

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования  
«Полоцкий государственный университет»

СЕРИЯ «САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ»

Л.С. Турищев

**МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ  
В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ  
СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЯХ  
ОТ НЕПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ**

Электронное учебное пособие  
для студентов строительных специальностей

*Текстовое электронное издание*

Новополоцк  
Полоцкий государственный университет  
2020

УДК 624.04(075.8)

ББК 38.112я73

Одобрено и рекомендовано к изданию методической комиссией  
инженерно-строительного факультета  
в качестве методического пособия  
(протокол № 3 от 14.04.2016)

Кафедра прикладной механики и графики

**РЕЦЕНЗЕНТЫ:**

канд. техн. наук, доц., зав. кафедры строительных конструкций Полоцкого государственного университета А.И. КОЛТУНОВ

канд. техн. наук, доц., доц. кафедры строительных конструкций Полоцкого государственного университета В.Н. КИСЕЛЕВ

**Турищев, Л. С.**

Методы определения внутренних усилий в статически определимых стержневых конструкциях от неподвижной нагрузки [Электронный ресурс] : электрон. учеб. пособие для студентов строительных специальностей / Л.С. Турищев. – Новополоцк : Полоц. гос. ун-т, 2020. – 1 электрон. опт. диск (CD-R).

ISBN 978-985-531-702-0.

На основе структурно-логических схем приведены рекомендации по технологии формирования междисциплинарной системы знаний, связанных с базовыми теоретическими положениями и понятиями модуля. Содержатся указания, связанные с практическим применением знаний для решения типовых задач модуля. Имеется банк тестовых заданий для самоконтроля. Приведен список рекомендуемой учебной литературы, интернет-источников. Составлен глоссарий модуля.

Предназначено для самостоятельной работы студентов строительных специальностей всех форм обучения при изучении курса «Строительная механика».

**№ госрегистрации 3302023414**

**ISBN 978-985-531-703-7**

© Турищев Л.С., 2020

© Полоцкий государственный университет, 2020

Для создания текстового электронного издания «Методы определения внутренних усилий в статически определимых стержневых конструкциях от неподвижной нагрузки» Л.С. Турищева использованы текстовый процессор Microsoft Word и программа Adobe Acrobat XI Pro для создания и просмотра электронных публикаций в формате PDF.

Материалы включены в Государственный регистр информационного ресурса. Регистрационное свидетельство № 3302023414 от 09.09.2020 г.

***Технические требования:***

1 оптический диск.

***Системные требования:***

PC не ниже класса Pentium;

32 Mb RAM; свободное место на HDD 16 Mb;

Windows 95/98/Me/2000/XP/7;

Дисковод CD-ROM 2-скоростной и выше;

мышь

Редактор *О.Ю. Тарасевич*  
Техническое редактирование *О.Ю. Тарасевич*  
Компьютерный дизайн *М.С. Мухоморовой*

---

Подписано к использованию 26.08.2020.

Объем издания: 3,5 Мб. Заказ 423.

---

Свидетельство о государственной регистрации  
издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 1/305 от 22.04.2014.

211440, ул. Блохина, 29,  
г. Новополоцк,  
Тел. 8 (0214) 59-95-41, 59-95-44  
<http://www.psu.by>

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	5
1. РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА МОДУЛЯ.....	7
2. УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ МОДУЛЯ.....	10
2.1. Задачи по определению внутренних усилий в МШБ с использованием аналитической формы.....	10
2.2. Задачи по определению внутренних усилий в МШБ с использованием матричной формы .....	22
2.3. Задачи по определению внутренних усилий в статически определимых рамах с использованием аналитической формы .....	32
2.4. Иллюстрация применения ПК SCAD для определения внутренних усилий в статически определимых рамах.....	40
3. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ И УМЕНИЙ.....	44
3.1. Тестовые задания первого уровня .....	45
3.2. Тестовые задания второго уровня.....	50
3.3. Тестовые задания третьего уровня.....	53
3.4. Ответы на тестовые задания первого и второго уровней .....	55
3.5. Рекомендации по выполнению тестовых заданий третьего уровня .....	57
ЛИТЕРАТУРА.....	58
ПРИЛОЖЕНИЕ 1 .....	60
ПРИЛОЖЕНИЕ 2 .....	67
ПРИЛОЖЕНИЕ 3 .....	69
ПРИЛОЖЕНИЕ 4 .....	74
ПРИЛОЖЕНИЕ 5 .....	77
ПРИЛОЖЕНИЕ 6 .....	100
ПРИЛОЖЕНИЕ 7 .....	103
ГЛОССАРИЙ МОДУЛЯ .....	115

## ВВЕДЕНИЕ

При расчете стержневых конструкций определенной геометрической формы с заданными параметрами внешних воздействий неизвестными величинами могут являться [13]:

- опорные реакции;
- внутренние усилия в произвольном сечении любого стержня;
- формы и размеры поперечных сечений, модули упругости конструкционного материала стержней;
- перемещения в различных точках конструкции.

Как следует из изученного вами теоретического материала предыдущего модуля курса, одна из основных задач строительной механики состоит в определении внутренних усилий, включая опорные реакции.

Возможны два подхода к их определению в стержневых конструкциях:

- использование классических методов расчета таких конструкций, ориентированных на технологию «ручного» счета, но допускающих использование компьютерных вычислений с целью автоматизации отдельных этапов расчета;
- использование полной системы уравнений строительной механики стержневых систем, изначально ориентированных только на технологию компьютерных вычислений.

В классических методах расчета определение внутренних усилий стержневой конструкции существенным образом зависит от статических признаков её расчетной схемы.

Для статически определимых систем опорные реакции и внутренние усилия не зависят от вида конструкционного материала, геометрических характеристик поперечных сечений конструктивных элементов и поэтому возможно их определение с помощью только уравнений равновесия независимо от перемещений конструкций.

В случае статически неопределимых систем уравнений статики недостаточно для определения опорных реакций и внутренних усилий и поэтому они дополняются уравнениями, характеризующими особенности деформирования конструкции. Поскольку деформированное состояние конструкции зависит и от параметров конструкционного материала, и от геометрических характеристик поперечных сечений стержней, то и возник-

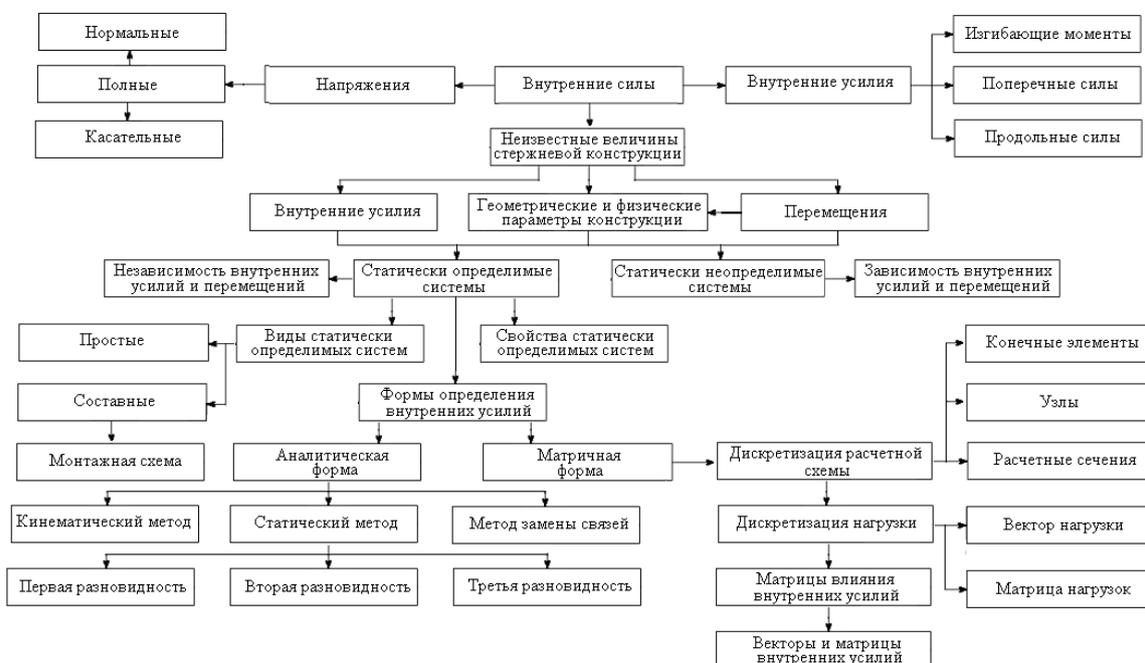
кающие в конструкции опорные реакции и внутренние усилия будут также зависеть от указанных величин.

Полная система уравнений строительной механики состоит из трех групп, описывающих статическую, геометрическую и физическую стороны задачи, связанные с расчетом стержневой конструкции. Статическая сторона задачи описывается уравнениями равновесия, устанавливающими взаимосвязь между внешними силами и внутренними усилиями конструкции. Геометрическая сторона задачи описывается уравнениями совместности деформаций, связывающими деформации и перемещения точек конструкции. Физическая сторона задачи описывается уравнениями, связывающими напряжения и деформации конструкционного материала. Совместное рассмотрение статических, геометрических и физических уравнений позволяет получить разрешающие уравнения, применимые для расчета как статически неопределимых, так и статически определимых стержневых систем.

В настоящем пособии рассматриваются скалярная и матричная формы классических методов расчета, применимые для определения внутренних усилий статически плоских стержневых конструкций от неподвижной нагрузки.

# 1. РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА МОДУЛЯ

Изучение теоретического материала модуля следует начинать с повторения рекомендаций по изучению курса в целом согласно [13]. Содержание изучаемого модуля связано с общими положениями и понятиями расчета плоских статически определимых стержневых конструкций при действии неподвижной нагрузки. Структурно-логическая схема ключевых понятий, принципов, терминов рассматриваемого модуля, которые подлежат пониманию и усвоению согласно [2], приведена на рисунке 1.



**Рисунок 1. – Структурно-логическая схема ключевых понятий, принципов, терминов изучаемого модуля**

Изучение материала модуля должно начинаться с осознанного понимания, что собой представляют *внутренние силы*<sup>1</sup>. Следует усвоить, что существует два вида числовых характеристик внутренних сил – *напряжения* и *внутренние усилия*. Здесь необходимо разобраться, какие бывают *виды напряжений* (полные, нормальные, касательные), *внутренних уси-*

<sup>1</sup> Здесь и далее курсивом выделяются термины и понятия курса, знание которых студентом является обязательным.

лий (изгибающие моменты, поперечные и продольные силы), что они собой характеризуют, и какова взаимосвязь между этими двумя числовыми мерами внутренних сил.

Далее следует понять, какие бывают *виды статически определимых стержневых конструкций* (простые, составные) и чем они разнятся, что такое *монтажная (этажная) схема* составной статически определимой конструкции, какими свойствами обладают статически определимые конструкции и какие существуют формы определения внутренних усилий в таких конструкциях (аналитическая, графическая, матричная).

Необходимо усвоить, что *аналитическая форма определения внутренних усилий* имеет три разновидности – *статический метод, кинематический метод, метод замены связей*. Поэтому, прежде всего, следует разобраться, что лежит в основе каждого метода, а затем освоить базирующийся на этой основе порядок вычисления внутренних усилий. Важно понимать, что любая разновидность аналитической формы определения внутренних усилий, позволяет находить их в виде функций координат сечений отдельных стержней и, следовательно, вычислять внутренние усилия в произвольном сечении конструкции.

Далее следует понять, что в отличие от аналитической формы, *матричная форма определения внутренних усилий* позволяет вычислять внутренние усилия только в определенных, заранее установленных сечениях конструкции. Выделение таких сечений, является следствием дискретизации расчетной схемы конструкции и заданной нагрузки. Следует разобраться, как осуществляется *дискретизация расчетной схемы*, и какими параметрами характеризуется дискретная расчетная схема. Важно понять, как осуществляется *дискретизация нагрузки*, как формируются *вектор нагрузки* и *матрица нагрузок*, что описывают собой *векторы и матрицы внутренних усилий*, что такое *матрица влияния внутренних усилий*, как она получается и используется для нахождения векторов и матриц внутренних усилий.

При изучении материала модуля рекомендуется использование следующей литературы: [4, с.46–63]; [5, с.29–34, 56–65, 69–72]; [6, с.98–118]; [10, с.42–55]; [14, с.69–76].

Для осознанного понимания и усвоения материала рассматриваемого модуля курса, прежде всего, необходимо повторить:

– *изученное в математике* – приближенное значение величины, абсолютная и относительная погрешность, значащая и верная цифры, правила приближенных вычислений, характеристики поведения функций, классификация функций, бесконечно малая и бесконечно большая величины, предел переменной величины, непрерывная и разрывная функции, производная функция, вектор, матрица. Краткие справочные сведения, связанные с этими понятиями, приведены в приложении 1;

– *изученное в физике* – единицы физических величин, система единиц физических величин, международная система единиц (СИ), техническая система единиц. Краткие справочные сведения, связанные с этими понятиями, приведены в приложении 2;

– *изученное в теоретической механике* – основные виды связей, свойства момента пары сил и момента силы относительно точки, теореме Вариньона, теореме о параллельном переносе силы. Краткие справочные сведения, связанные с этими понятиями, аксиомами и уравнениями, приведены в приложении 3;

– *изученное в сопротивлении материалов* – порядок построения эпюр внутренних усилий при поперечном изгибе балок, правила знаков внутренних усилий при построении эпюр в балках, дифференциальные зависимости Журавского, правила контроля правильности построения эпюр в балках. Краткие справочные сведения, связанные с этими понятиями, приведены в приложении 4.

– *изученное в модуле «Введение в строительную механику»* – расчетная схема (модель) конструкции, разделение расчетных схем по статическим и кинематическим признакам и их взаимосвязь, линейно и нелинейно деформируемые системы, принципы независимости действия сил и неизменности начальных размеров.

## **2. УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ МОДУЛЯ**

После завершения изучения теоретического материала модуля, его понимания и усвоения можно переходить к применению полученных знаний для решения типовых задач модуля. Согласно утвержденной учебной программе курса [3] вы должны уметь:

- определять внутренние усилия в многопролетных шарнирных балках (МШБ) с использованием аналитической формы;
- определять внутренние усилия в МШБ с использованием матричной формы;
- определять внутренние усилия в статически определимых рамах с использованием аналитической формы,

А также вы должны иметь представление об определении внутренних усилий в статически определимых стержневых конструкциях с использованием современных проектно-вычислительных комплексов.

Для приобретения умений решения задач рекомендуется сначала внимательно прочитать указания к решению задач каждого вида, обратиться с приводимыми примерами их решения. После этого рекомендуется перейти к решению задач, приведенных в [9], [10], [15], [17].

### **2.1. Задачи по определению внутренних усилий в МШБ с использованием аналитической формы**

В основе аналитического определения изгибающих моментов и поперечных сил в МШБ лежит использование ее монтажной схемы и статического метода нахождения внутренних усилий.

На монтажной схеме отдельные звенья конструкции, в соответствии с порядком сборки снизу вверх, изображаются условно в разных уровнях. Это позволяет при расположении нагрузки на такой схеме увидеть последовательность ее передачи нагрузки сверху вниз и определить порядок расчета звеньев конструкции как отдельных балок – простых или с консолями.

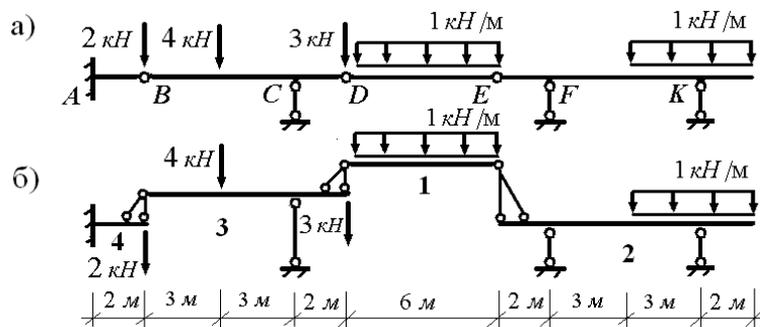
Сначала рассчитываются нагруженные балки, расположенные на самом верху монтажной схемы конструкции. Таких балок может быть одна или несколько. Для них находят опорные реакции, а затем, используя статический метод, определяют изгибающие моменты, поперечные силы.

При расчетах нижележащих балок, поддерживающих уже рассчитанные звенья МШБ, учитываются силы давления от вышележащих балок. Такие силы численно равны опорным реакциям этих балок и имеют, в соответствии с третьим законом Ньютона, противоположное направление.

При определении изгибающих моментов и поперечных сил следует пользоваться правилами знаков, принятыми в сопротивлении материалов. На эпюрах  $M$  положительные ординаты откладываются вниз, отрицательные – вверх от оси балки. Таким образом, ординаты на эпюрах  $M$  будут всегда отложены со стороны растянутого волокна. Знаки на эпюрах  $M$  не проставляются. На эпюрах  $Q$  положительные ординаты откладываются вверх, отрицательные – вниз от оси балки и обязательно проставляются знаки.

Эпюры внутренних усилий, построенные в результате расчета звеньев конструкции как отдельных балок, объединяются в сводные эпюры  $M$  и  $Q$ , которые следует расположить непосредственно под нагруженной расчетной схемой МШБ. Это позволит проверить качественно соответствие схемы нагружения и эпюр  $M$  и  $Q$  дифференциальным зависимостям.

**Пример 1.** Для многопролетной шарнирной балки, показанной на рисунке 2, а, построить эпюры  $M$  и  $Q$ . Монтажная схема балки и порядок расчета ее звеньев показаны на рисунке 2, б.



**Рисунок 2. – Многопролетная шарнирная балка**

В соответствии с указанным порядком рассчитаем звенья многопролетной балки как однопролетные балки.

**Расчет звена DE.** Расчет начинаем с определения опорных реакций, схема которых показана на рисунке 3, а.

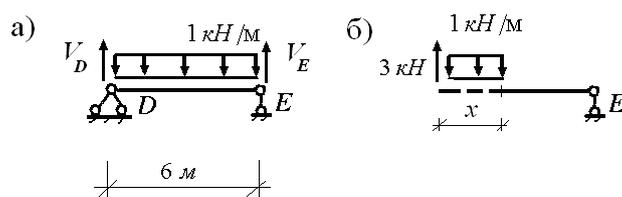


Рисунок 3. – Схема опорных реакций

Составляя уравнение моментов относительно правой опоры, найдем величину левой опорной реакции:

$$\begin{aligned}\sum M_E &= 0; \\ V_D \cdot 6 - 1 \cdot 6 \cdot 3 &= 0; \\ V_D &= 3 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Составляя уравнение моментов относительно левой опоры, найдем величину правой опорной реакции:

$$\begin{aligned}\sum M_D &= 0; \\ -V_E \cdot 6 + 1 \cdot 6 \cdot 3 &= 0; \\ V_E &= 3 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Составляя для звена DE сумму проекций всех сил на ось y, можно убедиться, что опорные реакции найдены верно:

$$\sum y = 0; \quad 3 - 1 \cdot 6 + 3 = 6 - 6 = 0.$$

Переходим к определению внутренних усилий. Для их определения будем использовать вторую разновидность статического метода. В рассматриваемом звене можно выделить один участок. Рассечем звено в произвольном сечении на две части и выберем в качестве отделенной левую часть звена (рисунок 3, б). Переменная  $x$ , определяющая положение сечения, может изменяться в следующем интервале:  $0 \leq x \leq 6$  м.

Приводя внешние силы отделенной части к центру тяжести поперечного сечения правой части звена, получим следующие аналитические выражения для внутренних усилий

$$\begin{aligned}M &= 3 \cdot x - 0.5x^2; \\ Q &= 3 - 1 \cdot x.\end{aligned}$$

Из полученного выражения для изгибающего момента следует, что изменение его величины описывается нелинейной функцией и поэтому требуется проверка на существование у нее точек экстремума. Для этого, в соответствии с дифференциальной зависимостью между поперечной си-

лой и изгибающим моментом, нужно выяснить, при каком значении  $x$  поперечная сила принимает нулевые значения. Приравняв нулю, выражение для поперечной силы найдем, что это возможно при значении

$$x = 3 \text{ м}.$$

И поскольку полученное значение  $x$  принадлежит интервалу своего изменения, то ему соответствует экстремальное значение изгибающего момента. Таким образом, изгибающий момент звена  $DE$  принимает следующие характерные значения

$$x = 0; \quad M = 0;$$

$$x = 3 \text{ м}; \quad M = 4.5 \text{ кНм};$$

$$x = 6 \text{ м}; \quad M = 0.$$

Из полученного выражения для поперечной силы следует, что изменение ее величины описывается линейной функцией, которая на границах звена  $DE$  принимает следующие значения:

$$x = 0; \quad Q = 3 \text{ кН};$$

$$x = 6 \text{ м}; \quad Q = -3 \text{ кН}.$$

Эпюры внутренних усилий звена  $DE$ , построенные согласно полученным аналитическим выражениям для  $M$  и  $Q$ , приведены на рисунке 4.

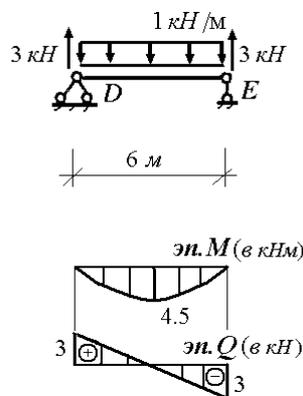


Рисунок 4. – Эпюры внутренних усилий звена DE

**Расчет звена  $EK$ .** При расчете звена  $EK$  учитывается сила давления на него звена  $DE$  в точке  $E$ , равная величине опорной реакции  $V_E = 3 \text{ кН}$  и направленная вниз. Схема нагружения звена  $EK$  и его опорные реакции показаны на рисунке 5.

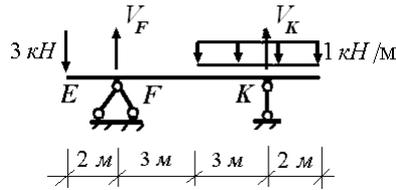


Рисунок 5. – Схема нагружения звена EK

Составляя уравнение моментов относительно правой опоры, найдем величину левой опорной реакций:

$$\begin{aligned} \sum M_K &= 0; \\ V_F \cdot 6 - 3 \cdot 8 - 1 \cdot 3 \cdot 1.5 + 1 \cdot 2 \cdot 1 &= 0; \\ V_F &= 4.416 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Составляя уравнение моментов относительно левой опоры, найдем величину правой опорной реакций:

$$\begin{aligned} \sum M_F &= 0; \\ -V_K \cdot 6 - 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot 4.5 + 1 \cdot 2 \cdot 7 &= 0; \\ V_K &= 3.584 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Составляя для звена EK сумму проекций всех сил на ось y, можно убедиться, что опорные реакции найдены верно:

$$\sum y = 0; \quad -3 + 4.416 - 1 \cdot 5 + 3.584 = -8 + 8 = 0.$$

При определении внутренних усилий для звена EK следует рассматривать 4 участка для определения внутренних усилий – EF, FM, MK, KN (рисунок 6, а).

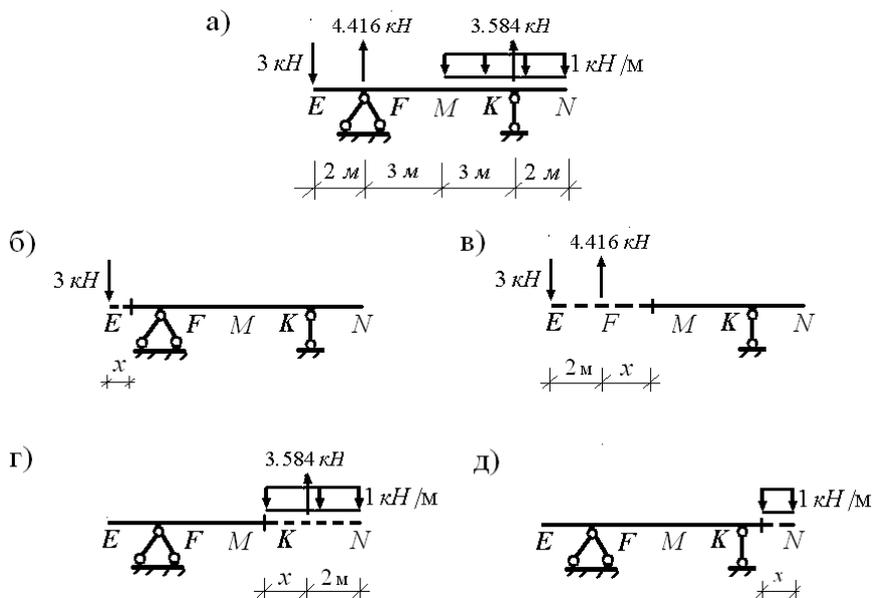


Рисунок 6. – К определению внутренних усилий звена EK

Рассмотрим участок  $EF$ , разрежем его в произвольном сечении на две части и выберем в качестве отделенной левую часть (рисунок 6, б). Переменная  $x$ , определяющая положение сечения на участке, может изменяться в следующем интервале:  $0 \leq x \leq 2$  м. Приводя внешние силы отделенной части к центру тяжести поперечного сечения правой части, получим следующие аналитические выражения для внутренних усилий участка  $EF$ :

$$M = -3 \cdot x;$$

$$Q = -3 \cdot x.$$

Из полученного выражения для изгибающего момента следует, что на участке  $EF$  изменение его величины описывается линейной функцией, которая на границах участка принимает следующие значения:

$$x = 0; \quad M = 0;$$

$$x = 2 \text{ м}; \quad M = -6 \text{ кНм}.$$

И, следовательно, на участке  $EF$  растянуты верхние волокна.

