложены на тело.

**Несвободное тело** – тело, движение которого ограничено наложенными связями.

**Активные силы (внешние силы)** – все приложенные к телу силы, кроме сил, действующих со стороны связей.

**Реактивные силы (реакции связей)** – силы, с которыми связи действуют на тело. Направлены реакции всегда в сторону, противоположную той, куда связь не даёт телу перемещаться.

**Принцип освобожденности тел от связей** – несвободное тело можно рассматривать как свободное, на которое, кроме задаваемых внешних сил, действуют реакции связей.

**Система сил** – совокупность нескольких сил, действующих на тело.

**Эквивалентные системы сил** – системы сил, под действием каждой из которых тело находится в одинаковом кинематическом состоянии.

**Равнодействующая (R)** – сила, эквивалентная некоторой системе сил.

<sup>6</sup> Составлены с использованием учебно-методического комплекса для студентов строительных специальностей: Завистовский В.Э., Коровкин В.Н., Кулик Н.А. Теоретическая механика. – Новополюк : ПГУ, 2008.

<sup>7</sup> Далее понятие «Абсолютно твердое тело» эквивалентно понятию «тело».

**Уравновешивающая сила** – сила, равная по модулю равнодействующей и направленная по линии её действия в противоположную сторону.

**Система взаимно уравновешивающихся сил** – система сил, которая, будучи приложенной к телу, находящемуся в покое, не выводит его из этого состояния.

**Основная задача статики** – исследование условий равновесия тела под действием приложенных к нему сил.

**Аксиомы статики** – исходные положения условий равновесия тела, принимаемые без математических доказательств и представляющие собой результат обобщений многочисленных опытов и наблюдений над равновесием и движением тел. Некоторые физические законы классической механики одновременно являются и аксиомами статики.

**1-ая аксиома – закон инерции.** Под действием взаимно уравновешивающихся сил тело находится в состоянии покоя или движется прямолинейно и равномерно. Данная аксиома выражает первый закон классической механики.

**2-ая аксиома – условие равновесия двух сил.** Две силы, приложенные к телу, взаимно уравновешиваются только в том случае, если они равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны.

**3-ья аксиома – принцип присоединения и исключения взаимно уравновешивающихся сил.** Действие системы сил на тело не изменится, если к ней присоединить или из неё исключить систему взаимно уравновешивающихся сил.

**Следствие 3-ей аксиомы.** Не изменяя кинематического состояния тела, силу можно переносить вдоль линии её действия, сохраняя неизменным её модуль и направление.

**4-ая аксиома – правило параллелограмма сил.** Равнодействующая двух пересекающихся сил приложена в точке их пересечения и изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих силах.

**5-ая аксиома – закон равенства действия и противодействия.** Силы действия друг на друга двух тел равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны. Данная аксиома выражает сформулированный Ньютоном третий закон классической механики.

**6-ая аксиома – принцип затвердения.** Равновесие сил, приложенных к деформирующемуся телу, сохраняется при его затвердении.

**Плоская система сил** – система произвольно расположенных сил, линии действия которых лежат в одной плоскости.

**Пара сил** – плоская система двух параллельных, противоположно направленных и равных по модулю сил, приложенных к одному телу

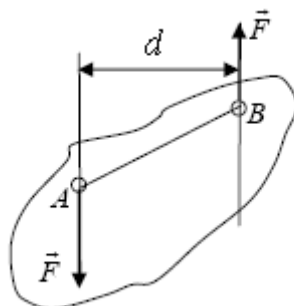


Рисунок 11. – К понятию пары сил

Также как и отдельная сила, пара сил является мерой механического воздействия на тело. Пара сил не имеет равнодействующей, её силы не уравниваются и поэтому она стремится произвести вращение тела, к которому приложена, в плоскости действия.

**Плечо пары сил** – кратчайшее расстояние ( $d$ ) между линиями действия сил, составляющих пару.

**Момент пары сил на плоскости** – количественная мера действия пары сил на тело, равная алгебраической величине произведения модуля одной из сил пар на плечо.

$$M = \pm Fd$$

Может изображаться криволинейной стрелкой, указывающей направление, в котором пара сил стремится вращать тело. Момент пары сил считается положительным, если пара сил, стремится вращать тело в плоскости действия против хода часовой стрелки. В противном случае он считается отрицательным.



Рисунок 12. – К правилу знаков момента пары сил

**Момент силы относительно точки на плоскости** – алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на её плечо относительно этой точки.

$$M = \pm Fd$$

Момент силы считается положительным, если сила стремится повернуть тело вокруг точки против вращения часовой стрелки. В противном случае он считается отрицательным.