Из полученного выражения для поперечной силы следует, что эта сила отрицательная, а её величина постоянна по длине участка  $EF$ .

Далее рассмотрим участок  $FM$ , разрежем его произвольно на две части и выберем в качестве отделенной левую часть (рисунок 6, в). Переменная  $x$ , определяющая положение сечения на участке, может изменяться в следующем интервале:  $0 \leq x \leq 3$  м. Приводя внешние силы отделенной части к центру тяжести поперечного сечения правой части, получим следующие аналитические выражения для внутренних усилий участка  $FM$ :

$$M = -3 \cdot (x+2) + 4.416 \cdot x;$$

$$Q = 1.416 \text{ кН}.$$

Из полученного выражения для изгибающего момента следует, что на участке  $FM$  изменение его величины описывается линейной функцией, которая на границах участка принимает следующие значения:

$$x = 0; \quad M = -6 \text{ кНм};$$

$$x = 2 \text{ м}; \quad M = -1.752 \text{ кНм}.$$

И, следовательно, на участке  $EF$  растянуты верхние волокна.

Из полученного выражения для поперечной силы следует, что эта сила отрицательная, а её величина постоянна по длине участка  $FM$ .

Далее рассмотрим участок  $MK$ , разрежем его в произвольном сечении на две части и выберем в качестве отделенной правую часть (рисунок 6, г). Переменная  $x$ , определяющая положение сечения на участке, может изменяться в следующем интервале:  $0 \leq x \leq 3$  м. Приводя внешние

силы отделенной части к центру тяжести поперечного сечения левой части, получим следующие аналитические выражения для внутренних усилий участка  $MK$ :

$$M = 3.584 \cdot x - 0.5 \cdot (x+2)^2;$$

$$Q = -3.584 + (x+2).$$

Из полученного выражения для изгибающего момента следует, что на участке  $MK$  изменение его величины описывается нелинейной функцией и поэтому требуется проверка на существование у нее точек экстремума. Для этого, в соответствии с дифференциальной зависимостью между поперечной силой и изгибающим моментом, нужно выяснить, при каком значении  $x$  поперечная сила принимает нулевые значения. Приравняв нулю, выражение для поперечной силы найдем, что это возможно при значении

$$x = 1.584 \text{ м}.$$

И поскольку полученное значение  $x$  принадлежит интервалу своего изменения, то ему соответствует экстремальное значение изгибающего момента.

Таким образом, изгибающий момент на участке  $MK$  принимает следующие характерные значения:

$$x = 0; \quad M = -2 \text{ кНм};$$

$$x = 1.584 \text{ м}; \quad M = -0.745 \text{ кНм};$$

$$x = 3 \text{ м}; \quad M = -1.752 \text{ кНм}.$$

И, следовательно, на участке  $MK$  растянуты верхние волокна.

Из полученного выражения для поперечной силы следует, что на участке  $MC$  изменение ее величины описывается линейной функцией, которая на границах участка принимает следующие значения

$$x = 0; \quad Q = -1.584 \text{ кН};$$

$$x = 3 \text{ м}; \quad Q = 1.416 \text{ кН}.$$

И, наконец, рассмотрим участок  $KN$ , рассечем его в произвольном сечении на две части и выберем в качестве отделенной правую часть (рисунок 6,  $\delta$ ). Переменная  $x$ , определяющая положение сечения на участке, может изменяться в следующем интервале:  $0 \leq x \leq 2$  м. Приводя внешние силы отделенной части к центру тяжести поперечного сечения левой части, получим следующие аналитические выражения для внутренних усилий участка  $KN$ :

$$M = -0.5 \cdot x^2;$$

$$Q = x.$$

Из полученного выражения для изгибающего момента следует, что на участке  $KN$  изменение его величины описывается нелинейной функцией и поэтому требуется проверка на существование у нее точек экстремума. Для этого, в соответствии с дифференциальной зависимостью между поперечной силой и изгибающим моментом, нужно выяснить, при каком значении  $x$  поперечная сила принимает нулевые значения. Приравняв нулю, выражение для поперечной силы найдем, что это возможно при значении:

$$x = 0.$$

И поскольку полученное значение  $x$  принадлежит интервалу своего изменения, то ему соответствует экстремальное значение изгибающего момента.

Таким образом, изгибающий момент на участке  $KN$  принимает следующие характерные значения:

$$x = 0; \quad M = 0;$$

$$x = 2\text{ м}; \quad M = -2\text{ кНм}.$$

Следовательно, на участке  $KN$  растянуты верхние волокна.

Из полученного выражения для поперечной силы следует, что на участке  $KN$  изменение ее величины описывается линейной функцией, которая на границах участка принимает следующие значения:

$$x = 0; \quad Q = 0;$$

$$x = 2\text{ м}; \quad Q = 2\text{ кН}.$$

Эпюры внутренних усилий звена  $EK$ , построенные согласно полученным аналитическим выражениям для  $M$  и  $Q$ , приведены на рисунке 7.

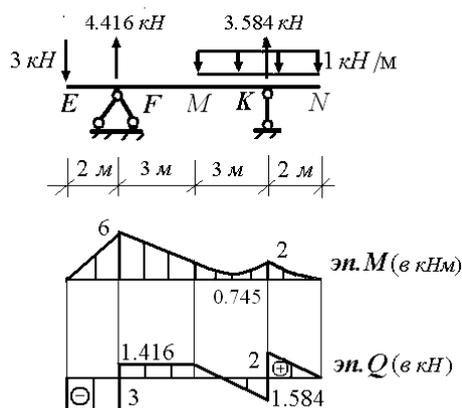


Рисунок 7. – Эпюры внутренних усилий звена EK

**Расчет звена  $BD$ .** При расчете звена  $BD$  учитывается сила давления на него звена  $DE$  в точке  $D$ , равная величине опорной реакции  $V_D = 3\text{ кН}$

и направленная вниз. Схема нагружения звена  $BD$  и его опорные реакции показаны на рисунке 8.

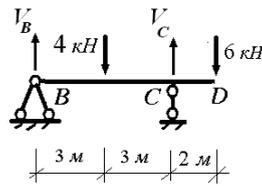


Рисунок 8. – Схема нагружения звена  $BD$

Составляя уравнение моментов относительно правой опоры, найдем величину левой опорной реакции:

$$\begin{aligned}\sum M_C &= 0; \\ V_B \cdot 6 - 4 \cdot 3 + 6 \cdot 2 &= 0; \\ V_B &= 0.\end{aligned}$$

Составляя уравнение моментов относительно левой опоры, найдем величину правой опорной реакции:

$$\begin{aligned}\sum M_B &= 0; \\ -V_C \cdot 6 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 8 &= 0; \\ V_C &= 10 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Составляя для звена  $BD$  сумму проекций всех сил на ось  $y$ , можно убедиться, что опорные реакции найдены верно

$$\sum y = 0; \quad -4 + 10 - 6 = -10 + 10 = 0.$$

При определении внутренних усилий для звена  $BD$  следует рассматривать 3 участка для определения внутренних усилий –  $BK$ ,  $KC$ ,  $CD$  (рисунок 9, а).

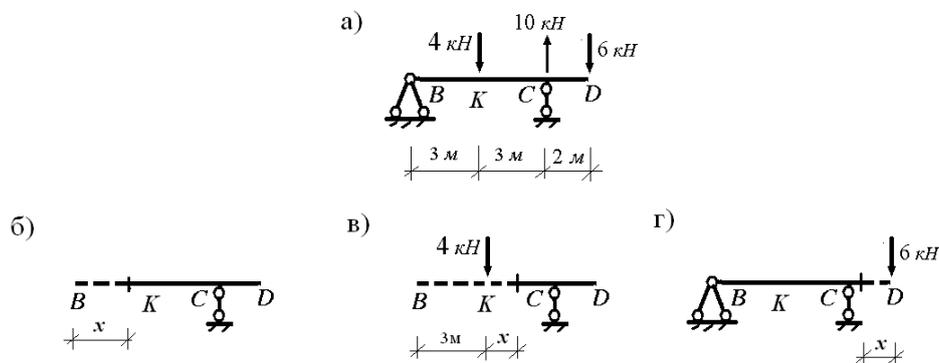


Рисунок 9. – К определению внутренних усилий для звена  $BD$

Рассмотрим участок  $BK$ , разрежем его в произвольном сечении на две части и выберем в качестве отделенной левую часть (рисунок 9, б). Переменная  $x$ , определяющая положение сечения на участке, может изменяться в следующем интервале:  $0 \leq x \leq 3$  м. Поскольку к отделенной части не приложены внешние силы, то на участке  $BK$  внутренние усилия равны нулю:

$$M = 0;$$

$$Q = 0.$$

Далее рассмотрим участок  $KC$ , разрежем его в произвольном сечении на две части и выберем в качестве отделенной левую часть (рисунок 9, в). Переменная  $x$ , определяющая положение сечения на участке, может изменяться в следующем интервале:  $0 \leq x \leq 3$  м. Приводя внешние силы отделенной части к центру тяжести поперечного сечения левой части, получим следующие аналитические выражения для внутренних усилий участка  $KC$ :

$$M = -4 \cdot x;$$

$$Q = -4 \text{ кН}.$$

Из полученного выражения для изгибающего момента следует, что на участке  $KC$  изменение его величины описывается линейной функцией, которая на границах участка принимает следующие значения:

$$x = 0; \quad M = 0;$$

$$x = 3 \text{ м}; \quad M = -12 \text{ кНм}$$

И, следовательно, на участке  $KC$  растянуты верхние волокна.

Из полученного выражения для поперечной силы следует, что эта сила отрицательная, а её величина постоянна по длине участка  $KC$ .

И, наконец, рассмотрим участок  $CD$ , разрежем его в произвольном сечении на две части и выберем в качестве отделенной правую часть (рисунок 9, г). Переменная  $x$ , определяющая положение сечения на участке, может изменяться в следующем интервале:  $0 \leq x \leq 2$  м. Приводя внешние силы отделенной части к центру тяжести поперечного сечения левой части, получим следующие аналитические выражения для внутренних усилий участка  $CD$ :

$$M = -6 \cdot x;$$

$$Q = 6 \text{ кН}.$$

Из полученного выражения для изгибающего момента следует, что на участке  $CD$  изменение его величины описывается линейной функцией, которая на границах участка принимает следующие значения

$$x = 0; \quad M = 0;$$

$$x = 2 \text{ м}; \quad M = -12 \text{ кНм}.$$

И, следовательно, на участке  $KC$  растянуты верхние волокна.

Из полученного выражения для поперечной силы следует, что эта сила положительная, а её величина постоянна по длине участка  $CD$ .

Эпюры внутренних усилий звена  $BD$ , построенные согласно полученным аналитическим выражениям для  $M$  и  $Q$ , приведены на рисунке 10.

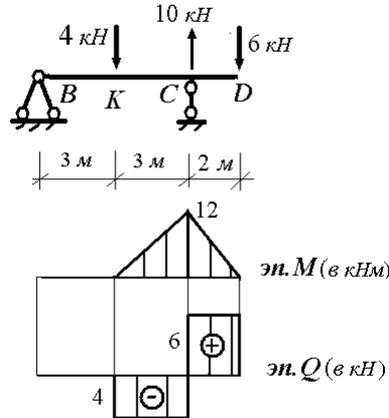


Рисунок 10. – Эпюры внутренних усилий звена  $BD$

**Расчет звена  $AB$ .** При расчете звена  $AB$  не учитывается сила давления на него звена  $BD$  в точке  $B$ , так как величина опорной реакции  $V_B = 0$ . Схемы нагружения звена  $AB$  и его опорных реакций показаны на рисунке 11, а.

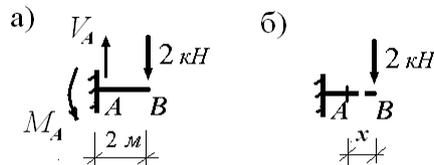


Рисунок 11. – К расчету звена  $AB$

Составляя уравнение проекций сил на ось  $y$ , найдем величину вертикальной опорной реакции:

$$\begin{aligned} \sum y &= 0; \\ V_A - 2 &= 0; \\ V_A &= 2 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Составляя уравнение моментов относительно опоры, найдем величину реактивного момента:

$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0; \\ -M_A + 2 \cdot 2 &= 0; \\ M_A &= 4 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

Ввиду простоты вычислений опорных реакций нет необходимости в проведении проверки правильности их определения.

Для определения внутренних усилий в рассматриваемом звене можно выделить один участок. Рассечем звено в произвольном сечении на две части и выберем в качестве отделенной правую часть звена (рисунок 11, б). Переменная  $x$ , определяющая положение сечения, может изменяться в следующем интервале:  $0 \leq x \leq 2$  м.

Приводя внешние силы отделенной части к центру тяжести поперечного сечения правой части звена, получим следующие аналитические выражения для внутренних усилий:

$$M = -2 \cdot x;$$

$$Q = 2 \text{ кН}.$$

Из полученного выражения для изгибающего момента следует, что для звена  $AB$  изменение его величины описывается линейной функцией, которая на его границах принимает следующие значения:

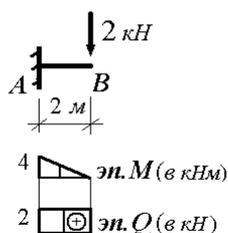
$$x = 0; \quad M = 0;$$

$$x = 2 \text{ м}; \quad M = -4 \text{ кНм}$$

и, следовательно, на звене  $AB$  растянуты верхние волокна.

Из полученного выражения для поперечной силы следует, что эта сила положительная, а её величина постоянна по длине звена  $AB$ .

Эпюры внутренних усилий звена  $AB$ , построенные согласно полученным аналитическим выражениям для  $M$  и  $Q$ , приведены на рисунке 11.



**Рисунок 11. – Эпюры внутренних усилий звена AB**

Эпюры внутренних усилий для многопролетной шарнирной балки получаются объединением эпюр внутренних усилий, построенных отдельно для каждого звена МШБ, и приведены на рисунке 12.

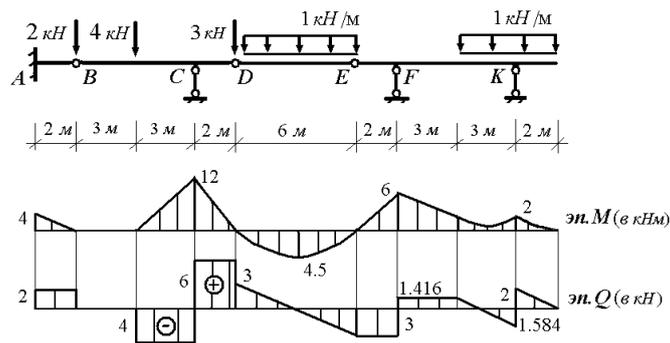


Рисунок 12. – Эпюры внутренних усилий многопролетной шарнирной балки

## 2.2 Задачи по определению внутренних усилий в МШБ с использованием матричной формы

В основе матричного определения изгибающих моментов и поперечных сил в МШБ лежит использование матриц влияния внутренних усилий.

Формирование матриц влияния внутренних усилий основано на использовании приемов дискретизации расчетной схемы конструкции и заданной нагрузки.

Дискретизация расчетной схемы стержневой конструкции предполагает ее разбиение на отдельные элементы, введение мест их соединения и выделение расчетных сечений конструкции.

Отдельными элементами могут служить как стержни конструкции, так и их участки, на которые они могут разбиваться с целью повышения точности расчета конструкции. Пусть их число равняется  $r$ .

Места соединения отдельных элементов, полученных при образовании дискретной расчетной схемы, называются ее узлами. Пусть их число равняется  $f$ .

Расчетными сечениями конструкции являются концевые сечения отдельных элементов, примыкающих к узлам дискретной расчетной схемы.

Дискретизация нагрузки заключается в замене заданной нагрузки статически эквивалентной системой сосредоточенных сил, приложенных в узлах дискретной расчетной схемы. Это позволяет описать нагрузку в виде вектора

$$\bar{G} = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_f \end{pmatrix}.$$

Наиболее простой способ определения величин элементов вектора нагрузки заключается в следующем. Для каждого нагруженного элемента определяется равнодействующая приложенной к нему нагрузки, которая по правилу рычага распределяется между расчетными сечениями элемента. Алгебраически складывая составляющие равнодействующих в сечениях, примыкающих к узлу, получим эквивалентную сосредоточенную силу для этого узла. Точность такого способа замены действующей нагрузки статически эквивалентной системой сосредоточенных сил зависит от числа элементов, на которые разбивается конструкция.

Матрица влияния некоторого внутреннего усилия  $S$  формируется по столбцам из значений ординат эпюр этого усилия, получаемых в расчетных сечениях при последовательном приложении в узлах дискретной расчетной схемы сил  $\tilde{G}_i = 1$  ( $i = 1, \dots, f$ ). Поэтому эта матрица прямоугольная с размерами  $r \times f$  и имеет вид

$$L_S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1f} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2f} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{r1} & s_{r2} & \dots & s_{rf} \end{pmatrix}.$$

Число строк матрицы равняется числу расчетных сечений, а число столбцов – числу узлов. Она позволяет осуществить линейное преобразование вектора нагрузки  $\bar{G}$  в вектор искомого внутреннего усилия  $\bar{S}$

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_r \end{pmatrix}$$

согласно формуле

$$\bar{S} = L_S \bar{G}.$$

С целью упрощения процедуры формирования матриц влияния внутренних усилий МШБ, которые являются составными статически опре-

делимыми конструкциями, целесообразно использовать метод замены связей. Метод замены связей основан на переходе от расчета заданной составной конструкции к расчету некоторой эквивалентной простой конструкции. Такая конструкция получается из заданной перестановкой некоторого числа связей  $m$ , т.е. удалением связей в одних местах и введением их в других местах конструкции. Полученная конструкция называется заменяющей.

Для МШБ наиболее простой заменяющей конструкцией является консольная балка с расположением заземляющей опоры на левом конце. Для её образования необходимо, за счет перестановки опорных стержней:

- ввести на левом конце МШБ один опорный стержень, если там располагается шарнирно неподвижная опора, два опорных стержня, если там располагается шарнирно подвижная опора, и три опорных стержня, если левый конец свободный;

- добавить в сечения МШБ, где расположены промежуточные шарниры, по одному стержню.

Эквивалентность заменяющей консольной балки достигается следующим образом. Во-первых, к ней прикладываются в качестве дополнительных внешних воздействий неизвестные опорные реакции  $X_1, \dots, X_m$  удаленных опорных стержней МШБ. Во-вторых, вводятся условия, накладывающие некоторые ограничения на величины внутренних усилий консольной балки  $S$  (изгибающие моменты  $M$  и поперечные силы  $Q$ ) в местах введения дополнительных связей.

$$S_1(X_1, \dots, X_m; P) = 0$$

.....

$$S_n(X_1, \dots, X_m; P) = 0$$

Применяя к этим условиям принцип независимости действия сил, получим систему уравнений для определения  $X_1, \dots, X_m$

$$s_{11}X_1 + \dots + s_{1m}X_m + S_{1P} = 0$$

.....

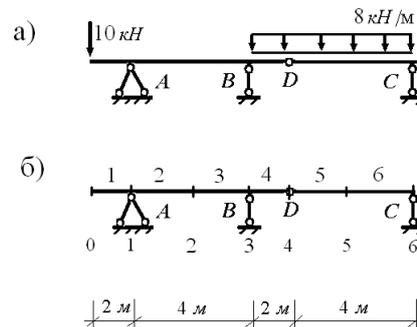
$$s_{m1}X_1 + \dots + s_{mm}X_m + S_{mP} = 0$$

Коэффициенты системы уравнений  $s_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, m$ ) являются единичными внутренними усилиями, а свободные члены  $S_{iP}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) - грузовыми внутренними усилиями, возникающими в консольной балке в местах введения дополнительных связей. Для определения коэффициентов

$s_{ij}$  рассматриваются единичные состояния консольной балки, получаемые последовательным приложением к ней сил  $\tilde{X}_i = 1$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Для определения свободных членов  $S_{iP}$  рассматривается грузовое состояние консольной балки, получаемое приложением к ней заданной нагрузки.

Найденные в результате решения системы уравнений опорные реакции  $X_1, \dots, X_m$  включаются в вектор узловой нагрузки консольной балки.

**Пример 2.** Для МШБ (рисунок 13, а) построить эпюру  $M$ , используя матричную форму расчета.



**Рисунок 13. – К примеру 2**

1. Осуществляем дискретизацию расчетной схемы балки (рисунок 13, б). Для этого разбиваем её на шесть элементов ( $s = 1, \dots, 6$ ), выделяем семь узлов ( $f = 0, 1, \dots, 6$ ) и вводим семь расчетных сечений ( $r = 0, 1, \dots, 6$ )<sup>2</sup>.

2. Осуществляем дискретизацию внешней нагрузки. Находим элементы вектора нагрузки. Согласно схеме нагружения балки (рисунок 13, а), они принимают следующие значения:

– к нулевому узлу приложена сосредоточенная сила  $10 \text{ кН}$ , примыкает ненагруженный первый элемент и, следовательно,  $G_0 = 10 \text{ кН}$ <sup>3</sup>;

– к первому и второму узлам примыкают ненагруженные элементы балки, соответственно, 1, 2 и 2, 3 и, следовательно,  $G_1 = 0$  и  $G_2 = 0$ ;

– к третьему узлу примыкают ненагруженный элемент 3 и элемент 4, нагруженный равномерно распределенной нагрузкой с интенсивностью

<sup>2</sup> Так как величины изгибающих моментов не изменяются при переходе сечений через узлы, то число сечений при построении только эпюры  $M$  может быть принятым равным числу узлов.

<sup>3</sup> Элементы вектора нагрузки, которым соответствуют силы, направленные вниз, считаются положительными, а направленные вверх - отрицательными.

$q = 8 \text{ кН/м}$ . Половина равнодействующей этой распределенной нагрузки будет передаваться на узел 3 и, следовательно,  $G_3 = 8 \text{ кН}$ ;

– к четвертому и пятому узлам примыкают нагруженные равномерно распределенной нагрузкой с интенсивностью  $q = 8 \text{ кН/м}$ , соответственно, элементы 4, 5 и элементы 5, 6. Тогда сосредоточенная сила, действующая на это узел, будет складываться из половинок равнодействующих распределенной нагрузки этих элементов и, следовательно,  $G_4 = 16 \text{ кН}$  и  $G_5 = 16 \text{ кН}$ ;

– к шестому узлу примыкает элемент 6, нагруженный равномерно распределенной нагрузкой с интенсивностью  $q = 8 \text{ кН/м}$ . Половина равнодействующей этой распределенной нагрузки будет передаваться на узел 6 и, следовательно,  $G_6 = 8 \text{ кН}$ .

Сформированный таким образом вектор нагрузки для нашей балки имеет вид

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \\ 16 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

### 3. Образование эквивалентной консольной балки (рисунок 14).

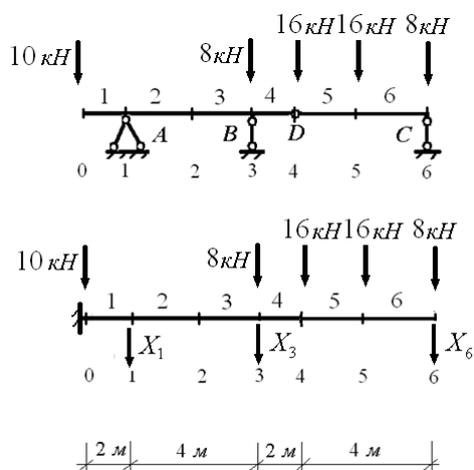


Рисунок 14. – К образованию эквивалентной консольной балки

Для этого переместим опоры  $A$  и  $B$  в нулевой узел и расположим их там бесконечно близко. Это позволяет образовать в этом узле неподвижную защемляющую опору. А для замены промежуточного шарнира  $D$  в узле 4 на сплошное сечение добавим туда стержень опоры  $C$ .

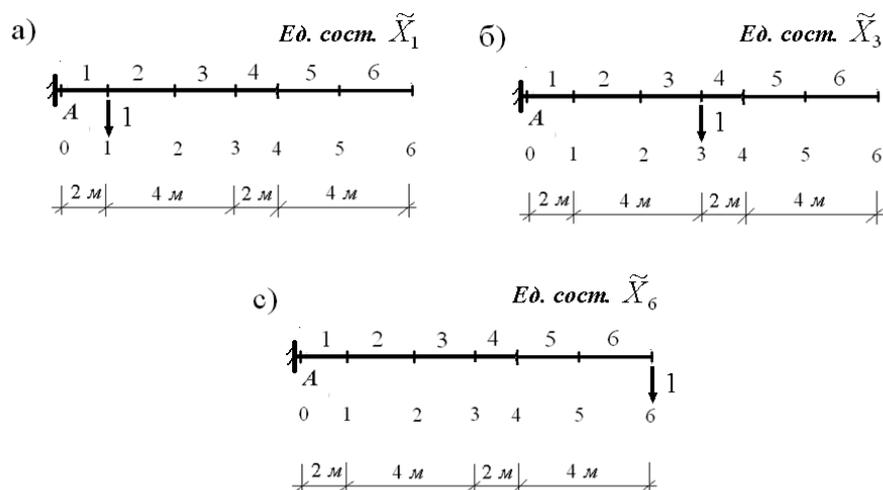
Для обеспечения эквивалентности полученной консольной балки заданной МШБ заменим удаленные опоры их опорными реакциями  $X_1, X_3, X_6$ . Кроме того, для сечений 0 и 4 введем условия

$$\begin{aligned} M_0(X_1, X_3, X_6, G) &= 0; \\ Q_0(X_1, X_3, X_6, G) &= -10; \\ M_4(X_1, X_3, X_6, G) &= 0. \end{aligned}$$

Которые, согласно принципу независимости действия сил, разворачиваются в уравнения относительно неизвестных опорных реакций.

$$\begin{aligned} m_{01}X_1 + m_{03}X_3 + m_{06}X_6 + M_{0G} &= 0; \\ q_{01}X_1 + q_{03}X_3 + q_{06}X_6 + Q_{0G} &= -10; \\ m_{41}X_1 + m_{43}X_3 + m_{46}X_6 + M_{4G} &= 0; \end{aligned}$$

Для определения коэффициентов уравнений рассмотрим три единичных состояния, связанные с неизвестными опорными реакциями. Для этого вместо опорных реакций приложим силы, равные единице (рисунок 15).



**Рисунок 15. – Схемы единичных состояний, связанные с неизвестными опорными реакциями**

Согласно схеме нагружения первого единичного состояния (рисунок 15, а), найдем значения коэффициентов как единичные внутренние усилия в соответствующих сечениях

- $m_{01} = -2m$  – изгибающий момент в нулевом сечении;
- $q_{01} = 1$  – поперечная сила в нулевом сечении;

–  $m_{41} = 0$  – изгибающий момент в четвертом сечении.

Согласно схеме нагружения второго единичного состояния (рисунок 15, б), найдем значения коэффициентов как единичные внутренние усилия в соответствующих сечениях

–  $m_{03} = -6m$  – изгибающий момент в нулевом сечении;

–  $q_{03} = 1$  – поперечная сила в нулевом сечении;

–  $m_{43} = 0$  – изгибающий момент в четвертом сечении.

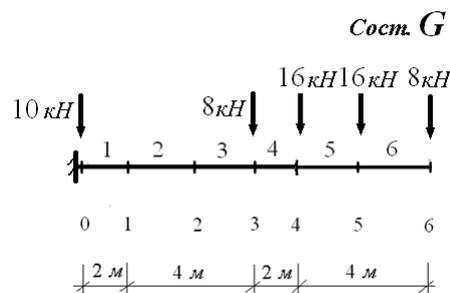
Согласно схеме нагружения третьего единичного состояния (рисунок 15, в), найдем значения коэффициентов как единичные внутренние усилия в соответствующих сечениях

–  $m_{06} = -12m$  – изгибающий момент в нулевом сечении;

–  $q_{06} = 1$  – поперечная сила в нулевом сечении;

–  $m_{46} = -4m$  – изгибающий момент в четвертом сечении.

Для определения свободных членов рассмотрим грузовое состояние (рисунок 16).



**Рисунок 16. – Грузовое состояние**

Согласно схеме нагружения грузового состояния найдем значения свободных членов как внутренние усилия от нагрузки в соответствующих сечениях:

–  $M_{G0} = -432кНм$  – изгибающий момент в нулевом сечении;

–  $Q_{G0} = 48кН$  – поперечная сила в нулевом сечении;

–  $M_{G4} = -64кНм$  – изгибающий момент в четвертом сечении.

Тогда система уравнений примет вид:

$$X_1 + 3X_3 + 6X_6 = -216;$$

$$X_1 + X_3 + X_6 = -58;$$

$$X_6 = -16.$$

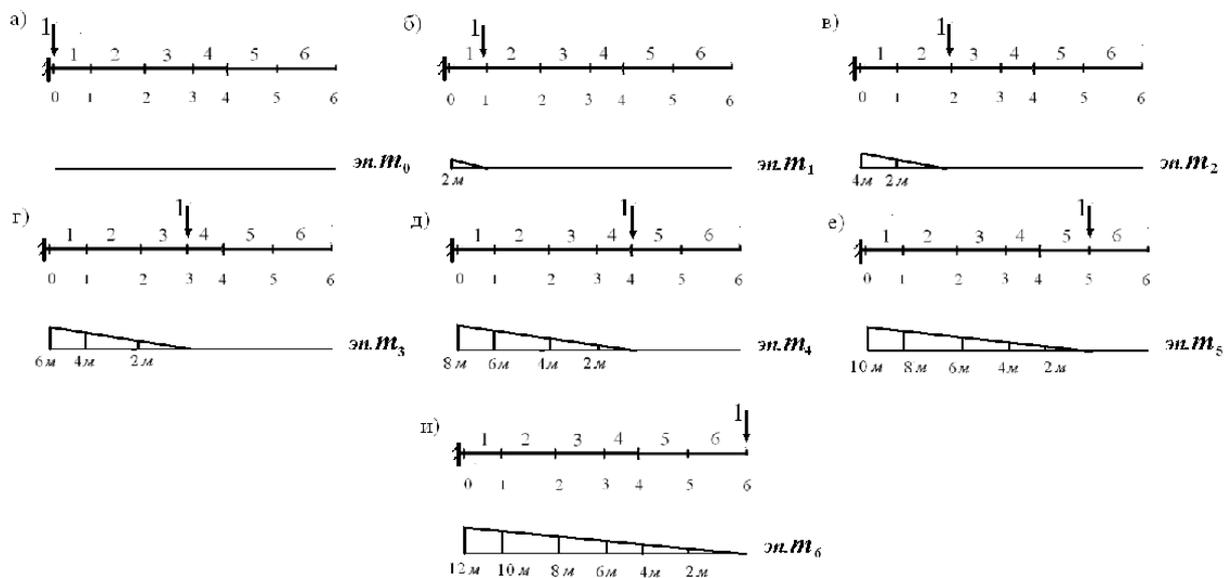
Решая систему уравнений, найдем значения опорных реакций:

$$X_1 = -3кН \quad X_3 = -39кН \quad X_6 = -16кН$$

Включаем найденные значения опорных реакций в вектор узловой нагрузки. Для этого алгебраически их сложим со значениями элементов вектора, относящимся к узлам, где приложены найденные опорные реакции. Тогда вектор узловой нагрузки эквивалентной консольной балки примет вид

$$\mathbf{G}'_9 = \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ 0 \\ -31 \\ 16 \\ 16 \\ -8 \end{pmatrix}$$

4. Формирование матрицы влияния изгибающих моментов консольной балки. Для формирования столбцов матрицы влияния рассмотрим семь единичных состояния, связанные с элементами вектора нагрузки, и построим эпюры единичных изгибающих моментов (рисунок 17).



**Рисунок 17. – К формированию матрицы влияния изгибающих моментов консольной балки**

В соответствии с числом узлов и числом расчетных сечений матрица влияния изгибающего момента консольной балки является квадратной матрицей 7 порядка. Нумерация строк и столбцов осуществляется от 0 до 6.

Согласно эпюре единичных изгибающих моментов, показанной на рисунке 17, *а*, все элементы нулевого столбца матрицы влияния изгибающих моментов нулевые

$$L_{Mi0} = 0 \quad (i = 0, \dots, 6)$$

Согласно эпюре единичных изгибающих моментов, показанной на рисунке 17, *б*, элементы первого столбца матрицы влияния изгибающих моментов принимают следующие значения

$$L_{M01} = -2m; \quad L_{Mi1} = 0 \quad (i = 1, \dots, 6)$$

Согласно эпюре единичных изгибающих моментов, показанной на рисунке 17, *в*, элементы второго столбца матрицы влияния изгибающих моментов принимают следующие значения

$$L_{M02} = -4m; \quad L_{M12} = -2m; \quad L_{Mi2} = 0 \quad (i = 2, \dots, 6)$$

Согласно эпюре единичных изгибающих моментов, показанной на рисунке 17, *г*, элементы третьего столбца матрицы влияния изгибающих моментов принимают следующие значения

$$L_{M03} = -6m; \quad L_{M13} = -4m; \quad L_{M23} = -2m; \quad L_{Mi3} = 0 \quad (i = 3, \dots, 6)$$

Согласно эпюре единичных изгибающих моментов, показанной на рисунке 17, *д*, элементы четвертого столбца матрицы влияния изгибающих моментов принимают следующие значения

$$L_{M04} = -8m; \quad L_{M14} = -6m; \quad L_{M24} = -4m; \quad L_{M34} = -2m; \quad L_{Mi4} = 0 \quad (i = 3, \dots, 6)$$

Согласно эпюре единичных изгибающих моментов, показанной на рисунке 17, *е*, элементы пятого столбца матрицы влияния изгибающих моментов принимают следующие значения

$$L_{M05} = -10m; \quad L_{M15} = -8m; \quad L_{M25} = -6m; \\ L_{M35} = -4m; \quad L_{M45} = -2m; \quad L_{Mi5} = 0 \quad (i = 5, 6)$$

Согласно эпюре единичных изгибающих моментов, показанной на рисунке 17, *и*, элементы шестого столбца матрицы влияния изгибающих моментов принимают следующие значения

$$L_{M06} = -12m; \quad L_{M16} = -10m; \quad L_{M26} = -8m; \quad L_{M36} = -6m; \\ L_{M46} = -4m; \quad L_{M56} = -2m; \quad L_{M66} = 0$$

С учетом полученных значений элементов столбцов, матрица влияния изгибающих моментов консольной балки имеет вид

$$L_M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 & -6 & -8 & -10 & -12 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -6 & -8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & -6 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда, умножая полученную матрицу влияния на вектор узловой нагрузки консольной балки

$$\bar{M} = L_M \bar{G}'$$

получим вектор изгибающих моментов

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ -34 \\ -48 \\ 0 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и построим эпюру изгибающих моментов заданной МШБ (рисунок 18).

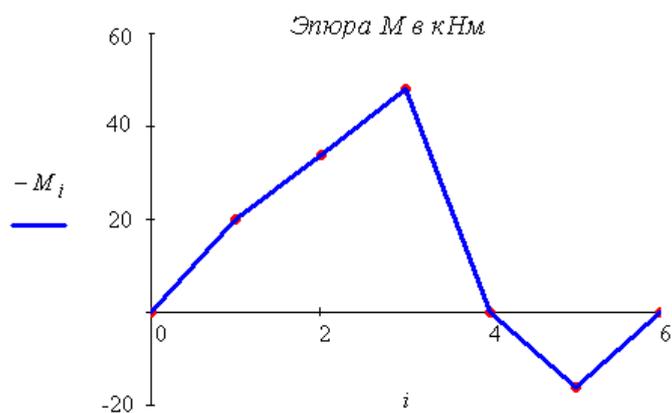


Рисунок 18. – Эпюра изгибающих моментов МШБ

Получение вектора изгибающих моментов и построение эпюры изгибающих моментов заданной МШБ выполнены в математическом пакете MathCAD. Краткие справочные сведения о вычислениях в этом пакете приведены в приложении 5. Листинг программы полного расчета заданной МШБ в математическом пакете MathCAD приводится в приложении 6.

### 2.3 Задачи по определению внутренних усилий в статически определимых рамах с использованием аналитической формы

При определении внутренних усилий в статически определимых рамах используется вторая разновидность статического метода.

Определение внутренних усилий производится по участкам. На каждом участке последовательно применяется метод сечений. Для получения аналитических выражений, описывающих законы изменения внутренних усилий в пределах участка, внешние силы мысленно отбрасываемой части приводятся к центру тяжести поперечного сечения оставшейся части. Рекомендуется отбрасывать ту часть, к которой приложено меньше внешних сил. Участком считается любая часть рамы, на протяжении которой не изменяются аналитические выражения внутренних усилий.

По полученным аналитическим выражениям вычисляются значения внутренних усилий для ряда сечений. При определении внутренних усилий используются следующие правила знаков.

Для различения моментов противоположных направлений вводится правило «отмеченного» волокна. Его суть заключается в том, что для каждого участка рамы произвольно выбирается волокно, при растяжении которого момент условно считается положительным. В пределах каждого участка такие волокна отмечаются пунктирной линией. В сопротивлении материалов при изгибе балок «отмеченным» волокном считается нижнее волокно.

Правила знаков для поперечной и продольной сил совпадают с правилами, принятыми в сопротивлении материалов при определении этих усилий в отдельном стержне.

При построении эпюр внутренних усилий руководствуются следующими правилами:

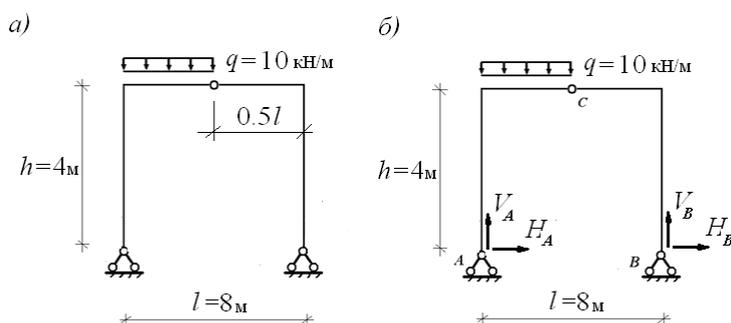
- эпюра моментов строится со стороны растянутых волокон, и знаки на участках эпюры не ставятся;
- эпюры поперечных и продольных сил можно строить со стороны любых волокон, и знаки на участках эпюр ставятся обязательно;
- ординаты на эпюрах внутренних усилий откладываются по нормали к оси элементов рамы.

Правильность построения эпюр осуществляется проверкой равновесия узлов и стержней рамы.

Для проведения первой проверки каждый узел мысленно вырезается сквозным сечением, проходящим бесконечно близко от центра узла. Рассматривая узел под действием приложенных внешних сосредоточенных сил, моментов и действующих в примыкающих к узлу сечениях внутренних усилиях, проверяют соблюдение трех уравнений равновесия: уравнения моментов относительно центра узла и двух уравнений проекций на ортогональные оси с началом в центре узла.

Для проверки равновесия стержней каждый стержень системы вырезается двумя сечениями, проходящими бесконечно близко от центров соответствующих узлов. Прикладывая к стержню заданную нагрузку и действующие в концевых сечениях внутренние усилия, проверяют соблюдение трех уравнений равновесия: двух уравнений моментов относительно центров тяжести концевых сечений и уравнения проекций на ось стержня.

**Пример 3.** Для рамы, показанной на рисунке 19, а, требуется определить статическим методом внутренние усилия  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  и построить их эпюры.



**Рисунок 19. – Схема составляющих опорных реакций рамы**

Зададим первоначальную схему составляющих опорных реакций рамы (рисунок 19, б). Для определения вертикальной составляющей  $V_A$  составим уравнение моментов относительно опоры  $B$  для рамы в целом

$$\sum M_B = 0; \quad V_A \cdot l - q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{3}{4}l = 0,$$

решая которое, найдем значение  $V_A$ :

$$V_A = \frac{3}{8} \cdot q \cdot l = \frac{3}{8} \cdot 10 \cdot 8 = 30 \text{ кН}.$$

Для определения вертикальной составляющей  $V_B$  составим уравнение моментов относительно опоры  $A$  для рамы в целом

$$\sum M_A = 0; \quad -Y_B \cdot l + \frac{q \cdot l}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot l = 0$$

решая которое найдем значение  $V_B$

$$V_B = \frac{1}{8} \cdot q \cdot l = \frac{1}{8} \cdot 10 \cdot 8 = 10 \text{ кН}$$

Для определения горизонтальной составляющей  $H_A$  составим уравнение моментов сил относительно точки  $C$  для левой части рамы

$$\sum M_C^{л.ч.} = 0; \quad -H_A \cdot h + V_A \cdot \frac{1}{2}l - q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{4}l = 0,$$

решая которое, найдем значение  $H_A$ :

$$H_A = \frac{1}{2} \cdot \frac{V_A \cdot l}{h} - \frac{1}{8} \cdot \frac{q \cdot l^2}{h} = \frac{1}{2} \cdot \frac{30 \cdot 8}{4} - \frac{1}{8} \cdot \frac{10 \cdot 8^2}{4} = 10 \text{ кН.}$$

Для определения горизонтальной составляющей  $H_B$  составим уравнение моментов сил относительно точки  $C$  для правой части рамы

$$\sum M_C^{п.ч.} = 0; \quad H_B \cdot h - V_B \cdot \frac{1}{2}l = 0,$$

решая которое, найдем значение  $H_B$ :

$$H_B = \frac{1}{2} \cdot \frac{V_B \cdot l}{h} = 10 \text{ кН.}$$

Для проверки правильности найденных составляющих опорных реакций составим для рамы в целом уравнение проекций сил на вертикальную ось

$$\sum y = 0; \quad V_A - \frac{ql}{2} + V_B = 30 - 40 + 10 = 0$$

и на горизонтальную ось

$$\sum x = 0; \quad H_A - H_B = 10 - 10 = 0.$$

Из приведенных уравнений видно, что опорные реакции рамы найдены верно.

Переходим к определению внутренних усилий рамы. Для их определения будем использовать вторую разновидность статического метода. Для рассматриваемой рамы можно выделить 4 участка для определения внутренних усилий –  $AM$ ,  $MC$ ,  $CN$ ,  $NB$  (рисунок 20, а).

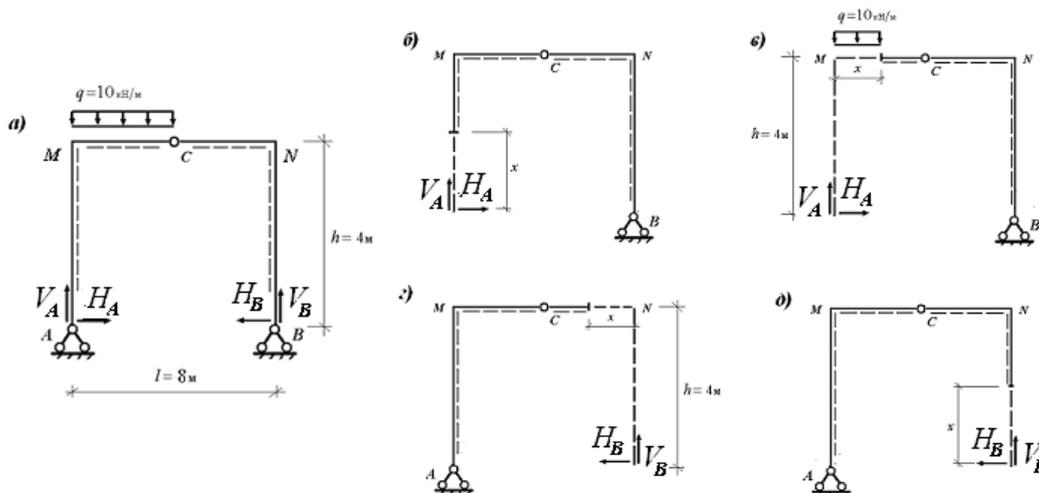


Рисунок 20. – К определению внутренних усилий рамы

Пунктирной линией на рисунке 20 обозначены «отмеченные» волокна каждого участка рамы.

Рассмотрим участок  $AM$ , разрежем его в произвольном сечении на две части и выберем в качестве отделенной нижнюю часть рамы (рисунок 20, б). Переменная  $x$ , определяющая положение сечения на участке, может изменяться в следующем интервале:  $0 \leq x \leq 4$  м. Приводя внешние силы отделенной части к центру тяжести поперечного сечения другой части рамы, получим следующие аналитические выражения для внутренних усилий участка  $AM$ :

$$M = -H_A x = -10x;$$

$$Q = -H_A = -10кН;$$

$$N = -V_A = -30кН.$$

Из полученного выражения для изгибающего момента следует, что на участке  $AM$  изменение его величины описывается линейной функцией, которая на границах участка принимает следующие значения

$$x = 0; \quad M = 0;$$

$$x = 4м; \quad M = -10 \cdot 4 = -40кНм,$$

и, следовательно, на участке  $AM$  растянуты наружные волокна.

Из полученных выражений для поперечной и продольной сил следует, что эти силы отрицательны, а их величины постоянны по длине участка  $AM$ .

Рассмотрим участок  $MC$ , разрежем его в произвольном сечении на две части и выберем в качестве отделенной левую часть рамы (рису-

нок 20, в). Переменная  $x$ , определяющая положение сечения на участке, может изменяться в следующем интервале:  $0 \leq x \leq 4$  м.

Приводя внешние силы отделенной части к центру тяжести поперечного сечения другой части рамы, получим следующие аналитические выражения для внутренних усилий участка  $MC$ :

$$M = -H_A h + V_A x - \frac{qx^2}{2} = -40 + 30x - 5x^2;$$

$$Q = V_A - qx = 30 - 10x;$$

$$N = -H_A = -10 \text{ кН}.$$

Из полученного выражения для изгибающего момента следует, что на участке  $MC$  изменение его величины описывается нелинейной функцией и поэтому требуется проверка на существование у нее точек экстремума. Для этого, в соответствии с дифференциальной зависимостью между поперечной силой и изгибающим моментом, нужно выяснить, при каком значении  $x$  поперечная сила принимает нулевые значения. Приравняв нулю, выражение для поперечной силы найдем, что это возможно при значении

$$x = 3 \text{ м}$$

И поскольку полученное значение  $x$  принадлежит интервалу своего изменения, то ему соответствует экстремальное значение изгибающего момента.

Таким образом, изгибающий момент на участке  $MC$  принимает следующие характерные значения

$$x = 0; \quad M = -40 \text{ кНм};$$

$$x = 3 \text{ м}; \quad M = -40 + 30 \cdot 3 - 5 \cdot 3^2 = 5 \text{ кНм};$$

$$x = 4 \text{ м}; \quad M = -40 + 30 \cdot 4 - 5 \cdot 4^2 = 0.$$

и, следовательно, на одной части участка растянуты наружные волокна, а на другой – внутренние.

Из полученного выражения для поперечной силы следует, что на участке  $MC$  изменение ее величины описывается линейной функцией, которая на границах участка принимает следующие значения:

$$x = 0; \quad Q = 30 \text{ кН};$$

$$x = 4 \text{ м}; \quad Q = 30 - 10 \cdot 4 = -10 \text{ кН}.$$

А из полученного выражения для продольной силы следует, что эта сила отрицательна, а ее величина постоянна по длине участка.

Рассмотрим участок  $CN$ , рассечем его в произвольном сечении на две части и выберем в качестве отделенной правую часть рамы (рису-

нок 20, з). Переменная  $x$ , определяющая положение сечения на участке, может изменяться в следующем интервале:  $0 \leq x \leq 4$  м.