**Центр приведения** – любая точка плоскости, в которую могут переноситься силы плоской системы.

**Главный вектор системы сил на плоскости ( $R^*$ )** – геометрическая сумма сил плоской системы, получаемая при их переносе в центр приведения.

**Главный момент системы сил на плоскости ( $M$ )** – алгебраическая сумма моментов сил плоской системы относительно центра приведения.

**Два условия равновесия плоской системы сил** – силы, произвольно расположенные на плоскости, находятся в равновесии, если их главный вектор и главный момент равны нулю.

$$R^* = 0 \quad M = 0$$

**Уравнения равновесия плоской системы сил** – условия равновесия плоской системы сил, выраженные в виде системы трех независимых уравнений. Возможны три разновидности таких систем уравнений.

**Первая разновидность уравнений равновесия плоской системы сил** – два уравнения проекций сил на координатные оси и одно уравнение моментов относительно произвольной точки.

$$\begin{aligned}\sum F_{i_x} &= 0; \\ \sum F_{i_y} &= 0; \\ \sum M_{i_o} &= 0.\end{aligned}$$

**Вторая разновидность уравнений равновесия плоской системы сил** – одно уравнение проекций сил на произвольную ось и два уравнения моментов относительно двух произвольных точек.

$$\begin{aligned}\sum F_{i_U} &= 0; \\ \sum M_{i_A} &= 0; \\ \sum M_{i_B} &= 0.\end{aligned}$$

При этом ось  $U$  не должна быть перпендикулярной прямой, проходящей через точки  $A$  и  $B$ .

**Третья разновидность уравнений равновесия плоской системы сил** – три уравнения моментов относительно трех произвольных точек.

$$\sum M_{i_A} = 0;$$

$$\sum M_{i_B} = 0;$$

$$\sum M_{i_C} = 0.$$

При этом точки  $A, B, C$  не должны лежать на одной прямой.

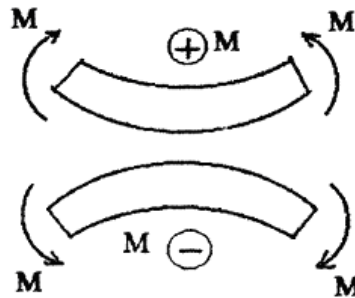
**Краткие справочные сведения по сопротивлению материалов,  
связанные с содержанием изучаемого модуля<sup>8</sup>**

**Порядок построения эпюр внутренних усилий при поперечном изгибе балок:**

1. Определить опорные реакции балки.
2. Получить аналитические выражения для  $M$  и  $Q$  на каждом участке балки.
3. Определить значения  $M$  и  $Q$  в характерных точках каждого участка – начало и конец участка, точках экстремума.
4. Отложить в некотором масштабе на двух осях эпюр найденные характерные значения  $M$  и  $Q$  перпендикулярно оси балки и соединить концы полученных ординат в соответствии с законом изменения  $M$  или  $Q$  на каждом участке.

**Правила знаков внутренних усилий при построении эпюр в балках:**

*Изгибающий момент* считается положительным, если он в соответствующем сечении растягивает нижние волокна, в противном случае он считается отрицательным



**Рисунок 13. – Положительный и отрицательный изгибающие моменты**

Эпюра изгибающих моментов строится на каждом участке со стороны растянутого волокна и знаки на эпюре  $M$  не ставятся.

*Поперечная сила* считается положительной, если она вращает прилегающую часть по часовой стрелке, в противном случае она считается отрицательной

<sup>8</sup>Составлены с использованием учебно-методического комплекса для студентов строительных специальностей: Родионов В.К., Турищев Л.С. Сопротивление материалов. – Новополюцк : ПГУ, 2010.

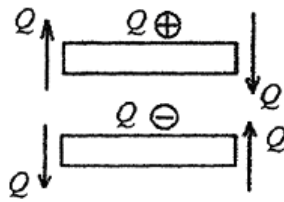
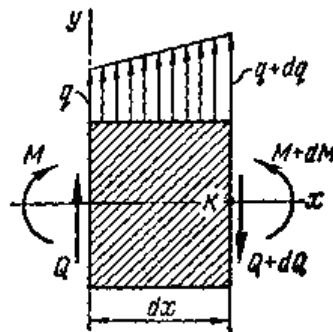


Рисунок 14. – Положительная и отрицательная поперечные силы

Положительные ординаты поперечной силы откладываются на оси вверх, отрицательные – вниз. Знаки на эпюре  $Q$  ставятся обязательно.