Приводя внешние силы отделенной части к центру тяжести поперечного сечения другой части рамы, получим следующие аналитические выражения для внутренних усилий участка  $CN$ :

$$M = -H_B h + V_B x = -40 + 10x;$$

$$Q = -V_B = -10 \text{ кН};$$

$$N = -H_B = -10 \text{ кН}.$$

Из полученного выражения для изгибающего момента следует, что на участке  $CN$  изменение его величины описывается линейной функцией, которая на границах участка принимает следующие значения

$$x = 0; \quad M = -40 \text{ кНм};$$

$$x = 4 \text{ м}; \quad M = -40 + 10 \cdot 4 = 0$$

и, следовательно, на участке  $CN$  растянуты наружные волокна.

Из полученных выражений для поперечной и продольной сил следует, что эти силы отрицательны, а их величины постоянны по длине участка  $CN$ .

Рассмотрим участок  $NB$ , рассечем его в произвольном сечении на две части и выберем в качестве отделенной нижнюю часть рамы (рисунок 20, д). Переменная  $x$ , определяющая положение сечения на участке, может изменяться в следующем интервале:  $0 \leq x \leq 4$  м.

Приводя внешние силы отделенной части к центру тяжести поперечного сечения другой части рамы, получим следующие аналитические выражения для внутренних усилий участка  $NB$

$$M = -H_B x = -10x;$$

$$Q = H_B = 10 \text{ кН};$$

$$N = -V_B = -10 \text{ кН}.$$

Из полученного выражения для изгибающего момента следует, что на участке  $NB$  изменение его величины описывается линейной функцией, которая на границах участка принимает следующие значения

$$x = 0; \quad M = 0;$$

$$x = 4 \text{ м}; \quad M = -40 \text{ кНм}.$$

и, следовательно, на участке  $NB$  растянуты наружные волокна.

Из полученных выражений для поперечной и продольной сил следует, что поперечная сила положительна, а продольная сила отрицательна. Величины обеих сил постоянны по длине участка  $NB$ .

Эпюры внутренних усилий рамы, построенные согласно полученным аналитическим выражениям для  $M$ ,  $Q$  и  $N$  на каждом участке, приведены на рисунке 21.

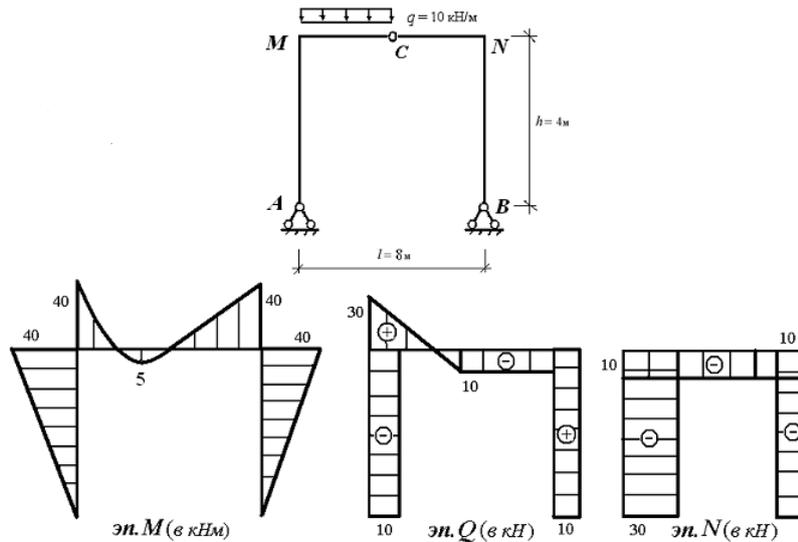


Рисунок 21. – Эпюры внутренних усилий рамы

Для проверки правильности построения эпюр проверим равновесие узлов и стержней рамы. Вырезанные узлы рамы, с приложенными к ним внешними силами и внутренними усилиями, показаны на рисунке 22.

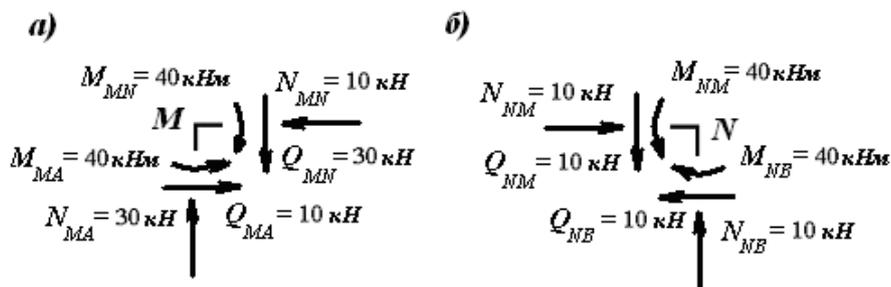


Рисунок 22. – К проверке равновесия узлов рамы

Проверочные уравнения равновесия узла  $M$  (рисунок 22,  $a$ ) имеют вид

$$\begin{aligned} \sum M_M &= 0; \quad M_{MN} - M_{MA} = 40 - 40 = 0; \\ \sum y &= 0; \quad N_{MA} - Q_{MN} = 30 - 30 = 0; \\ \sum x &= 0; \quad Q_{MA} - N_{MN} = 10 - 10 = 0. \end{aligned}$$

Проверочные уравнения равновесия узла  $N$  (рисунок 22, б) имеют вид

$$\sum M_N = 0; \quad M_{NB} - M_{NM} = 40 - 40 = 0;$$

$$\sum y = 0; \quad N_{NB} - Q_{NM} = 10 - 10 = 0;$$

$$\sum x = 0; \quad N_{NM} - Q_{NB} = 10 - 10 = 0.$$

Таким образом, узлы рамы находятся в равновесии.

Вырезанные стержни рамы, с приложенными к ним внешними силами и внутренними усилиями, показаны на рисунке 23.

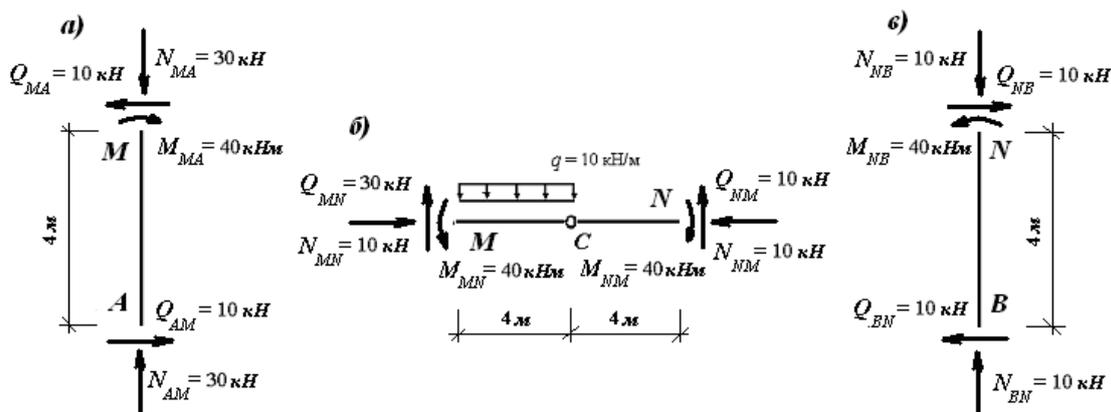


Рисунок 23. – К проверке равновесия стержневой рамы

Проверочные уравнения равновесия стержня  $AM$  (рисунок 23, а) имеют вид

$$\sum M_M = 0; \quad M_{MA} - Q_{AM} \cdot 4 = 40 - 10 \cdot 4 = 40 - 40 = 0;$$

$$\sum M_A = 0; \quad M_{MA} - Q_{MA} \cdot 4 = 40 - 10 \cdot 4 = 40 - 40 = 0;$$

$$\sum y = 0; \quad N_{AM} - N_{MA} = 30 - 30 = 0.$$

Проверочные уравнения равновесия стержня  $MN$  (рисунок 23, б) имеют вид

$$\begin{aligned} \sum M_N = 0; \quad & - M_{MN} + Q_{MN} \cdot 8 - q \cdot 4 \cdot 6 + M_{NM} = \\ & - 40 + 30 \cdot 8 - 10 \cdot 4 \cdot 6 + 40 = 280 - 280 = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_M = 0; \quad & M_{NM} - Q_{NM} \cdot 8 + q \cdot 4 \cdot 2 - M_{MN} = \\ & 40 - 10 \cdot 8 + 10 \cdot 4 \cdot 2 - 40 = 120 - 120 = 0; \end{aligned}$$

$$\sum x = 0; \quad N_{MN} - N_{NM} = 10 - 10 = 0.$$

Проверочные уравнения равновесия стержня  $BN$  (рисунок 23, в) имеют вид

$$\sum M_B = 0; \quad -M_{NB} + Q_{NB} \cdot 4 = -40 + 10 \cdot 4 = -40 + 40 = 0;$$

$$\sum M_N = 0; \quad Q_{BN} \cdot 4 - M_{NB} = 10 \cdot 4 - 40 = 40 - 40 = 0;$$

$$\sum y = 0; \quad N_{BN} - N_{NB} = 10 - 10 = 0.$$

Таким образом, стержни рамы также находятся в равновесии.

Следовательно, эпюры внутренних усилий для заданной рамы построены правильно.

## 2.4 Иллюстрация применения ПВК SCAD для определения внутренних усилий в статически определимых рамах

В настоящее время при проектировании стержневых конструкций (рамы, фермы и др.) в проектных организациях их расчеты, как правило, выполняются на персональных компьютерах с помощью проектно-вычислительных комплексов (ПВК). Одним из наиболее популярных комплексов является ПВК SCAD (*Structure construction automatic design*). Расчет стержневых конструкций в ПВК SCAD основан на понятии линейно-деформируемой системы и алгоритме решения задачи методом конечных элементов (МКЭ).

Расчет стержневой конструкции с помощью ПВК SCAD включает следующие основные этапы:

1. Создание расчетной схемы.
2. Загружение расчетной схемы.
3. Выполнение линейного расчета.

Приведенный ниже пример 4 иллюстрирует результаты, полученные на каждом из этапов расчета рамы, рассмотренной ранее в примере 3, с помощью ПВК SCAD. Краткие справочные сведения о применении ПВК SCAD для расчета плоских стержневых конструкций приведены в приложении 7.

**Пример 4.** Схема рамы с заданной нагрузкой показана на рисунке 19, а. Рама железобетонная, бетон класса В30 (С25/30). Сечения всех стержней прямоугольные с размерами 200×400 мм.

## 1. Создание расчетной схемы (рисунок 24).

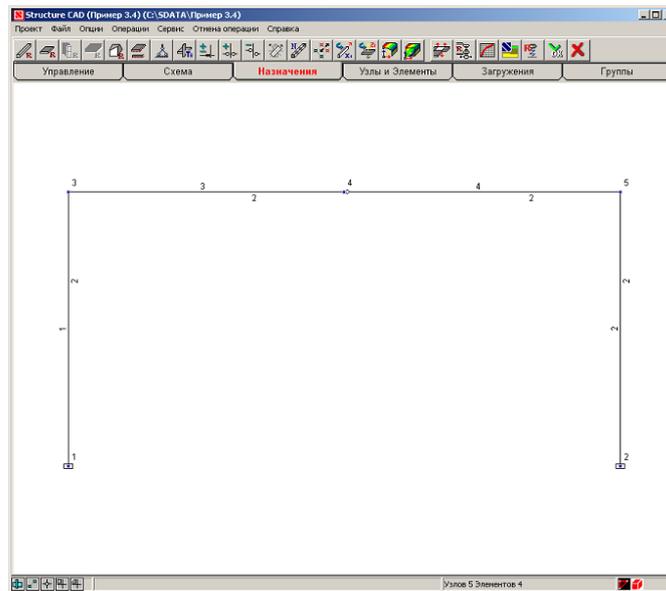


Рисунок 24. – К созданию расчетной схемы рамы

## 2. Загрузка расчетной схемы рамы (рисунок 25).

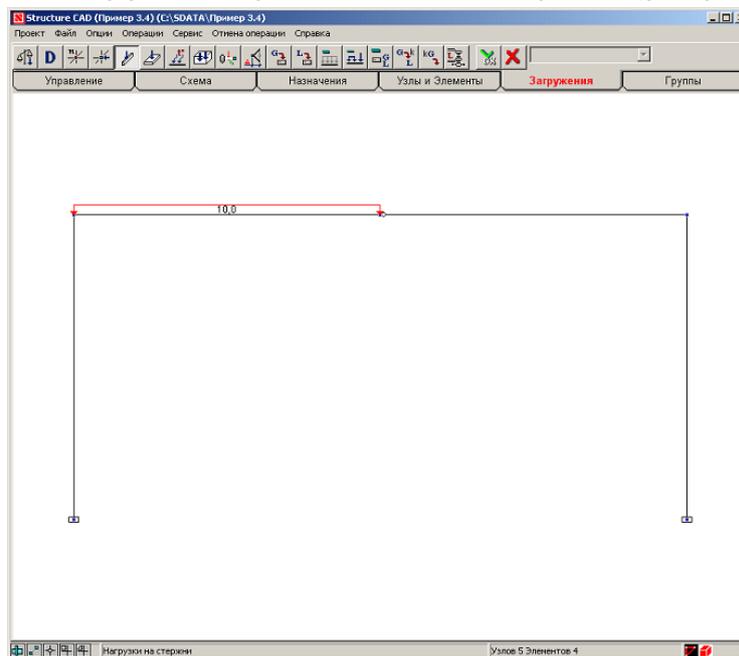


Рисунок 25. – К загрузке расчетной схемы рамы

3. Графические результаты выполненного расчета:  
– эпюра изгибающих моментов (рисунок 26).

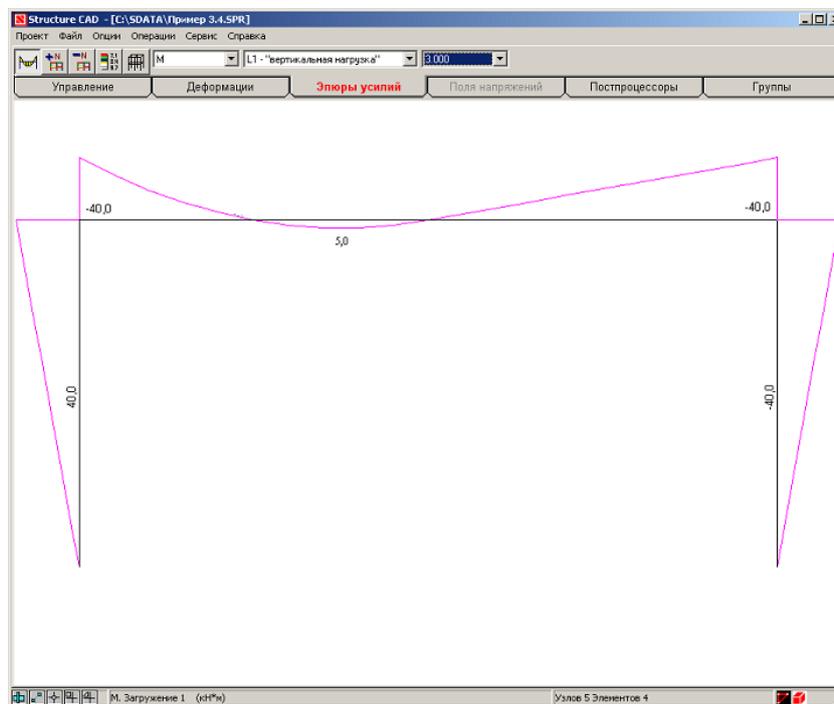


Рисунок 26. – К эпюре изгибающих моментов

- эпюра поперечных сил (рисунок 27).

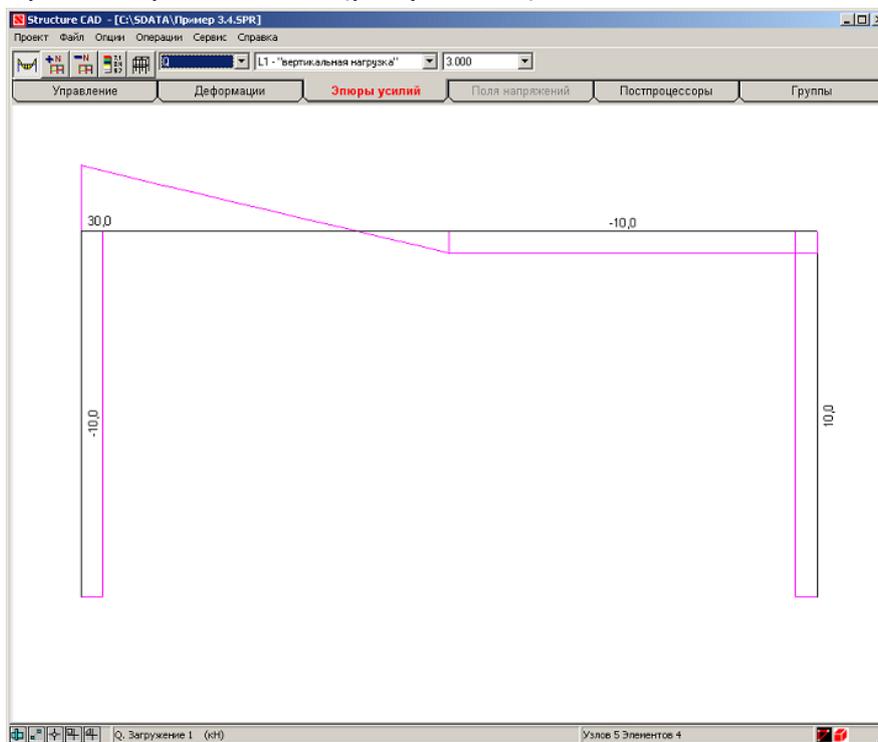
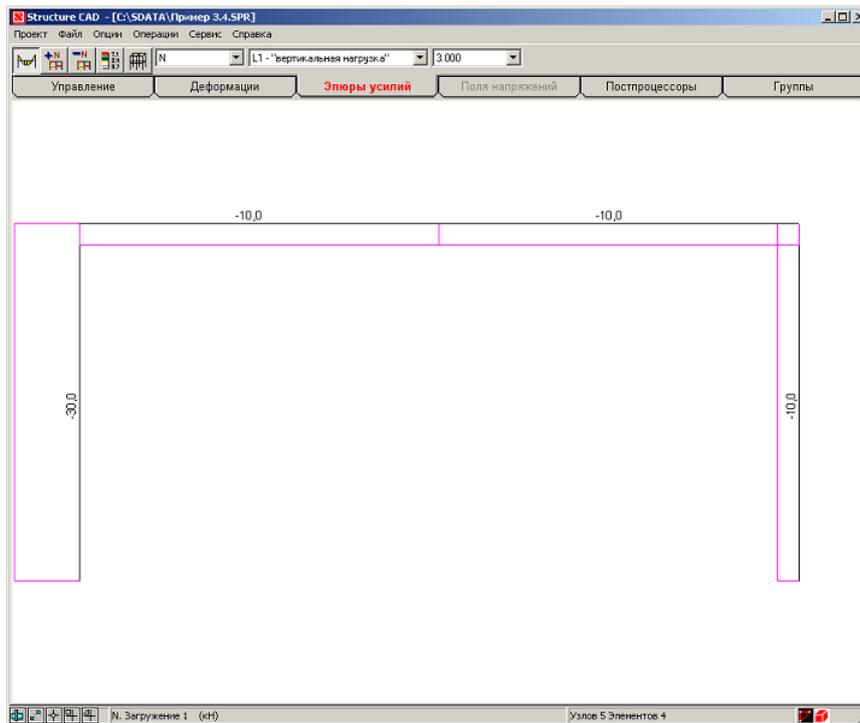


Рисунок 27. – К эпюре поперечных сил

– эпюра продольных сил (рисунок 28).



**Рисунок 28. К эпюре продольных сил**

Построенные эпюры внутренних усилий рамы, рассчитанной с помощью ПК SCAD, совпадают с эпюрами этой рамы, рассчитанной ранее статическим методом (рисунок 21).

### **3. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ И УМЕНИЙ**

При изучении строительной механики важную роль играет адекватная самостоятельная оценка приобретенных знаний и умений. Наиболее рационально это можно осуществлять с помощью самотестирования. Для его проведения в пособии содержатся:

- тестовые задания первого уровня, позволяющие проверить понимание и усвоение основных понятий, принципов, терминов изученного модуля;

- тестовые задания второго уровня, позволяющие проверить умение решать типовые задачи модуля;

- тестовые задания третьего уровня, позволяющие проверить умение решать нетиповые задачи модуля;

В представленных тестовых заданиях первого и второго уровня использованы следующие их виды:

- задания закрытой формы;

- задания на установление соответствия;

- задания на установление правильной последовательности;

- задания открытой формы.

В тестовых заданиях закрытой формы необходимо выбрать правильный ответ из представленных вариантов ответов. Возможны две разновидности таких заданий: с выбором одного правильного ответа, с выбором нескольких правильных ответов.

В тестовых заданиях на установление соответствия нужно указать связь между элементами двух столбцов – задающего столбца и столбца выбора. Элементы задающего столбца располагаются слева, а элементы столбца выбора – справа. Правый столбец содержит элементов больше, чем левый, и все эти элементы являются истинными высказываниями.

В тестовых заданиях на установление последовательности нужно восстановить правильную последовательность некоторых действий, приведенных произвольным образом.

В тестовых заданиях открытой формы требуется дописать правильный ответ, связанный с определением, понятием или принципом.

В представленных тестовых заданиях третьего уровня необходимо показать умение решать нестандартные задачи, связанные с расчетом плоских статически определимых балок и рам.

### **3.1 Тестовые задания первого уровня**

**1.1. Укажите последовательность действий при применении метода сечений.**

1. Заменить.
2. Уравновесить.
3. Отбросить.
4. Разрезать.

**1.2. Укажите, что относится к дифференциальным характеристикам внутренних сил стержневой конструкции.**

1. Изгибающий момент.
2. Полное напряжение.
3. Продольная сила.
4. Касательное напряжение.
5. Нормальное напряжение.
6. Поперечная сила.

**1.3. Укажите, что относится к интегральным характеристикам внутренних сил стержневой конструкции.**

1. Изгибающий момент.
2. Полное напряжение.
3. Продольная сила.
4. Касательное напряжение.
5. Нормальное напряжение.
6. Поперечная сила.

**1.4. Укажите, что собой характеризует поперечная сила?**

1. Это проекция главного вектора внутренних сил на ось стержня при их приведении к центру тяжести поперечного сечения.

2. Это проекция главного вектора внутренних сил на плоскость поперечного сечения стержня при их приведении к центру тяжести поперечного сечения.

**1.5. Укажите, что собой характеризует продольная сила?**

1. Это проекция главного вектора внутренних сил на ось стержня при их приведении к центру тяжести поперечного сечения.

2. Это проекция главного вектора внутренних сил на плоскость поперечного сечения стержня при их приведении к центру тяжести поперечного сечения.

**1.6. Дополните, как формулируется свойство статически определимых конструкций, связанное с заменой приложенной нагрузки на эквивалентную?**

Замена нагрузки, приложенной к

**1.7. Дополните, как формулируется свойство статически определимых конструкций, связанное с возникающими в них опорными реакциями и внутренними усилиями?**

Каждой нагрузке, приложенной

**1.8. Дополните, как формулируется свойство, связанное с внутренними усилиями, возникающими в элементах составных статически определимых конструкций?**

Нагрузка, приложенная

**1.9. Дополните, как формулируется свойство статически определимых конструкций, связанное с действием на неё уравновешенной нагрузки?**

Уравновешенная нагрузка, приложенная

**1.10. Дополните, как формулируется свойство, связанное с температурным воздействием на статически определимые конструкции?**

В статически определимых стержневых конструкциях

**1.11. Дополните, как формулируется свойство, связанное с кинематическим воздействием на статически определимые конструкции?**

В статически определимых стержневых конструкциях

**1.12. Дополните, как формулируется свойство, связанное с неточностями изготовления элементов статически определимых конструкций?**

В статически определимых стержневых конструкциях

**1.13. Укажите, на чём основан статический метод определения внутренних усилий в статически определимых конструкциях?**

1. Принцип возможных перемещений.
2. Метод сечений.
3. Замена заданной составной конструкции эквивалентной простой.
4. Уравнения равновесия конструкции.
5. Уравнение работ сил конструкции.

**1.14. Дополните, на чем основана первая разновидность статического метода определения внутренних усилий в статически определимых конструкциях?**

Первая разновидность основана

**1.15. Дополните, на чем основана вторая разновидность статического метода определения внутренних усилий в статически определимых конструкциях?**

Вторая разновидность основана

**1.16. Сформулируйте, в чем заключается суть третьей разновидности статического метода определения внутренних усилий в статически определимых конструкциях?**

Третья разновидность носит

**1.17. Укажите, на чем основан кинематический метод определения внутренних усилий в статически определимых конструкциях?**

1. Принцип возможных перемещений.
2. Метод сечений.
3. Замена заданной составной конструкции эквивалентной простой.
4. Уравнения равновесия конструкции.
5. Уравнение работ сил конструкции.

**1.18. Укажите, на чём основано определение внутренних усилий в статически определимых конструкциях методом замены связей?**

1. Принцип возможных перемещений.
2. Метод сечений.
3. Замена заданной составной конструкции эквивалентной простой.
4. Уравнения равновесия конструкции.
5. Уравнение работ сил конструкции.

**1.19. Дополните, в чём заключается дискретизация расчетной схемы стержневой конструкции?**

Дискретизация расчетной схемы стержневой конструкции

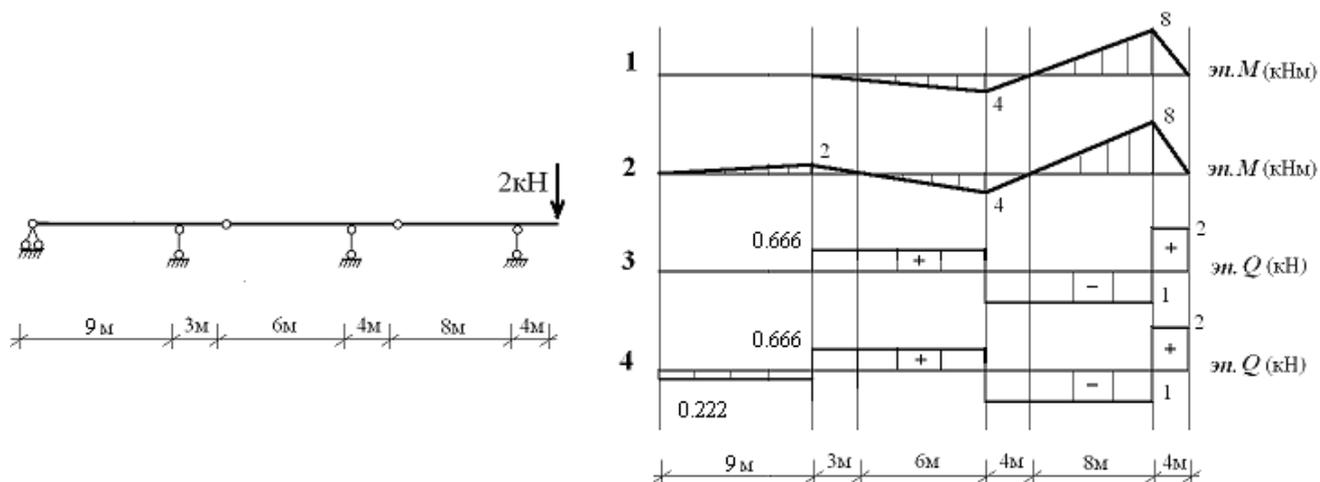
**1.20. Дополните, в чём заключается дискретизация нагрузки стержневой конструкции?**

Дискретизация нагрузки стержневой конструкции

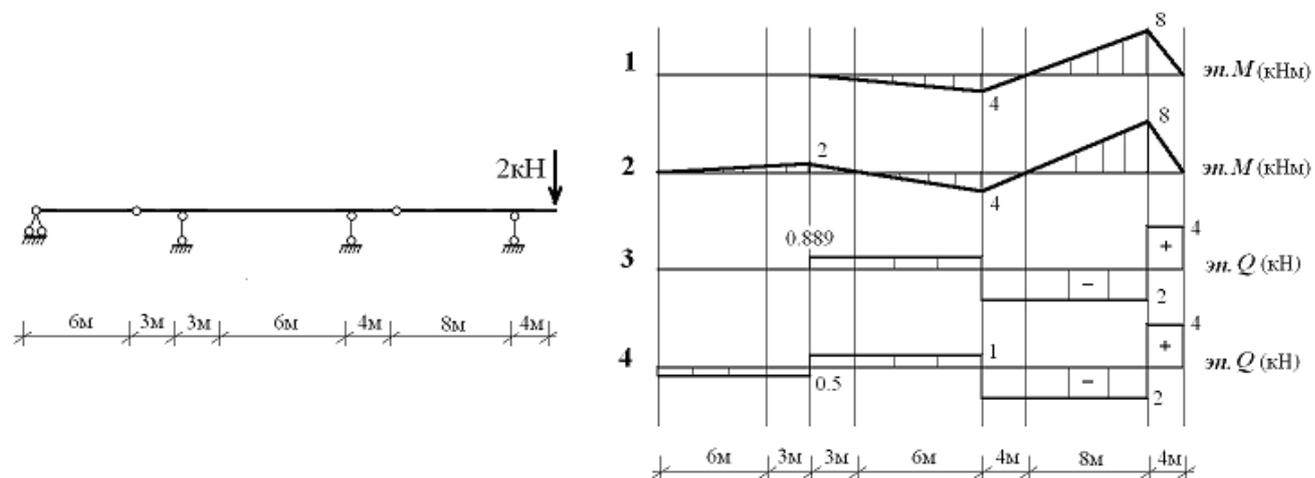
### 3.2. Тестовые задания второго уровня

#### 2.1. Установите соответствие между схемами нагружения МШБ и соответствующим им эпюрами внутренних усилий.

##### 2.1.1

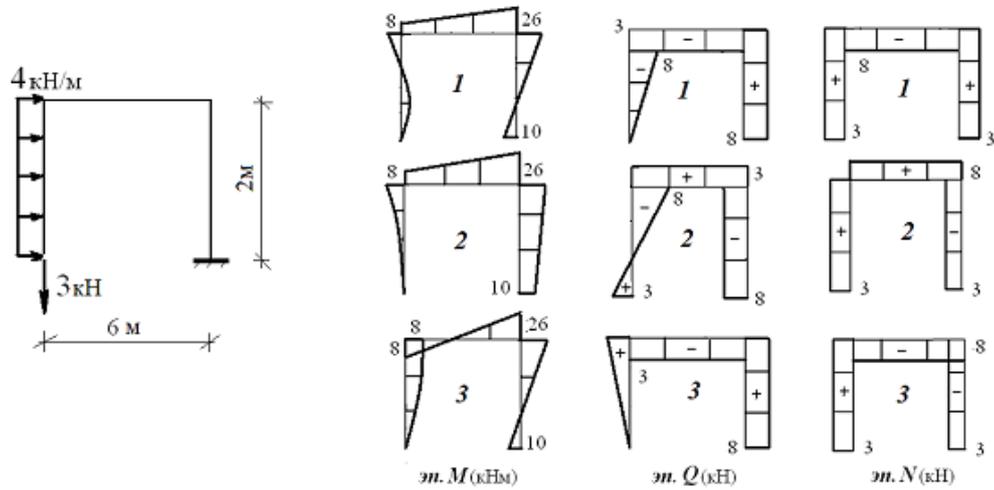


##### 2.1.2

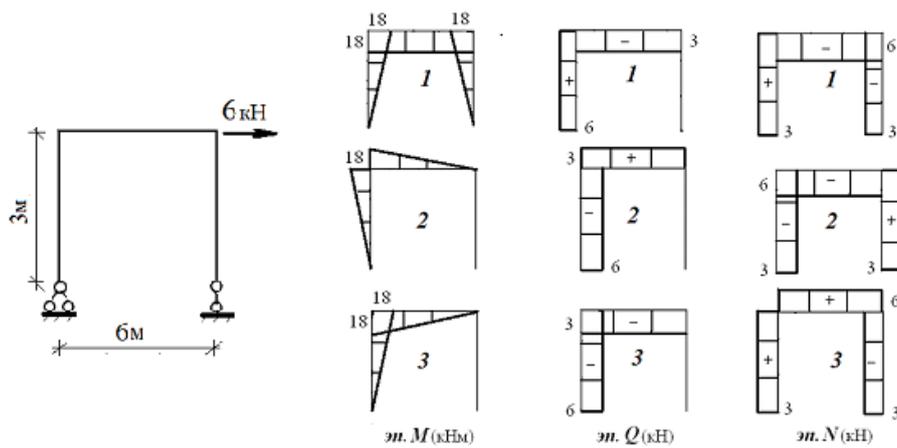


**2.2. Установите соответствие между схемами нагружения рам и соответствующим им эпюрами внутренних усилий**

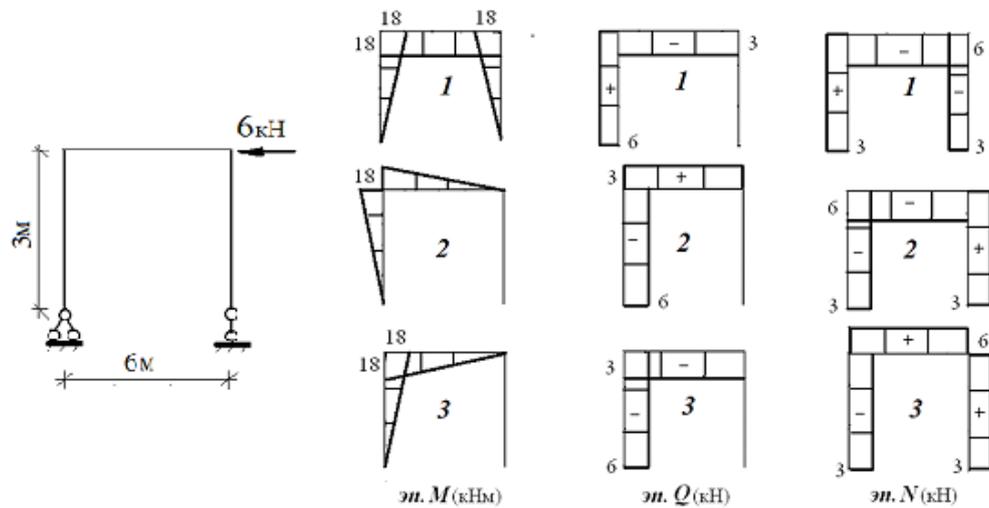
2.2.1



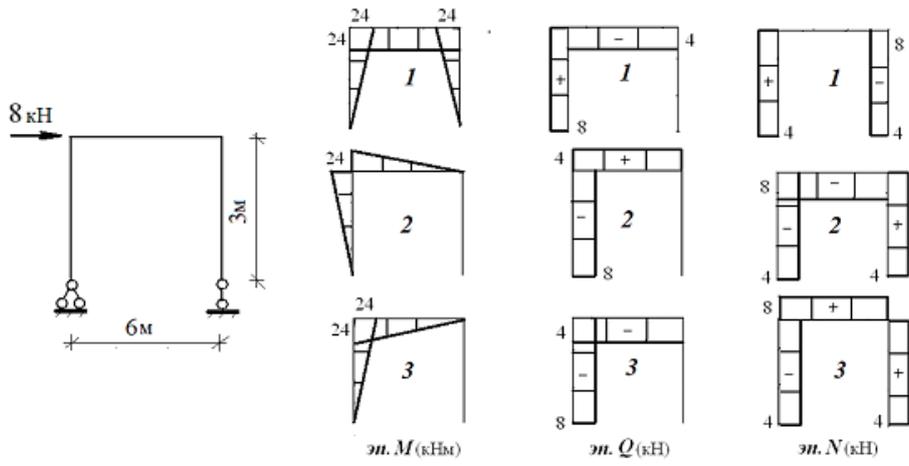
2.2.2



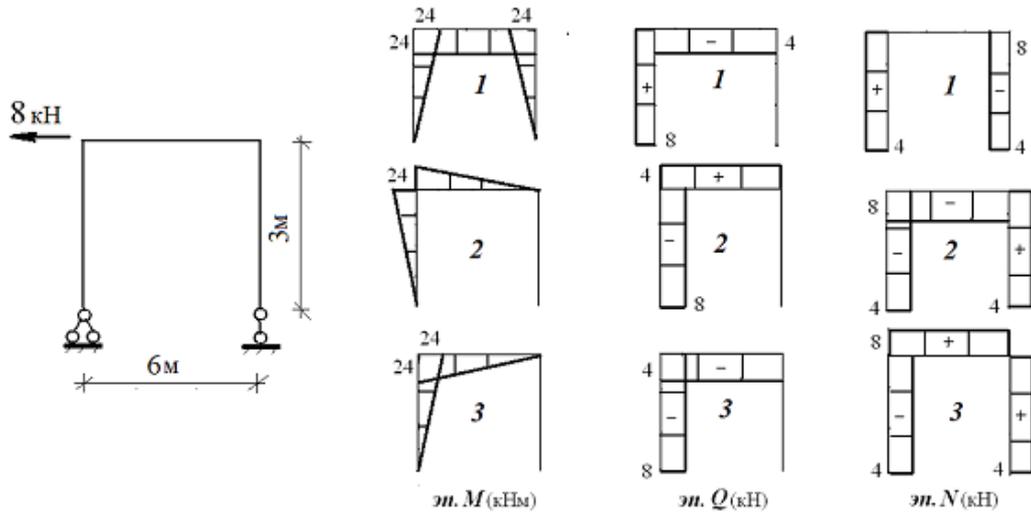
2.2.3



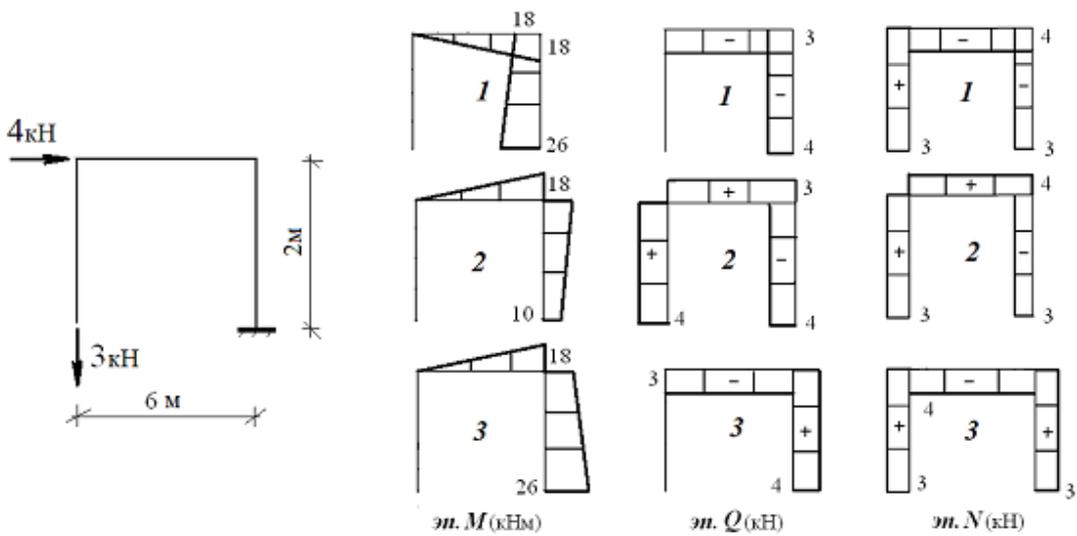
2.2.4



2.2.5



2.2.6



### 3.3. Тестовые задания третьего уровня

3.1. На рисунке 29 определите положение промежуточной опоры  $B$  и шарниров  $D$  и  $E$ , при которых максимальные пролетные и опорные моменты будут равны по модулю.

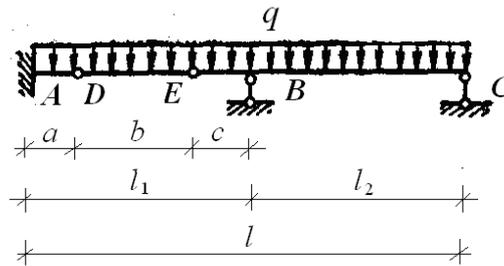


Рисунок 29. – Схема опоры и шарниров

3.2. Подобрать длины консолей и расстояния между шарнирами при условии, чтобы наибольшие моменты в пролетах и все опорные моменты были равны между собой (рисунок 30).

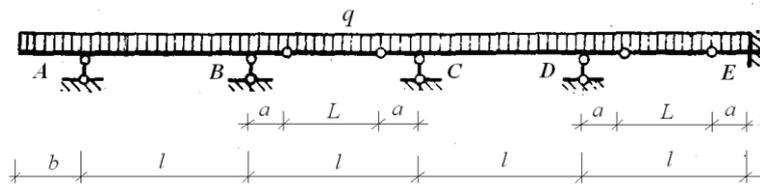


Рисунок 30. – Двухконсольная балка

3.4. На балку действует уравновешенная нагрузка. Задано качественное очертание эпюры  $M$ . Известно, что на участке  $GH$  она очерчена квадратной параболой. Изобразить схему нагружения балки и качественное очертание эпюры  $Q$  (рисунок 31).

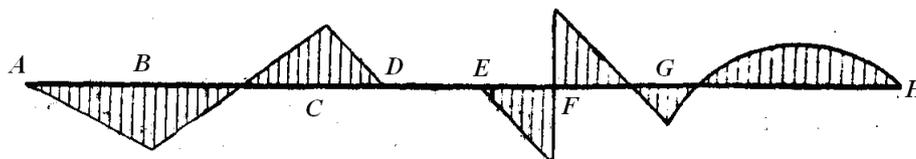


Рисунок 31. – Эпюра балки

3.4. По заданному качественному очертанию эпюры  $Q$  (рисунок 32) изобразить возможный вариант схемы балки с нагрузкой и соответствующее качественное очертание эпюры  $M$ .

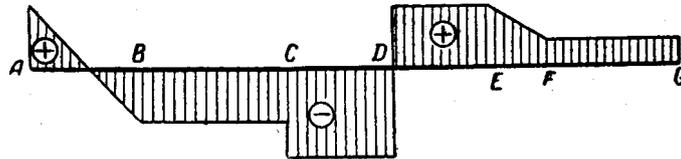
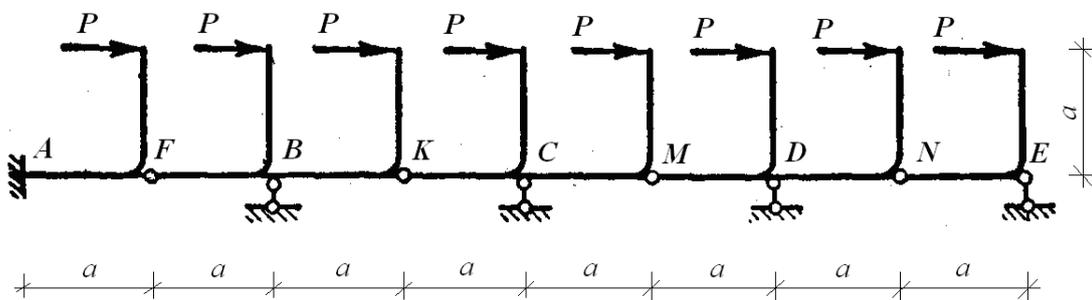


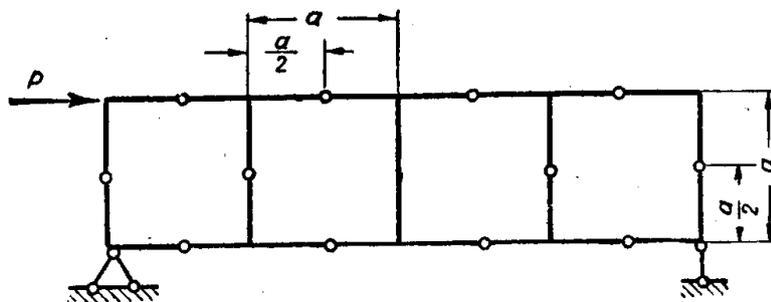
Рисунок 32. – Очертание эпюры  $Q$

3.5. Постройте эпюры  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ .

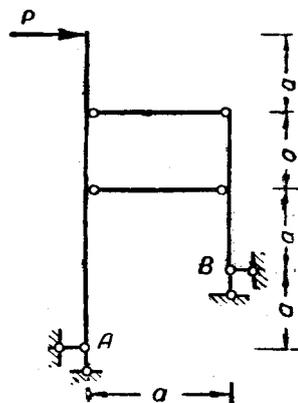
3.5.1



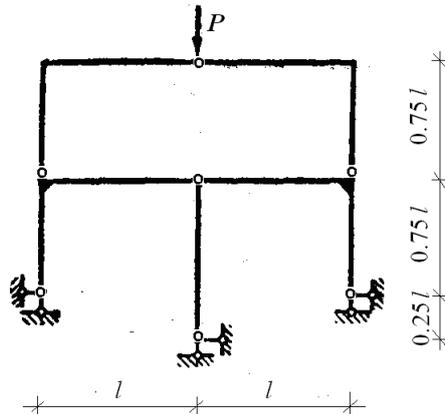
3.5.2



3.5.3.



3.5.4



**3.4. Ответы на тестовые задания первого и второго уровней**

**1.1.** – 4, 3, 1, 2.

**1.2.** – 2, 4, 5.

**1.3.** – 1, 3, 6.

**1.4.** – 2.

**1.5.** – 1.

**1.6.**

Замена нагрузки, приложенной к некоторой геометрически неизменяемой части конструкции, эквивалентной нагрузкой не изменяет внутренних усилий в остальных частях конструкции
---

**1.7.**

Каждой нагрузке, приложенной конструкции, соответствует единственная система значений опорных реакций и внутренних усилий этой конструкции
--

**1.8.**

Нагрузка, приложенная к основному элементу составной конструкции вызывает внутренние усилия только в этом элементе, а нагрузка, приложенная к дополнительному элементу, вызывает внутренние усилия, как в нем, так и в элементах, на которые он опирается
---

**1.9.**

Уравновешенная нагрузка, приложенная к геометрически неизменяемой части конструкции, вызывает внутренние усилия только в этой части, а в остальных частях конструкции они равны нулю
--

**1.10.**

В статически определимых стержневых конструкциях не возникают внутренние усилия от температурного воздействия
---

**1.11.**

В статически определимых стержневых конструкциях не возникают внутренние усилия от кинематического воздействия
--

**1.12.**

В статически определимых стержневых конструкциях не возникают внутренние усилия от неточностей изготовления элементов конструкций
---

**1.13. – 2, 2.****1.14.**

Первая разновидность основана на применении уравнений равновесия к одной из отделенных частей конструкции
---

**1.15.**

Вторая разновидность основана на использовании приема приведения системы сил к точке
--

**1.16.**

Третья разновидность носит смешанный характер. В этом случае изгибающие моменты находятся с использованием первой или второй разновидности статического метода, поперечные силы находятся из условий равновесия стержней, а продольные силы – из условий равновесия узлов конструкции
---

**1.17. – 1, 5.****1.18. – 3.****1.19.**

Дискретизация расчетной схемы стержневой конструкции предполагает её разбиение на отдельные элементы, введение мест их соединения и выделение расчетных сечений
---

**1.20.**

Дискретизация нагрузки стержневой конструкции заключается в замене заданной нагрузки статически эквивалентной системой сосредоточенных сил, приложенных к узлам дискретной расчетной схемы конструкции
--

**2.1.1 – 1, 4****2.1.2 – 1, 3****2.2.1 – 2, 1, 3****2.2.2 – 3, 1, 3**

**2.2.3** – 2, 2, 2

**2.2.4** – 3, 1, 2

**2.2.5** – 2, 2, 3

**2.2.6** – 2, 3, 1

### **3.5. Рекомендации по выполнению тестовых заданий третьего уровня**

3.1, 3.2. Следует получить аналитические выражения для указанных в заданиях изгибающих моментов, и выяснить, при каких значениях параметров балки они будут равными.

3.3, 3.4. Следует использовать дифференциальные зависимости между внутренними усилиями и нагрузкой.

3.5.1 – 3.5.4. Следует проанализировать взаимодействие элементов рассматриваемых конструкций.

## ЛИТЕРАТУРА

### Учебно-нормативные документы

1. Образовательный стандарт высшего образования первой степени специальности «Промышленное и гражданское строительство» ОСВО 1-70 02 01-2013, утвержден 30.08.2013, Минск, 2013.