**Дифференциальные зависимости Журавского** – зависимости вытекают из условий равновесия элементарного участка балки при поперечном изгибе



и связывают между собой интенсивность распределенной нагрузки  $q$ , поперечную силу  $Q$  и изгибающий момент  $M$  следующими двумя функциональными соотношениями:

1. Первая производная от поперечной силы по абсциссе сечения равна интенсивности распределенной нагрузки.

$$\frac{dQ}{dx} = q$$

2. Первая производная от изгибающего момента по абсциссе сечения равна поперечной силе.

$$\frac{dM}{dx} = Q$$

Отсюда следует, что тангенс угла  $\alpha_M$  между касательной к линии, ограничивающей эпюру  $M$ , и осью эпюры равен поперечной силе.

$$\operatorname{tg} \alpha_M = Q$$

**Правила контроля правильности построения эпюр  $M$  и  $Q$  в балках** – из полученных дифференциальных зависимостей вытекают следующие



щие правила, позволяющие осуществлять контроль над правильностью построения эпюр  $M$  и  $Q$  в балках:

– если на некотором участке действует распределенная нагрузка с интенсивностью  $q = const$ , то на этом участке эпюра  $Q$  ограничена наклонной прямой линией, а эпюра  $M$  ограничена параболой, выпуклость которой направлена в сторону действия нагрузки (правило паруса);

– если на некотором участке распределенная нагрузка отсутствует, то на этом участке эпюра  $Q$  ограничена прямой линией параллельной оси эпюры, а эпюра  $M$  ограничена наклонной прямой линией;

– если на некотором участке эпюры поперечная сила положительная, то ординаты эпюры изгибающего момента на этом участке возрастают слева направо;

– если на некотором участке эпюры поперечная сила отрицательная, то ординаты эпюры изгибающего момента на этом участке убывают слева направо;

– если на некотором участке эпюры поперечная сила имеет постоянное значение, то эпюра моментов на этом участке ограничена прямой линией. При  $Q \neq 0$  эта линия наклонена к оси эпюры  $M$  под некоторым углом, а при  $Q = 0$  она параллельна оси эпюры;

– если в некотором сечении поперечная сила равняется нулю, то ордината на эпюре изгибающего момента в этом сечении принимает экстремальное значение (максимальное или минимальное), а касательная к линии, ограничивающей эпюру  $M$ , в этом сечении параллельна оси эпюры;

– если в некотором сечении приложена сосредоточенная сила, то на эпюре  $Q$  в этом месте имеется скачок (разрыв 1-го рода), а линии, ограничивающие эпюру  $M$  на этих участках, сопрягаются с переломом (не имеют в точке сопряжения общей касательной), который направлен в сторону действия нагрузки (правило паруса);

– если на границе соседних участков эпюра  $Q$  не имеет скачка, то линии, ограничивающие эпюру  $M$  на этих участках, сопрягаются без перелома, т.е. имеют в точке сопряжения общую касательную;

– если в некотором сечении приложена сосредоточенная пара с моментом  $M$ , то на эпюре  $M$  в этом месте имеется скачок (разрыв 1-го рода). Направление скачка зависит от направления пары сил. Если она в сечении растягивает нижние волокна, то скачок направлен вниз, в противном случае – вверх. На очертание эпюры  $Q$  наличие пары сил в сечении никак не влияет.

## ГЛОССАРИЙ МОДУЛЯ

***Статически неопределимая система***

Стержневая конструкция, у которой уравнений статики недостаточно для однозначного определения опорных реакций и внутренних усилий, возникающих в конструкции при произвольной статической нагрузке.

***Степень статической неопределимости***

Количество лишних связей в конструкции, которые можно удалить, сохраняя ее геометрическую неизменяемость.

***Степень внешней статической неопределимости***

Число лишних связей в опорных закреплениях конструкции.

***Степень внутренней статической неопределимости***

Число лишних связей внутри конструкции.

***Основная задача расчета статически неопределимых стержневых конструкций***

При заданных геометрической схеме конструкции и приложенных к ней внешних воздействиях определить размеры поперечных сечений всех конструктивных элементов, удовлетворяющих требованиям прочности, жесткости, устойчивости, и обеспечить надежность конструкции в целом.

***Частная задача расчета статически неопределимых стержневых конструкций***

Определить внутренние усилия и перемещения в стержневой статически неопределимой конструкции при заданных геометрической схеме системы, внешних воздействиях и размерах поперечных сечениях конструктивных элементов.

***Метод сил***

Классический метод решения частной задачи, в котором в качестве основных неизвестных выступают реакции лишних связей стержневой статически неопределимой конструкции.

***Основная система метода сил***

Эквивалентная статически определимая стержневая система, которая заменяет заданную статически неопределимую конструкцию при решении частной задачи.

***Канонические уравнения метода сил***

Дополнительные уравнения, учитывающие отсутствие перемещений в заданной статически неопределимой конструкции в местах расположения лишних связей.

***Основные неизвестные метода сил***

Неизвестные реакции в лишних связях заданной статически неопределимой конструкции.