2. Типовая учебная программа дисциплины «Строительная механика», регистрационный № ТД-Ј.066/тип, утверждена 30.06.2010, Минск, 2010.

3. Учебная программа дисциплины «Строительная механика», регистрационный №03/15/уч., утверждена 01.07.2015.

### Учебная литература основная

4. Борисевич, А.А. Строительная механика: Учеб. пособие для вузов/ А.А. Борисевич, Е.М. Сидорович, В.И. Игнатюк. – Минск : БНТУ, 2009. – 756 с.

5. Дарков, А.В. Строительная механика: Учебник для вузов. / А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. – СПб. : Изд. Лань, 2010. – 656 с.

6. Строительная механика. Стержневые системы: Учебник для вузов / А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лащеников, Н.Н. Шапошников; Под ред. А.Ф. Смирнова. – М. : Стройиздат, 1981. – 512 с.

7. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений: Учебник для вузов/ А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лащеников, Н.Н. Шапошников; Под ред. А.Ф. Смирнова. – М. : Стройиздат, 1984. – 416 с.

8. Клейн, Г.К. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики / Г.К. Клейн, В.Г. Рекач, Г.И. Розенблат. – М. : Высшая школа, 1972. – 320 с.

9. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики (статика стержневых систем): Учеб. пособие для студентов вузов / Г.К. Клейн, Н.Н. Леонтьев, М.Г. Ванюшенко и др.; Под ред. Г.К. Клейна. – М. : Высшая школа, 1980. – 384 с.

10. Турищев, Л.С. Строительная механика: учебно-методический комплекс в 3 ч / Л.С. Турищев. – Новополоцк : ПГУ. 2010. – Ч.1. Статически определимые системы. – 224 с.

11. Турищев, Л.С. Строительная механика: учебно-методический комплекс / Л.С. Турищев. – Новополоцк : ПГУ. 2009. – Ч.2. Статически неопределимые системы – 200 с.

12. Турищев, Л.С. Строительная механика: учебно-методический комплекс / Л.С. Турищев. – Новополюцк : ПГУ. 2010. – Ч.3. Основы динамики и устойчивости сооружений – 136 с.

13. Турищев, Л.С. Введение в строительную механику: электронное пособие для организации самостоятельной работы студентов / Л.С. Турищев. – Новополюцк : ПГУ. 2016. – 56 с.

### **Учебная литература дополнительная**

14. Рабинович, И.М. Основы строительной механики стержневых систем / И.М. Рабинович. – М. : Госстройиздат, 1960. – 520 с.

15. Строительная механика. Основы теории с примерами расчетов: учебник для вузов / А.Е. Саргсян, А.Т. Демченко, Н.В. Дворянчиков, Г.А. Джинчвелашвили; Под ред. А.Е. Саргсяна. – М. : Высш. шк., 2000. – 416 с.

16. Безухов, Н.И. Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах / Н.И. Безухов, О.В. Лужин, Н.В. Колкунов. – М. : Высшая школа, 1987. – 264 с.

17. Кузьмин, В.А. Сборник задач по курсу строительной механики / В.А. Кузьмин, В.Г. Рекач, Г.И. Розенблат; под редакцией И.М. Рабиновича. – М. : Госстройиздат, 1963. – 331 с.

18. Киселев, В.А. Строительная механика в примерах и задачах / В.А. Киселев, А.М. Афанасьев, В.А. Ермоленко и др.; Под ред. В.А.Киселева. М. : Стройиздат, 1986. – 387с.

### **Интернет-ресурсы**

19. Учебные курсы для студентов по сопротивлению материалов и строительной механики [Электронный ресурс] – Режим доступа: [http://mysopromat.ru/uchebnye\\_kursu/](http://mysopromat.ru/uchebnye_kursu/).

20. Сайт кафедры строительной механики СПбГПУ с учебными материалами по строительной механике [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://smitu.cef.spbstu.ru/index.htm>.

21. Сайт кафедры строительной механики БелГУТ с учебными материалами по строительной механике [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.mechanika.org.ru/index>.

**Краткие справочные сведения по математике,  
связанные с содержанием изучаемого модуля<sup>4</sup>**

**Приближенное значение величины** – численное значение, которое характеризует некоторый физический объект (предмет или процесс) с определённой погрешностью.

**Приближенные вычисления** – математические действия над приближенными значениями величин.

**Погрешность** – отклонение точного значения величины  $A$  от ее приближенного значения  $a$ :

$$A - a.$$

**Предельные погрешности** – некоторые граничные числовые значения, между которыми содержится погрешность

$$\alpha_1 < A - a < \alpha_2.$$

**Абсолютная погрешность** – модуль величины отклонения приближенной величины  $a$  от ее точного значения  $A$ :

$$\Delta = |A - a|.$$

**Предельная абсолютная погрешность** – некоторое граничное числовое значение не меньшее абсолютной погрешности

$$\Delta < \Delta_a.$$

**Относительная погрешность** – отношение абсолютной погрешности  $\Delta$  приближенной величины  $a$  к модулю ее точного значения  $A$ :

$$\delta = \frac{\Delta}{|A|}.$$

**Предельная относительная погрешность** – отношение предельной абсолютной погрешности к модулю приближенного значения величины:

$$\delta = \frac{\alpha}{|a|}.$$

Она оценивает качество полученного приближенного значения величины, безразмерна и, как правило, выражается в процентах.

---

<sup>4</sup> Составлены с использованием учебного пособия для студентов технических вузов: Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. – СПб.: Издательство «Лань», 2007

**Значащие цифры приближенного значения величины** – любая цифра в десятичном изображении величины, определяющая число единиц соответствующего десятичного разряда. При этом нуль, в зависимости от занимаемого места в записи величины, может трактоваться по-разному. В начале десятичных дробей он не является значащей цифрой, в остальных случаях нуль - значащая цифра.

**Верные цифры** –  $n$  первых значащих цифр приближенного значения величины, если её абсолютная погрешность не превышает половины единицы разряда, выражаемого последней значащей цифрой, считая слева направо.

**Сомнительные цифры** – цифры, следующие за верной последней цифрой приближенного значения величины.

**Однозначные функции** – функции, у которых каждому значению аргумента из области его изменения соответствует одно определенное значение.

**Возрастающие (убывающие) функции** - функции, у которой при росте аргумента значения функций возрастают (убывают).

**Монотонные функции** – возрастающие и убывающие функции.

**Непрерывные функции** - функции, у которых при постепенном (непрерывном) изменении аргумента значения функций меняются постепенно, без скачков.

**Разрывные функции** – функции, которые не являются непрерывными.

**Точки разрыва функций** – значения аргументов, при которых непрерывность изменения функций нарушается. Существует два вида точек разрыва – первого и второго рода.

**Четные функции** - функции, которые не меняются при изменении знака аргумента:

$$f(-x) \equiv f(x).$$

**Нечетные функции** - функции, которые при изменении знака аргумента умножаются на  $-1$ :

$$f(-x) \equiv -f(x).$$

**Рациональные функции** – функции, у которых для получения их значений над аргументом могут совершаться следующие алгебраические действия – сложение, вычитание, умножение, возведение в целую положительную степень, деление. Такие функции подразделяются на целые рациональные (многочлены) и дробные рациональные.

**Линейная функция** – целая рациональная функция, которая имеет вид двучлена

$$y = ax + b,$$

где  $a$  и  $b$  – постоянные коэффициенты. Графиком линейной функции служит прямая линия (рисунок 33).

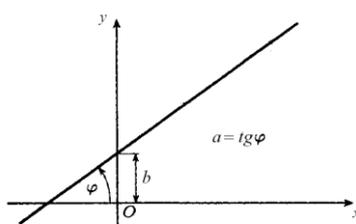


Рисунок 33. – График линейной функции

**Квадратичная функция** – целая рациональная функция, которая имеет вид квадратного трехчлена

$$y = ax^2 + bx + c,$$

где  $a$ ,  $b$  и  $c$  – постоянные коэффициенты. Графиком квадратичной функции служит парабола (рисунок 34).

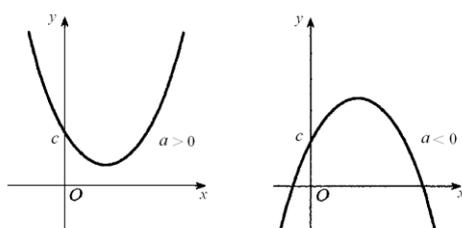


Рисунок 34 – график квадратичной функции

**Алгебраические функции** – функции, у которых для получения их значений над аргументом, наряду со сложением, вычитанием, умножением, возведением в целую степень, делением, допускается извлечение из него корня. Такие функции бывают рациональными и иррациональными.

**Трансцендентные функции** – функции, которые не являются алгебраическими. К таким функциям относятся, например, показательная функция, логарифмическая функция, все тригонометрические функции.

**Неявное задание функции** – задание функции с помощью неразрешенного уравнения, связывающего аргумент и функцию

$$F(x, y) = 0$$

**Бесконечно малая величина** – переменная величина в некотором процессе, которая безгранично приближается (стремится) к нулю.

**Бесконечно большая величина** - переменная величина в некотором процессе, которая безгранично возрастает по абсолютной величине.

**Предел переменной величины** – постоянная величина  $a$ , к которой безгранично приближается переменная величина  $x$  в некотором процессе

$$\lim x = a$$

**Производная функции** – предел отношения приращения функции к приращению аргумента, вычисленный в процессе, когда приращение аргумента стремится к нулю

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Таким образом, производная характеризует скорость изменения функции в расчете на единицу изменения аргумента. Геометрический смысл производной состоит в том, что она равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции в произвольной точке (рисунок 35).

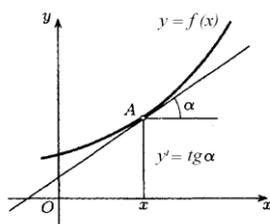
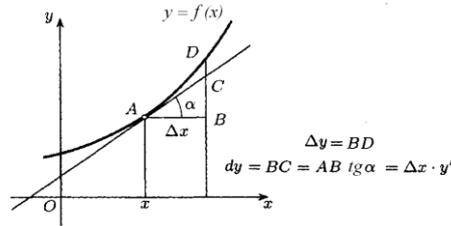


Рисунок 35. – График производной функции

**Дифференциал функции** – произведение вида

$$dy = \Delta x \cdot y',$$

которое характеризует приращение, полученное функцией, если бы она на интервале от  $x$  до  $x + \Delta x$  изменялась с той же скоростью, что и при значении  $x$  аргумента. Геометрический смысл дифференциала функции показан на рисунке 36.



**Рисунок 36. – Геометрический смысл дифференциала функции**

и он равен приращению ординаты касательной. Таким образом, дифференциал есть главная линейная часть приращения функции.

**Интервалы монотонности функции** – совокупность значений независимой переменной  $x$ , для которых производная функции сохраняет знак. В случае если  $f'(x) > 0$ , то это интервал возрастания функции, а если  $f'(x) < 0$ , то это интервал убывания функции.

**Стационарные точки функции** – значения независимой переменной  $x$ , в которых  $f'(x) = 0$ .

**Точки экстремума функции** - значения независимой переменной  $x$ , при переходе через которые производная функции сменяет знак.

Если при переходе  $x$  через точку  $x = x_0$  в положительном направлении знак  $f'(x)$  сменяется с  $+$  на  $-$ , то эта точка называется точкой максимума функции, а значение функции  $f(x_0)$  – её максимальным значением.

Если при переходе  $x$  через точку  $x = x_0$  в положительном направлении знак  $f'(x)$  сменяется с  $-$  на  $+$ , то эта точка называется точкой минимума функции, а значение функции  $f(x_0)$  – её минимальным значением.

**Транспонирование матрицы** – перемена ролями строк и столбцов матрицы. Полученная новая матрица обозначается  $\mathbf{A}^T$  или  $\mathbf{A}'$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

**Симметрическая матрица** – матрица, совпадающая со своей транспонированной матрицей  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$

**Сложение матриц** – суммой двух матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  одинаковых размеров  $m \times n$  называется матрица  $\mathbf{C}$ , элементы которой  $c_{ij}$  связаны с элементами  $a_{ij}$  и  $b_{ij}$  матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  равенством

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

**Вычитание матриц** – разностью двух матриц **A** и **B** одинаковых размеров  $m \times n$  называется матрица **C**, элементы которой  $c_{ij}$  связаны с элементами  $a_{ij}$  и  $b_{ij}$  матриц **A** и **B** равенством

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

**Умножение матрицы на число** – результатом умножения матрицы **A** на некоторое число  $k$  является матрица **C**, элементы которой  $c_{ij}$  связаны с элементами  $a_{ij}$  матрицы **A** равенством

$$c_{ij} = k \cdot a_{ij}$$

**Умножение матриц** – произведением двух матриц **A** (размеры  $m \times p$ ) и **B** (размеры  $p \times n$ )

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pn} \end{pmatrix}$$

является матрица **C** с размерами  $m \times n$

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix},$$

элементы которой  $c_{ij}$  связаны с элементами  $a_{ij}$  и  $b_{ij}$  матриц **A** и **B** равенством

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$$

Таким образом, умножать можно лишь матрицы, в которых число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы. Поэтому при перемножении матриц не соблюдается принцип перестановочности сомножителей  $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$

**Определитель квадратной матрицы** – число, равное алгебраической сумме всевозможных произведений элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки, по одному из каждого столбца и снабженных

знаками «плюс» и «минус» по определенному правилу. Обозначается символом

$$|\mathbf{A}| \text{ или } \det \mathbf{A}$$

**Вырожденная квадратная матрица** – матрица  $\mathbf{A}$ , для которой  $\det \mathbf{A} = 0$ .

**Невырожденная квадратная матрица** – матрица  $\mathbf{A}$ , для которой  $\det \mathbf{A} \neq 0$ .

**Обратная квадратная матрица** – матрица  $\mathbf{A}^{-1}$ , произведение которой на исходную матрицу  $\mathbf{A}$  равняется единичной матрице

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{E}$$

Обратную матрицу не имеют вырожденные матрицы.

**Краткие справочные сведения по физике,  
связанные с содержанием изучаемого модуля<sup>5</sup>**

**Измерение физической величины** – сравнение с однородной величиной, условно принятой за единицу физической величины.

**Основные единицы** – единицы физических величин, независимые друг от друга.

**Производные единиц** – единицы физических величин, которые определяются по уравнениям, связывающих соответствующие величины, с помощью основных единиц.

**Система единиц** – совокупность основных и производных единиц.

**Международная система единиц (SI)**

Основные единицы:

1. Единица длины – м (метр). Дольные единицы – 1см (сантиметр), 1мм (миллиметр).
2. Единица массы – кг (килограмм).
3. Единица времени – сек (секунда).

Производные единицы<sup>6</sup>:

1. Единица силы, веса – Н (ньютон,  $1\text{Н}=1\text{кг}\cdot\text{м}/\text{сек}^2$ ). Дольные единицы – кН (килоньютон), МН (меганьютон).
2. Единица площади -  $\text{м}^2$  (квадратный метр).
3. Единица напряжения – Па (паскаль,  $1\text{Па} = 1\text{Н}/\text{м}^2 = 1\text{кг}/\text{м}\cdot\text{сек}^2$ ). Дольные единицы – кПа (килопаскаль), МПа (мегапаскаль).
4. Единица объема –  $\text{м}^3$  (кубический метр).
5. Единица плотности –  $\text{кг}/\text{м}^3$  (килограмм на кубический метр).
6. Единица удельного веса -  $\text{Н}/\text{м}^3$  (ньютон на кубический метр).
7. Единица момента силы -  $\text{Н}\cdot\text{м}$  (ньютон·метр,  $1\text{Н}\cdot\text{м} = 1\text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{сек}^2$ ).
8. Единица работы – Дж (джоуль,  $1\text{Дж} = 1\text{Н}\cdot\text{м} = 1\text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{сек}^2$ ).

<sup>5</sup> Составлены с использованием учебного пособия для студентов технических вузов: Макаренко Г.М. Курс общей физики. – Минск: Издательство «Дизайн ПРО», 2003

<sup>6</sup> Приведены только единицы, связанные с изучаемым модулем строительной механики.

### **Техническая система единиц (МКГС)**

Основные единицы:

1. Единица длины – м (метр). Дольные единицы – 1 см (сантиметр), 1 мм (миллиметр).

2. Единица силы – кГс (килограмм-сила).

3. Единица времени – сек (секунда).

Производные единицы:

1. Единица массы – т.е.м (техническая единица массы, 1 т.е.м = 1 кГс·сек<sup>2</sup>/м). Дольные единицы – кН (килоньютон), МН (мега ньютон).

2. Единица площади - м<sup>2</sup> (квадратный метр).

3. Единица напряжения – кГс/ м<sup>2</sup> (килограмм-сила на квадратный метр).

4. Единица объема – м<sup>3</sup> (кубический метр).

5. Единица плотности – т.е.м/м<sup>3</sup> (техническая единица массы на кубический метр).

6. Единица удельного веса - кГс/м<sup>3</sup> (килограмм-сила на кубический метр).

7. Единица момента силы - кГс·м (килограмм-сила-метр).

8. Единица работы – кГс·м (килограмм-сила-метр).

### **Соотношения между единицами величин двух систем:**

1. Единицы массы: 1 кг = 0.102 т.е.м, 1 т.е.м = 9.81 кг.

2. Единицы силы: 1 Н = 0.102 кГс, 1 кГс = 9.81 Н

3. Единица плотности: 1 кг/м<sup>3</sup> = 0.102 т.е.м/ м<sup>3</sup>, 1 т.е.м/ м<sup>3</sup> = 9.81 кг/м<sup>3</sup>

4. Единица удельного веса: 1 Н/м<sup>3</sup> = 0.102 кГс/ м<sup>3</sup>, 1 кГс/м<sup>3</sup> = 9.81 Н/м<sup>3</sup>.

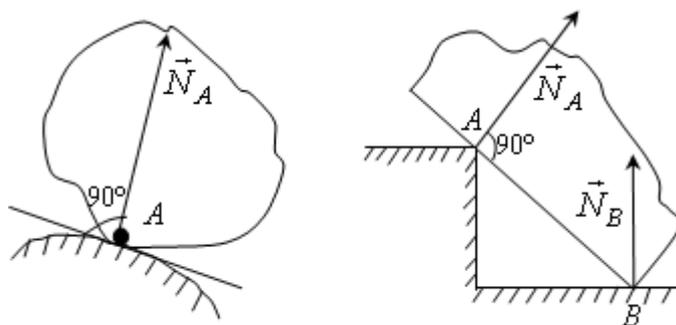
5. Единица момента силы: 1 Н·м = 0.102 кГс·м, 1 кГс·м = 9.81 Н·м.

6. Единица работы: 1 Дж = 0.102 кГс·м, 1 кГс·м = 9.81 Дж.

**Краткие справочные сведения по теоретической механике,  
связанные с содержанием изучаемого модуля<sup>7</sup>**

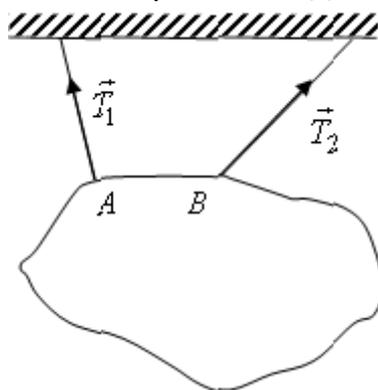
**Виды связей** – гладкая поверхность, нить, неподвижная шарнирная опора, подвижная шарнирная опора, сферический шарнир, стержневая связь (стержень), жесткая заделка (защемление).

**Гладкая поверхность** – поверхность без трения, на которую свободно опирается тело. Реакция опорной поверхности приложена к телу в точке соприкосновения и направлена по общей нормали, проведенной в этой точке к поверхностям соприкасающихся тел



**Рисунок 37. – Реакция опорной поверхности**

**Нить** – гибкое тело (трос, канат, цепь), с помощью которого тело подвешивается к некоторой точке. Реакция такой связи приложена к телу в точке крепления к нему нити и направлена вдоль нее к точке подвеса



**Рисунок 38. – Реакция связи нити и подвешенного с помощью нее тела**

<sup>7</sup> Составлены с использованием учебно-методического комплекса для студентов строительных специальностей: Завистовский В. Э., Коровкин В.Н., Кулик Н.А. Теоретическая механика. – Новополюк.: ПГУ, 2008.

**Неподвижная шарнирная опора** – устройство, соединяющее тело с опорной поверхностью и дающее ему возможность свободно поворачиваться в вертикальной плоскости, но препятствует линейным перемещениям. Реакция такой опоры может принимать любое направление, перпендикулярное оси шарнира, и приложена к телу в точке опирания. При решении задач эту реакцию обычно представляют в виде двух составляющих, которые направляют параллельно принятым осям координат

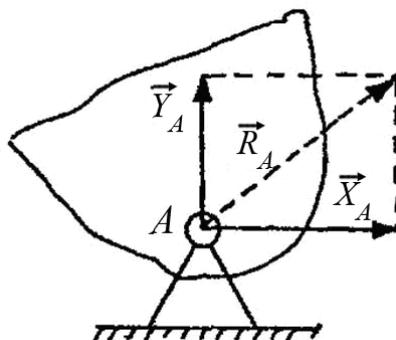


Рисунок 39. – Неподвижная шарнирная опора

**Подвижная шарнирная опора** – устройство, соединяющее тело с опорной поверхностью, дающее ему возможность свободно поворачиваться и получать линейные перемещения в вертикальной плоскости<sup>8</sup>. Реакция такой опоры направлена по нормали к опорной поверхности

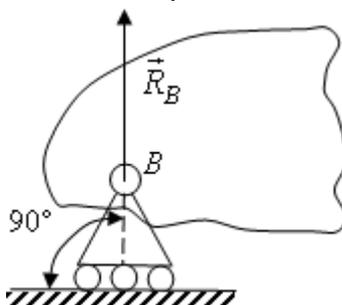


Рисунок 40. – Подвижная шарнирная опора

**Сферический шарнир** - устройство, соединяющее тело с опорной поверхностью и дающее ему возможность свободно поворачиваться в пространстве, но препятствует линейным перемещениям. Реакция такой опоры может принимать любое направление, проходит через геометрический центр шарнира, и приложена к телу в точке опирания. При решении задач эту реакцию обычно представляют в виде трех составляющих, которые направляют параллельно принятым осям координат

<sup>8</sup> При условии, что опорная поверхность является гладкой.

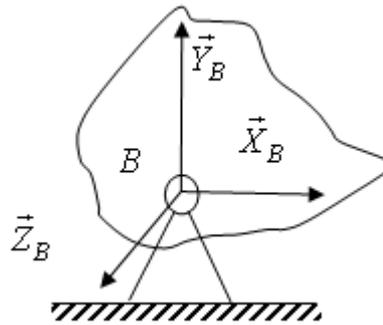


Рисунок 41. – Сферический шарнир

**Стержневая связь (стержень)** – жесткое невесомое тело произвольного очертания, на концах которого имеются шарниры, при помощи которых оно крепится к другому телу и к неподвижному основанию. Реакция такой связи направлена по прямой, соединяющей концевые шарниры

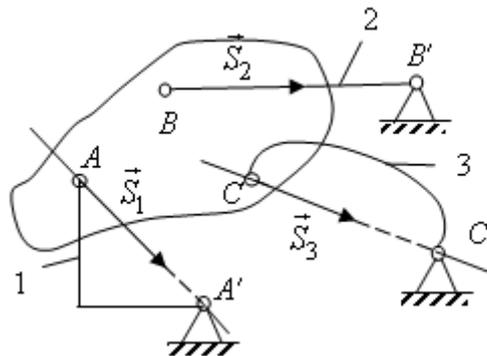


Рисунок 42. – Стержневая связь

**Жесткая заделка (защемление)** - устройство, соединяющее тело с опорной поверхностью, которое исключает любые перемещения на плоскости или в пространстве. Реакция такой опоры характеризуется реактивной силой и реактивным моментом произвольных направлений, которые приложены к телу в точке опирания. При решении задач их раскладывают на составляющие (на плоскости – три составляющие; в пространстве – 6 составляющих), которые характеризуют ограничения того или иного движения тела.

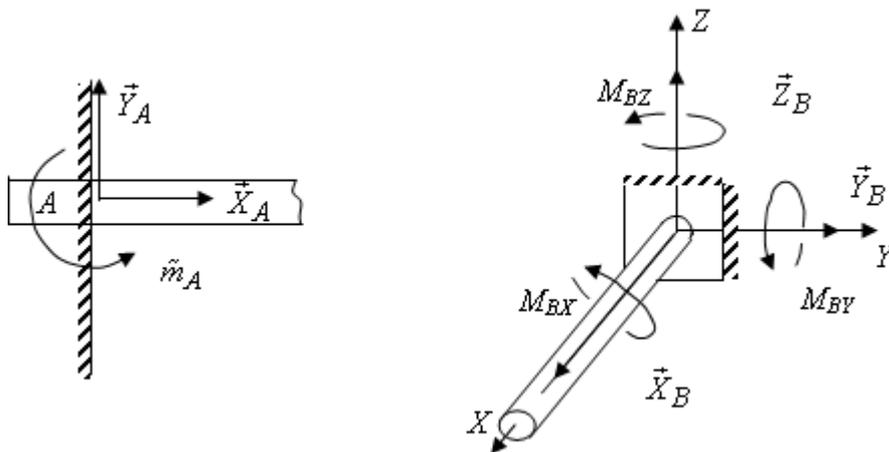


Рисунок 43. – Жесткая заделка

**Свойства момента пары сил:**

1. При переносе сил по линиям их действия момент пары не изменяется, так как при этом не изменяются ни величины сил, образующих пару, ни её плечо.
2. Момент пары не зависит от положения центра моментов

$$M_O = M_B = M_C = M.$$

Поэтому, не изменяя действия данной пары сил на тело, её можно заменить любой другой парой, расположенной в той же плоскости и имеющей тот же алгебраический момент.

**Эквивалентные пары сил** – любые пары, расположенные в одной плоскости и имеющие одинаковые моменты.

**Сложение пар сил** – операция замены системы пар сил эквивалентной парой сил.

**Условие равновесия системы пар сил** – система пар сил на плоскости может находиться в равновесии только тогда, когда алгебраическая сумма моментов этих пар равна нулю

$$M_1 + M_2 + \dots + M_n = \sum_{k=1}^n M_k = 0$$

**Свойства момента силы относительно точки:**

1. При переносе силы по линии действия её момент не изменяется, так как при этом сохраняются и величина силы, и её плечо относительно центра моментов.
2. Момент силы относительно точки равняется нулю, если центр моментов лежит на линии действия силы, так как в этом случае плечо силы равно нулю.

**Теорема Вариньона** – момент равнодействующей плоской системы сил относительно любого центра равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно того же центра.

**Теорема о параллельном переносе силы** – не изменяя действия силы на тело, её можно перенести параллельно самой себе и приложить в любой другой точке тела, добавив при этом пару с моментом, равным моменту силы относительно новой точки её приложения.

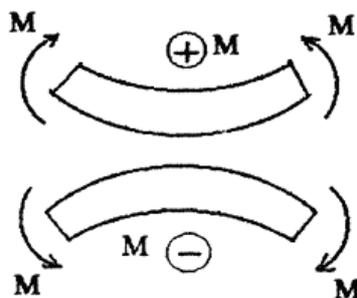
**Краткие справочные сведения по сопротивлению материалов, связанные с содержанием изучаемого модуля<sup>9</sup>**

**Порядок построения эпюр внутренних усилий при поперечном изгибе балок:**

1. Определить опорные реакции балки.
2. Получить аналитические выражения для  $M$  и  $Q$  на каждом участке балки.
3. Определить значения  $M$  и  $Q$  в характерных точках каждого участка – начало и конец участках, точках экстремума.
4. Отложить в некотором масштабе на двух осях эпюр найденные характерные значения  $M$  и  $Q$  перпендикулярно оси балки и соединить концы полученных ординат в соответствии с законом изменения  $M$  или  $Q$  на каждом участке.

**Правила знаков внутренних усилий при построении эпюр в балках:**

*Изгибающий момент* считается положительным, если он в соответствующем сечении растягивает нижние волокна, в противном случае он считается отрицательным



**Рисунок 44. – Положительный и отрицательный изгибающие моменты**

Эпюра изгибающих моментов строится на каждом участке со стороны растянутого волокна и знаки на эпюре  $M$  не ставятся.

*Поперечная сила* считается положительной, если она вращает прилегающую часть по часовой стрелке, в противном случае она считается отрицательной

<sup>9</sup> Составлены с использованием учебно-методического комплекса для студентов строительных специальностей: Родионов В.К., Турищев Л.С. Сопротивление материалов. – Новополюцк.: ПГУ, 2010

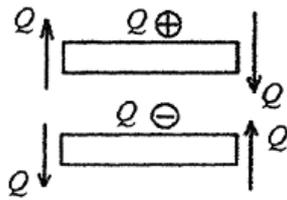


Рисунок 45. – Положительная и отрицательная поперечные силы

Положительные ординаты поперечной силы откладываются на оси вверх, отрицательные – вниз. Знаки на эпюре  $Q$  ставятся обязательно.

**Дифференциальные зависимости Журавского** – зависимости вытекают из условий равновесия элементарного участка балки при поперечном изгибе и связывают между собой интенсивность распределенной нагрузки  $q$ , поперечную силу  $Q$  и изгибающий момент  $M$  следующими двумя функциональными соотношениями:

1. Первая производная от поперечной силы по абсциссе сечения равна интенсивности распределенной нагрузки  $\frac{dQ}{dx} = q$

2. Первая производная от изгибающего момента по абсциссе сечения равна поперечной силе  $\frac{dM}{dx} = Q$

Отсюда следует, что тангенс угла  $\alpha_M$  между касательной к линии, ограничивающей эпюру  $M$ , и осью эпюры равен поперечной силе  $\text{tg}\alpha_M = Q$

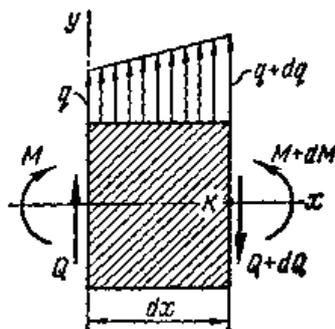


Рисунок 46. – Дифференциальные зависимости Журавского

**Правила контроля правильности построения эпюр  $M$  и  $Q$  в балках** – из полученных дифференциальных зависимостей вытекают следующие правила, позволяющие осуществлять контроль над правильностью построения эпюр  $M$  и  $Q$  в балках:

– если на некотором участке действует распределенная нагрузка с интенсивностью  $q = const$ , то на этом участке эпюра  $Q$  ограничена наклонной прямой линией, а эпюра  $M$  ограничена параболой, выпуклость которой направлена в сторону действия нагрузки (правило паруса);

– если на некотором участке распределенная нагрузка отсутствует, то на этом участке эпюра  $Q$  ограничена прямой линией параллельной оси эпюры, а эпюра  $M$  ограничена наклонной прямой линией;

– если на некотором участке эпюры поперечная сила положительная, то ординаты эпюры изгибающего момента на этом участке возрастают слева направо;

– если на некотором участке эпюры поперечная сила отрицательная, то ординаты эпюры изгибающего момента на этом участке убывают слева направо;

– если на некотором участке эпюры поперечная сила имеет постоянное значение, то эпюра моментов на этом участке ограничена прямой линией. При  $Q \neq 0$  эта линия наклонена к оси эпюры  $M$  под некоторым углом, а при  $Q = 0$  она параллельна оси эпюры;

– если в некотором сечении поперечная сила равняется нулю, то ордината на эпюре изгибающего момента в этом сечении принимает экстремальное значение (максимальное или минимальное), а касательная к линии, ограничивающей эпюру  $M$ , в этом сечении параллельна оси эпюры;

– если в некотором сечении приложена сосредоточенная сила, то на эпюре  $Q$  в этом месте имеется скачок (разрыв 1-го рода), а линии, ограничивающие эпюру  $M$  на этих участках, сопрягаются с переломом (не имеют в точке сопряжения общей касательной), который направлен в сторону действия нагрузки (правило паруса);

– если на границе соседних участков эпюра  $Q$  не имеет скачка, то линии, ограничивающие эпюру  $M$  на этих участках, сопрягаются без перелома, т.е. имеют в точке сопряжения общую касательную;

– если в некотором сечении приложена сосредоточенная пара с моментом  $M$ , то на эпюре  $M$  в этом месте имеется скачок (разрыв 1-го рода). Направление скачка зависит от направления пары сил. Если она в сечении растягивает нижние волокна, то скачок направлен вниз, в противном случае – вверх. На очертание эпюры  $Q$  наличие пары сил в сечении никак не влияет.

**Краткие справочные сведения о вычислениях  
в математическом пакете MathCAD<sup>10</sup>**

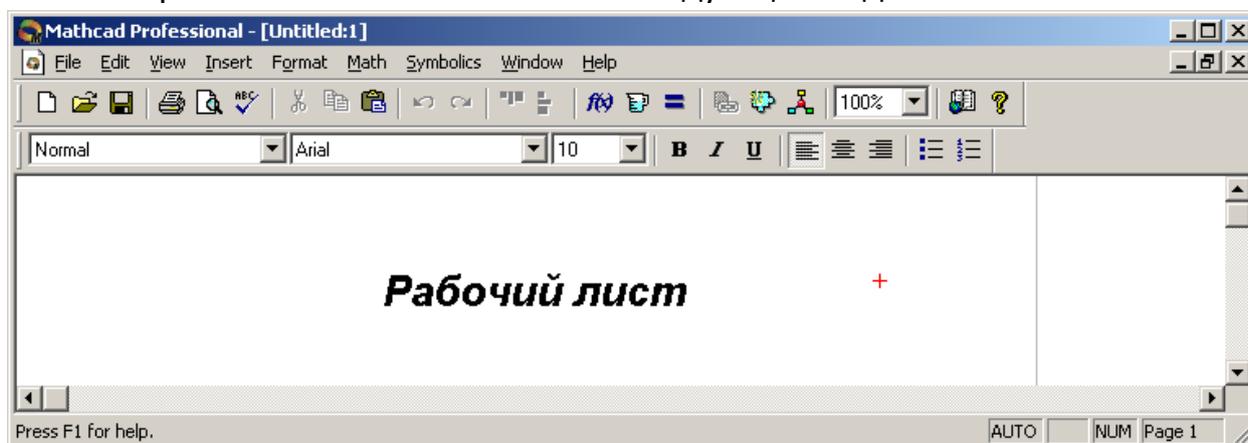
**1. Основные правила работы с пакетом MathCAD<sup>11</sup>**

Запуск для работы системы MathCAD ничем не отличается от запуска других Windows-приложений и может осуществляться двумя способами. Первый способ основан на использовании команды **MathCAD 2000** в подменю **MathSoft Apps** меню **Программы**, которая открывается кнопкой **Пуск**, расположенной на Рабочем столе Windows в левом нижнем углу. Во втором способе может использоваться специальный ярлык системы



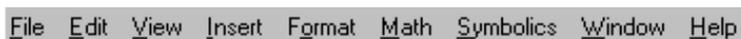
созданный на рабочем столе.

Открытое окно MatchCAD имеет следующий вид



и содержит в верхней части строку заголовка с названием открытого документа, которым по умолчанию является *Untitled:1*, и три стандартных для Windows-приложений строки:

- Главное меню



- Стандартная панель инструментов

<sup>10</sup> Составлены с использованием учебно-методического комплекса для студентов строительных специальностей: Турищев, Л.С. Численные методы решения задач строительства. – Новополюцк : ПГУ, 2004.

<sup>11</sup> Справедливы для версий MathCAD 2000 Professional и выше.



### – Панель инструментов форматирования



Внизу окна расположена строка состояния



Пространство между верхними и нижними стоками называется *Рабочим листом* и используется для создания MathCAD-документа. Таким документом является естественное математическое описание алгоритма решения различных инженерно-технических задач. Создаваемый документ состоит из отдельных блоков, представляющих собой занятые определенной информацией области *Рабочего листа*. Такие блоки могут быть трех типов – *вычислительные, графические и текстовые*.

*Вычислительные блоки* служат для проведения вычислений, получения промежуточных и конечных результатов. Они состоят из исполняемых математических выражений (формул, уравнений, неравенств и др.), записанных с помощью обычной математической символики. Вычисления в указанных блоках осуществляются в строго определенном порядке – слева-направо и сверху-вниз.

*Графические блоки* служат для графического вывода результатов вычислений. Такие блоки также являются исполняемыми и поэтому должны располагаться после соответствующих вычислительных блоков.

*Текстовые блоки* служат для ввода в документ поясняющего текста и повышают его наглядность. Эти блоки являются неисполняемыми и поэтому могут располагаться в любых местах документа, свободных от вычислительных и графических блоков.

Основой функционирования MathCAD-документа является взаимный порядок расположения блоков в соответствии с алгоритмом решения задачи. Каждый последующий исполняемый блок может функционировать, используя информацию только из предшествующих исполняемых блоков, т.е. расположенных выше и левее. Блоки не могут налагаться друг на друга.

Присвоение собственного имени созданному MathCAD-документу и его сохранение в определенной папке осуществляется обычным образом с помощью команды **Save As** меню **File** главного меню системы. За-

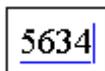
крытие созданного документа ничем не отличается от закрытия документов в других Windows-приложениях и может осуществляться тремя способами. Первый способ основан на использовании команды **Exit** в меню **File** Главного меню системы. Во втором способе используется стандартная кнопка закрытия любого Windows-приложения , расположенная в правом углу строки заголовка MathCAD-документа. Третий способ основан на использовании комбинации клавиш [**Alt+F4**].

## 2.Создание вычислительных блоков

При создании вычислительных блоков используются следующие математические объекты: *операторы, входные данные, функции и математические выражения*. Под *операторами* в MathCAD понимают различные математические операции – арифметические, логические, математического анализа и матричной алгебры, для обозначения которых используются специальные символы. К *входным данным* относятся числовые константы, числовые переменные и массивы – векторы и матрицы, используемые при составлении выражений. *Функциями* являются различные математические зависимости, связывающие по определенным правилам одни переменные величины с другими. *Математические выражения* описывают преобразования, которые производятся над данными с помощью операторов и функций.

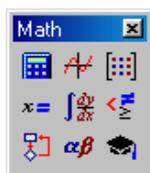
Для идентификации или распознавания входных данных и функций им присваиваются имена - идентификаторы. Именами указанных объектов могут быть любые сочетания строчных и прописных букв (латинских и греческих), цифр и некоторых специальных символов, например, штрих, подчеркивание, процент. Каждое имя должно быть уникальным и не повторять ранее заданных имен. Имена объектов должны начинаться с латинских букв, не должны включать в себя пробелов, и могут содержать нижние текстовые индексы. Для создания таких индексов следует в конце имени нажать клавишу [**.**] и ввести требуемые символы.

Создание вычислительных блоков возможно на любом свободном месте Рабочего листа MathCAD-документа. Перед началом их создания курсор на месте ввода математических объектов имеет вид **+**. После начала их ввода он приобретает вид синего уголка, охватывающего вводимый объект



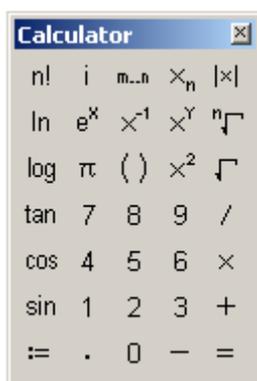
Для ввода математических объектов могут использоваться различные способы. Общий способ основывается на использовании соответствующих команд Главного меню системы и открывающихся при этом панелей инструментов или диалоговых окон. Другой способ основан на использовании специальных сочетаний клавиш. Кроме того, ряд математических объектов может быть введен непосредственно с клавиатуры.

**Операторы.** Для ввода операторов служит панель математических инструментов **Math**



которая открывается командой **Math** в подменю **Toolbars** меню **View** главного меню системы. Панель математических инструментов состоит из ряда кнопок, позволяющих открывать рабочие панели с соответствующими операторами.

Кнопка математической панели  позволяет открыть рабочую панель **Calculator** с арифметическими операторами



Рабочая панель имеет вид стандартного калькулятора. Каждому оператору соответствует символ, имеющий естественный вид, который позволяет ввести шаблон соответствующего оператора. Так, например, шаблоны основных арифметических операторов – сложение, вычитание, умножение и деление, имеют вид

$$\blacksquare + \blacksquare \quad \blacksquare - \blacksquare \quad \blacksquare \cdot \blacksquare \quad \frac{\blacksquare}{\blacksquare}$$

Шаблон каждого оператора включает два черных маркера - места, предназначенные для ввода данных, и символ соответствующей арифметической операции. Кроме того, эта панель позволяет вводить цифры от 0 до 9, некоторые элементарные функции, а также символы := и =, обозна-

чающие, соответственно, оператор ввода или локального присваивания и оператор вывода численного результата.

Кнопка математической панели  позволяет открыть рабочую панель **Boolean** с логическими операторами



Кнопки этой панели позволяют вводить операторы сравнения выражений  $= < > \leq \geq \neq$  и операторы четырех логических действий  $\neg \wedge \vee \oplus$  - отрицания, умножения, сложения и исключения.

Кнопка математической панели  позволяет открыть рабочую панель **Calculus** с операторами математического анализа



С помощью кнопок этой панели можно ввести шаблоны выполнения различных операций математического анализа. Соответствующая каждой операции математического анализа кнопка обозначена естественным математическим символом данной операции. Наиболее важными операторами математического анализа, применяемыми в строительных задачах, являются операторы дифференцирования и интегрирования.

Кнопка математической панели  позволяет открыть рабочую панель **Matrix** с операторами матричной алгебры



С помощью кнопок этой панели можно ввести шаблоны самой матрицы  и отдельных ее элементов  $X_n$ , а также шаблоны выполнения традиционных матричных операций: обращение матрицы  $X^{-1}$ , вычисление определителя матрицы  $|X|$ , выделение столбца матрицы  $M^{<sup>α</sup>}$  и транспонирование матрицы  $M^T$ . Для выполнения с матрицами операций сложения,

вычитания и умножения используются соответствующие арифметические операторы, в шаблоны которых вводятся матрицы.

Таковы основные операторы вычислительных блоков MathCAD, наиболее часто используемые при решении строительных задач.

**Данные.** Для ввода данных в вычислительный блок используется оператор локального присваивания, шаблон которого имеет вид

■ := ■

В маркер левой части вводится имя объекта, а информация, вводимая в маркер правой части, зависит от типа данных. Ввод оператора может быть произведен с помощью рабочей панели **Calculator**, а также сочетанием клавиш [**Shift** + :].

Первым типом данных являются *числовые константы* - именованные числовые значения, неизменяемые при выполнении документа. Для их задания в правую часть оператора присваивания с помощью арабских цифр, десятичной точки и, при необходимости, знака – (минус) вводится числовое значение константы, например

a := 2      b := -25.367

Вторым типом данных являются *простые числовые переменные*. Ими являются именованные числовые значения, которые могут изменяться по ходу выполнения документа. Задание простых числовых переменных ничем не отличается от задания числовых констант

x := 5    y := 10

Наряду с простыми переменными, задающими отдельные числовые значения, в MathCAD используется *дискретные* или *ранжированные переменные*. Такие переменные определяют ряд числовых значений, изменяющихся с определенным шагом в конечном интервале. Для задания дискретной переменной необходимо в правую часть оператора присваивания ввести начальное и конечное значения переменной, разделив их нажатием клавиши [;]

x := 0..5      y := 5..0

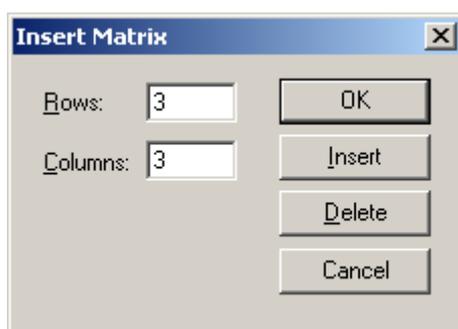
Первая дискретная переменная x изменяется с шагом 1 в интервале от 0 до 5, т.е. принимает значения 0, 1, 2, 3, 4, 5. Вторая дискретная переменная y изменяется с шагом – 1 в интервале от 5 до 0 и, следовательно, принимает значения 5, 4, 3, 2, 1, 0.

Для задания дискретной переменной с шагом изменения, отличным от 1, необходимо в правую часть оператора присваивания ввести начальное значение переменной. Затем следует нажать клавишу [,] и ввести следующее значение, отличающееся от начального на величину задаваемого шага. После этого нужно нажать клавишу [;] и ввести конечное значение переменной

$$x := 0, 2.. 8 \quad y := 8, 6.. 0$$

В этом случае дискретная переменная x изменяется с шагом 2 в интервале от 0 до 8, т.е. принимает значения 0, 2, 4, 6, 8, а дискретная переменная y изменяется с шагом -2 в интервале от 8 до 0 и, следовательно, принимает значения 8, 6, 4, 2, 0.

Третьим типом данных являются *массивы* – векторы и матрицы. Для их ввода используется кнопка  рабочей панели **Matrix**, которая открывает диалоговое окно

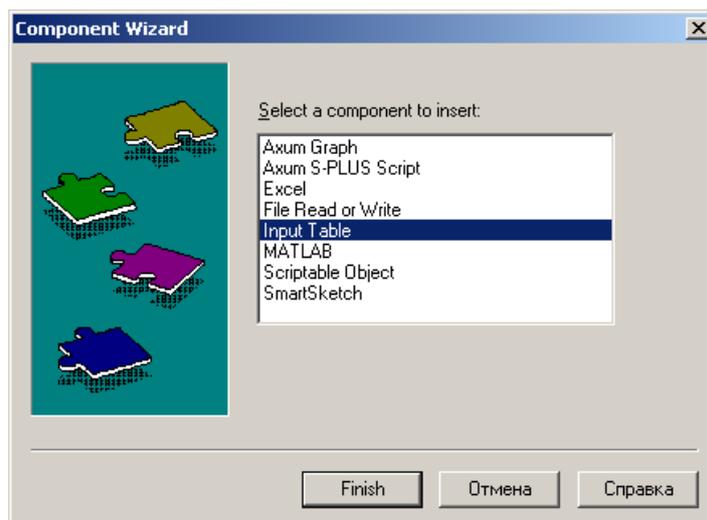


Это окно позволяет установить число строк и столбцов массива и ввести его шаблон

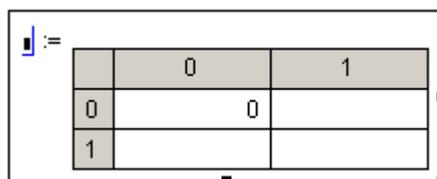
$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

в правую часть оператора присваивания. Шаблон массива состоит из маркеров для ввода его элементов. Вызов шаблона можно также произвести сочетанием клавиш [Ctrl + M]. С помощью указанного шаблона можно ввести массив, содержащий не более 100 элементов.

Ввод массивов при большем числе элементов осуществляется в формате электронных таблиц **Excel**. Для этого необходимо с помощью команды **Component** меню **Insert** главного меню системы открыть диалоговое окно **Component Wizard**



выбрать строку **Input Table** и активизировать клавишу **Finish**. Это позволит вставить в документ шаблон следующего вида



В маркер левой части вводится имя массива, а ячейки таблицы в правой части предназначены для ввода значений его элементов. Никаких ограничений на количество вводимых элементов массива в таблицу практически не существует.

При расчете строительных конструкций матричными методами часто приходится объединять массивы или выделять из них подмассивы. Для объединения массивов в MathCAD существует две функции: функция **augment** (A, B, ...) и **stack** (A, B,...). Аргументами этих функций являются объединяемые массивы. Функция **augment** (A, B, ...) позволяет объединять массивы с одинаковым числом строк слева направо. Функция **stack** (A, B, ...) позволяет объединять массивы с одинаковым числом столбцов сверху вниз. Для выделения из массива некоторого подмассива существует функция **submatrix** (A, i, i+m, j, j+n). Аргументами функции являются имя массива, а также граничные значения номеров строк и столбцов выделяемого подмассива.

Распознавание элементов массива и доступ к ним осуществляется через имя массива, дополненное нижними числовыми индексами. Если массив является вектором, то его имя дополняется одним числовым индексом

$$a_2$$

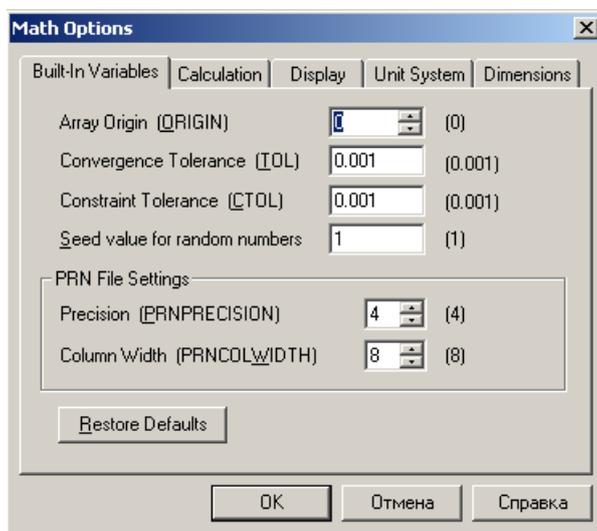
Индекс определяет номер элемента вектора. Если массив является матрицей, то его имя дополняется двумя числовыми индексами, разделенными запятой

$$a_{2,3}$$

Первый индекс указывает номер строки, а второй – номер столбца, где располагается соответствующий элемент матрицы. Для введения заполнителя числового индекса используется кнопка  $\times_n$  рабочей панели **Matrix** или клавиша [ [ ].

Нижняя граница индексации массивов определяется значением системной переменной **ORIGIN**, которая при запуске MathCAD принимает значение 0. При решении строительных задач нумерацию элементов массивов обычно начинают с 1. Для переопределения значения системной переменной **ORIGIN** можно использовать два способа.

Первый способ основан на использовании команды **Options** в меню **Math** главного меню системы, которая откроет диалоговое окно **Math Options**



позволяющее с помощью поля со счетчиком **Array Origin** изменить значение **ORIGIN** с 0 на 1.

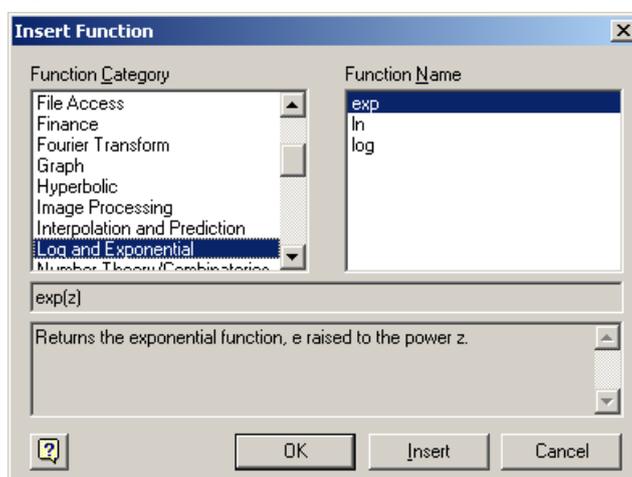
Второй способ основан на переопределении системной переменной **ORIGIN** с помощью оператора локального присваивания непосредственно в MathCAD-документе

```
ORIGIN := 1
```

**Функции.** В системе MathCAD используются два вида функций. Первым видом являются *встроенные функции*. Вторым видом являются *функции, создаваемые пользователем системы*.

В число встроенных функций входят элементарные математические функции, используемые в инженерных расчетах - гиперболические, тригонометрические, логарифмические, экспоненциальные функции, а также другие категории функций. Встроенные функции системы MathCAD подразделяются на 32 тематические категории, включающие более 300 (200) функций.

Для включения встроенных функций в вычислительный блок используется команда **Function** меню **Insert** главного меню системы, которая открывает диалоговое окно



позволяющее выбирать требуемую категорию, имя функции и вводить ее шаблон. Шаблоны функций содержат их имена и маркеры в скобках для ввода аргументов. Например, шаблоны элементарных математических функций имеют вид

$$\sin(\cdot) \quad \cos(\cdot) \quad \ln(\cdot) \quad \log(\cdot)$$

Вызов диалогового окна можно также произвести сочетанием клавиш **[Ctrl + E]**.

С помощью функций пользователя в вычислительный блок вводятся различные математические зависимости между переменными величинами, описывающими поведение рассчитываемых объектов или процессов. Такие функции могут иметь один или несколько аргументов. Для задания функций пользователя используется оператор локального присваивания. В маркер левой части оператора вводится имя функции с указанием в скобках перечня аргументов, разделенных запятыми. В маркер правой ча-

сти вводится формула задаваемой функции, в которую могут входить аргументы, различные встроенные функции, а также ранее заданные параметры и функции пользователя. Примерами функций пользователя являются следующие записи

$$Q(x) := (V_A \cdot x - q \cdot x) \cdot \sin(\alpha) - H \cdot \cos(\alpha)$$

$$G(x, \xi) := \frac{1}{F \cdot L} \cdot x \cdot (L - \xi)$$

$$M(x) := M_b(x) - H \cdot (f - y(x))$$

Первая и третья функции описывают изменение поперечных сил и изгибающих моментов в трехшарнирной арке, а вторая является функцией влияния растянутой нити.

Значение функции в отдельной точке можно вычислить двумя способами. Во-первых, для вычисления значения функции можно в имени функции задать числовое значение аргумента и затем после имени ввести оператор вывода численного результата

$$M(x) := 10 \cdot x - 4 \cdot x^2 \quad M(2) = 4$$

Во-вторых, можно вычислить значение функции, определив значение аргумента с помощью оператора локального присваивания

$$M(x) := 10 \cdot x - 4 \cdot x^2$$

$$x := 2 \quad M(x) = 4$$

Вычисление ряда значений функций в некотором интервале изменения аргумента можно осуществить, используя для задания аргумента дискретную переменную

$$x := 0..4 \quad M(x) := 10 \cdot x - 4 \cdot x^2 \quad M(x) =$$

0
6
4
-6
-24

**Математические выражения.** При численном решении в MathCAD инженерных задач наиболее часто используются два вида выражений: *арифметические* и *логические*. Каждое выражение определяет правила и порядок выполнения математических операций над входящими в него величинами для получения значения этого выражения.

*Арифметическое выражение* может состоять из входных данных, функций, арифметических операторов, операторов математического анализа и матричной алгебры, а также круглых скобок. Частными случаями арифметических выражений являются числовые константы, простые переменные и отдельные функции.

Ввод арифметических выражений в вычислительный блок осуществляется согласно общепринятым правилам записи таких выражений и с использованием описанных выше рабочих панелей и диалоговых окон. Примером такого выражения может служить следующая запись

$$\frac{\sqrt{2 \cdot a^4 + 49} - \sqrt{\log(a)}}{1 - \sqrt[3]{e^a}}$$

Задание значения параметра  $a$  с помощью оператора локального присваивания и введение в конце арифметического выражения оператора вывода численного результата = позволяет получить численное значение этого выражения

$$a := 5$$

$$\frac{\sqrt{2 \cdot a^4 + 49} - \sqrt{\log(a)}}{1 - \sqrt[3]{e^a}} = -8.198$$

*Логические выражения* устанавливают с помощью логических операторов некоторые зависимости между арифметическими выражениями, которые должны соблюдаться или не соблюдаться при выполнении MathCAD-документа. Результатом выполнения логических выражений является одно из двух чисел: 0, если рассматриваемое логическое выражение ложное, или 1, если оно истинное

$$b := 3 \quad c := 8$$

$$b + c > 10 = \blacksquare \quad b - c > 0 = \blacksquare \quad b \cdot c < 1 = \blacksquare \quad \frac{b}{c} \leq 1 = \blacksquare$$

Численные результаты, получаемые в MathCAD при вычислении значений функций и выражений, могут представляться в десятичном формате и экспоненциальной форме. Десятичный формат позволяет получать численный результат в виде десятичной дроби с фиксированным числом значащих цифр после запятой

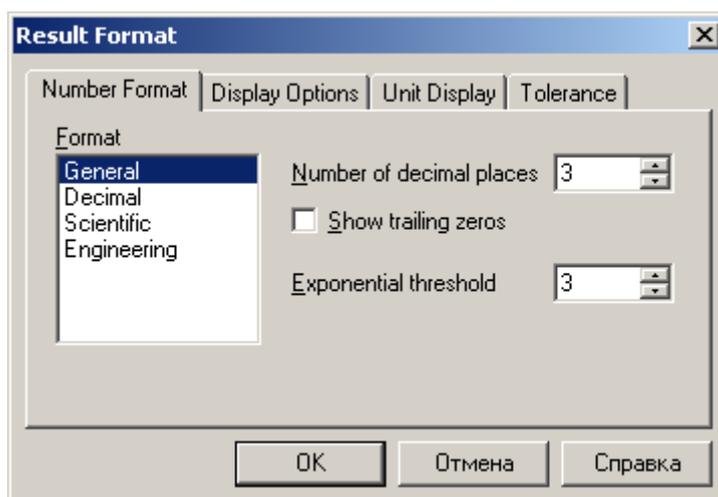
$$\frac{32.452}{48} = 0.676$$

Экспоненциальная форма позволяет получать численный результат в виде произведения мантиссы числа и его порядка, Возможны две разновидности представления результата в таком виде – научный и инженерный форматы. Научный формат позволяет получить численный результат с нормализованной мантиссой, а в случае инженерного формата порядок численного результата может принимать значения 0 или кратные 3

$$\frac{32.452}{48} = 6.761 \times 10^{-1} \text{ – научный формат}$$

$$\frac{32.452}{48} = 676.083 \times 10^{-3} \text{ – инженерный формат}$$

Для установления формата вывода результата используется команда **Result** меню **Format** главного меню системы, которая открывает диалоговое окно **Result Format**

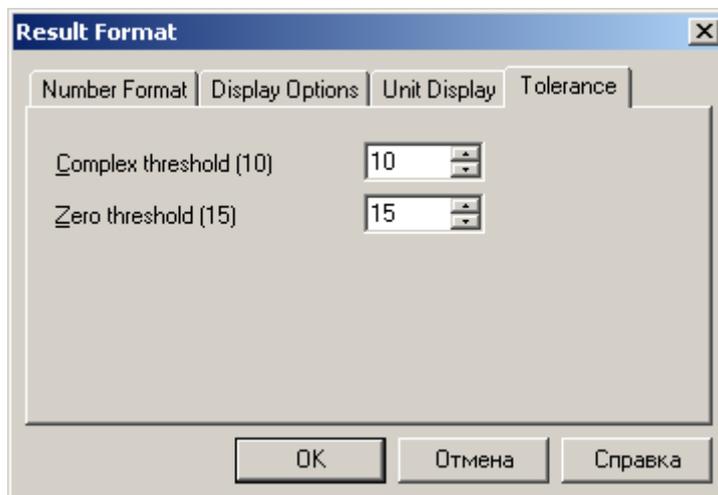


Поле **Format** на вкладке **Number Format** позволяет выбрать формат представления результата: общий, десятичный, научный или инженерный. При запуске системы автоматически устанавливается общий формат. Общий формат позволяет получать численный результат до определенного значения в десятичном формате, а при его превышении – в научном формате.

Поле со счетчиком **Number of decimal places** позволяет установить требуемое число значащих цифр после запятой как для результата в десятичном формате, так и для мантиссы результата в экспоненциальной форме. Установка флажка в окошко опции **Show trailing zeros** позволяет включать нули в число значащих цифр. Для установления в общем формате по-

рога экспоненциальной формы представления результата необходимо в поле со счетчиком **Exponential threshold** задать целое число  $n$  от 0 до 15, определяющее порядок результата.

#### Вкладка Tolerance диалогового окна **Result Format**



позволяет в поле со счетчиком **Zero threshold** установить целое число  $n$  от 0 до 307 и тем самым задать величину машинного нуля в виде  $10^{-n}$ . Наибольшее число, которое может использоваться в MathCAD, равняется  $10^{307}$ , и оно устанавливает величину машинной бесконечности.

Точность вычислений в MathCAD устанавливается заданием предельной абсолютной погрешности с помощью системной переменной TOL. Максимальная точность производимых в MathCAD численных расчетов не превышает  $10^{-15}$ . Устанавливаемая точность при запуске системе составляет  $10^{-3}$ . Изменение значения системной переменной TOL производится в поле со счетчиком **Convergence Tolerance** диалогового окна **Math Options**. Порядок открытия окна был рассмотрен выше при рассмотрении системной переменной ORIGIN.

Вычисления в MathCAD могут производиться в двух режимах: автоматическом и ручном. В автоматическом режиме вычисления выполняются сразу после ввода в вычислительные блоки соответствующих математических объектов, содержащих операторы вывода численного результата, и они производятся от начала документа и до его конца. В ручном режиме вычисления сразу после ввода математических объектов не производятся и вместо результатов вычислений выводятся их шаблоны.

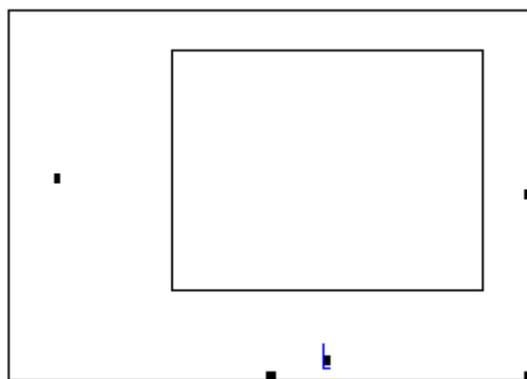
При запуске системы устанавливается автоматический режим вычислений. Для изменения режима вычислений необходимо отключить флажок команды **Automatic Calculation** в меню **Math** главного меню системы.

Осуществление вычислений в ручном режиме производится с помощью команды **Calculate**, вводимой нажатием клавиши **F9**.

### 3.Создание графических блоков

Графические блоки позволяют представлять численные результаты решения различных задач в виде графиков. Они должны располагаться после вычислительных блоков, которые содержат требуемые данные для построения таких графиков. Система MathCAD позволяет строить различные типы двумерных и трехмерных графиков. При решении строительных задач наиболее часто встречаются двумерные графики в декартовой системе координат. Примером таких графиков могут служить эпюры внутренних усилий плоских стержневых систем.

Для построения двумерного графика в декартовой системе координат используется шаблон такого графика, который имеет вид



Наружная рамка определяет границы графического блока, и ее размеры могут изменяться с помощью трех маркеров, расположенных на этой рамке, также как изменяются размеры графических объектов в текстовом редакторе Word. Внутренняя рамка определяет область построения графика. Пространство между рамками предназначено для отображения различной информации, связанной с создаваемым графиком. Для ввода шаблона графика могут быть использованы три приема.

Первый прием основан на использовании рабочей панели **Graph**

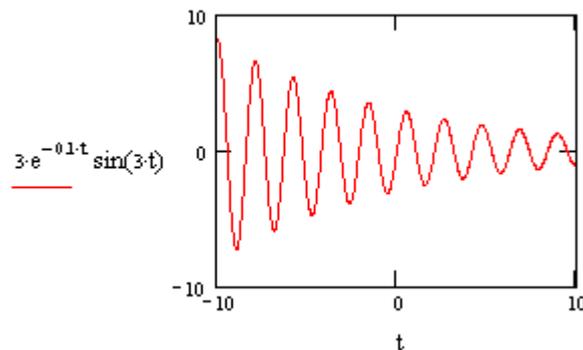


которая открывается командой **Graph** в подменю **Toolbars** меню **View** главного меню системы. Эта панель состоит из ряда кнопок, позволяющих открывать шаблоны различных типов графиков. Кнопка панели  позволяет открыть шаблон двухмерного графика в декартовой системе координат.

Второй прием основан на применении команды **X-Y Plot** подменю **Graph** меню **Insert** главного меню системы.

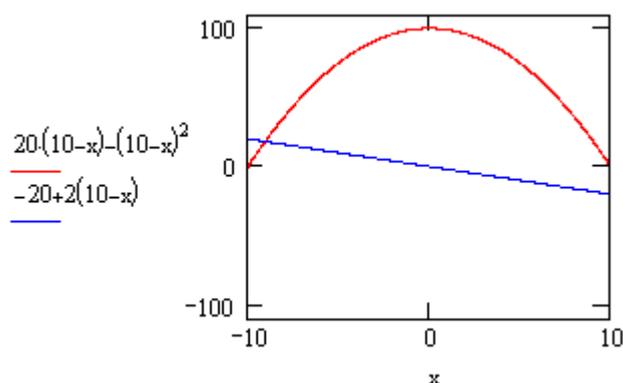
И, наконец, ввод шаблона графика можно произвести сочетанием клавиш **[Shift + @]**.

Для построения графика некоторой функции во введенном шаблоне следует в маркер, расположенный под внутренней рамкой, ввести аргумент функции, а в маркер, расположенный слева от этой рамки, ввести формулу задаваемой функции по правилам ввода выражений в вычислительные блоки. Например, если ввести аргумент  $t$  и формулу  $3 e^{-0.1t} \sin(3t)$ , то получим график



который описывает затухающие свободные колебания материальной точки.

Для одновременного построения во введенном шаблоне графиков нескольких функций необходимо в маркер, расположенный слева от внутренней рамки, ввести формулы соответствующих функций, разделив их запятыми



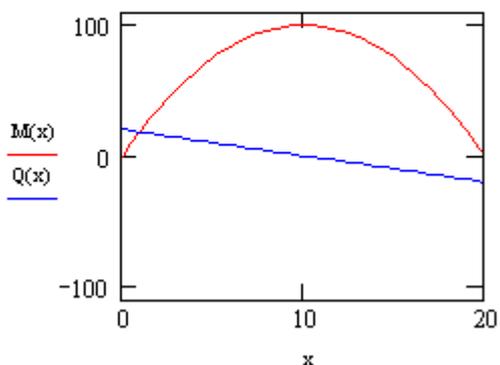
Построенные графики описывают очертания эпюр изгибающих моментов и поперечных сил однопролетной балки при действии равномерно распределенной нагрузки. Всего в одном шаблоне можно одновременно построить шестнадцать графиков.

Однако описанный способ построения графиков, несмотря на его простоту, неудобен при вводе громоздких формул. Кроме того, он обладает и рядом более существенных недостатков. Во-первых, область определения, задаваемая самой системой, для всех функции неизменна: значения аргумента изменяются в замкнутом интервале от -10 до 10. Во-вторых, способ не позволяет строить графики функций, которые задаются несколькими формулами, действующими на различных участках изменения аргумента, что характерно, например, для построения эпюр внутренних усилий в стержневых конструкциях. И, в-третьих, способ не позволяет также строить графики функций, заданных или полученных в табличной форме, например, как это бывает при матричной форме расчета конструкций.

Способ построения графиков, свободный от указанных недостатков, основан на использовании дискретных переменных для описания области определения функции и задании самих функций. Такая информация должна содержаться в вычислительных блоках, предшествующих шаблонам строящихся графиков этих функций. При применении этого способа в маркер, расположенный слева от внутренней рамки шаблона, вводятся не сами формулы функций, а их имена. Например, рассмотренный ранее пример построения графиков, описывающих очертания эпюр изгибающих моментов и поперечных сил однопролетной балки, примет вид

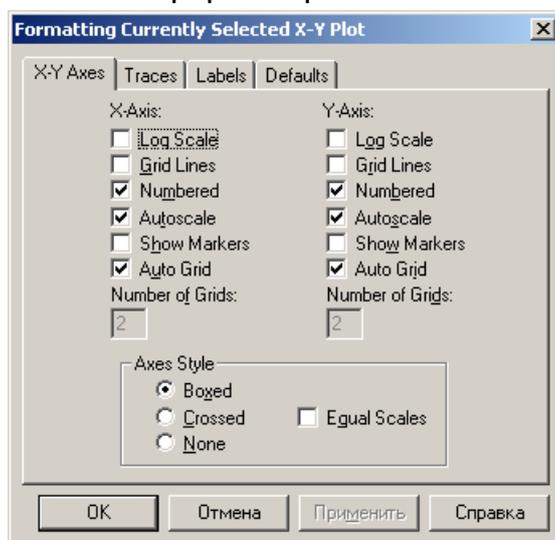
$$x := 0, 0.5.. 20$$

$$M(x) := 20 \cdot x - x^2 \quad Q(x) := 20 - 2 \cdot x$$



Здесь введены две функции пользователя  $M(x)$  и  $Q(x)$ , описывающие законы изменения изгибающих моментов и поперечных сил однопролетной балки, и с помощью дискретной переменной  $x := 0, 0.5..20$  задана область их определения  $0 \leq x \leq 20$ .

В рассмотренных выше примерах графики имеют вид в соответствии с параметрами формата, определенными системой при ее запуске. Изменяя параметры первоначального формата, можно придать построенным графикам большую наглядность и информативность. Это осуществляется с помощью диалогового окна форматирования



Для его открытия необходимо выделить формируемый график и ввести команду **X-Y Plot** подменю **Graph** меню **Format** главного меню системы. Окно можно также открыть, установив курсор мыши в области графика и выполнив двойной щелчок левой клавишей. Окно форматирования двумерных декартовых графиков содержит четыре вкладки.

Для упорядочения использования параметров вкладки **X-Y Axes** они объединены в три группы. С помощью группы параметров **Axes Style**, расположенных внизу на вкладке **X-Y Axes**, можно:

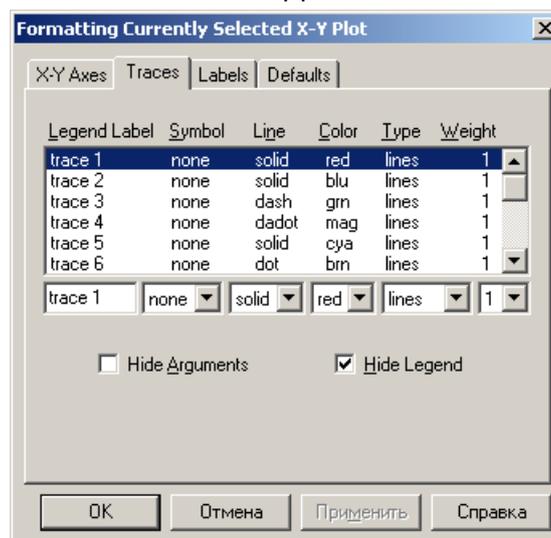
- ввести координатные оси: стандартного вида – параметр **Crossed** и в виде прямоугольника – параметр **Boxed**;
- установить масштабы по осям координат (одинаковые или разные) – параметр **Equal scales**;
- отменить ввод координатных осей – параметр **None**.

Используя группы параметров **X-Axes** или **Y-Axes**, можно для каждой координатной оси:

- выбрать вид числовой шкалы (равномерная или логарифмическая) – параметр **Log Scale**;
- ввести автоматический выбор диапазона изменения числовой шкалы - параметр **AutoScale**;
- показать нумерацию числовой шкалы – параметр **Numbered**;
- назначить величину деления шкалы: автоматическое определение системой – параметр **Auto Grid** и ручное определение – параметр **Numbered of Grids**;
- изобразить координатные линии – параметр **Grid Lines**;
- выделить на графике функции две его характерные точки (корни, экстремумы, разрывы и др.) – параметр **Show Markers**.

Задание указанных параметров производится включением или выключением флажка в окошке соответствующего параметра.

Вторая вкладка **Traces** имеет вид



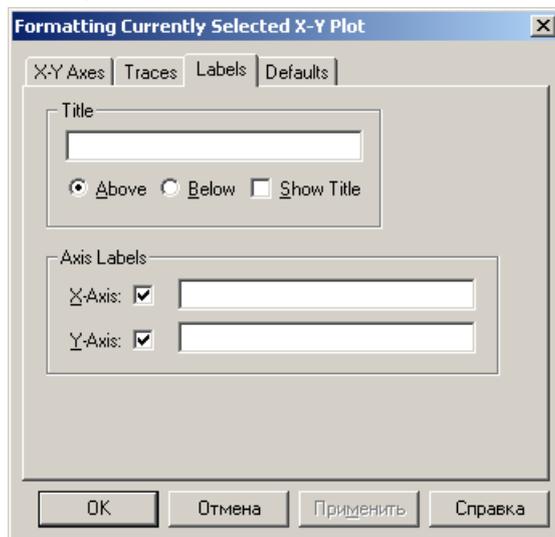
В основу упорядочения структуры параметров вкладки положен список **Legend Label**, состоящий из шестнадцати элементов. Каждый элемент списка соотнесен одному графику и задает ярлык или имя легенды для строки параметров, определяющих вид линии этого графика. Стандартное имя легенды *trace n* ( $1 \leq n \leq 16$ ) может быть изменено с помощью окна редактирования, расположенного под списком элементов.

Параметры каждой строки позволяют:

- задавать тип линии графика – параметр **Line**;
- назначать толщину линии графика – параметр **Weight**;
- определять цвет линии графика – параметр **Color**;
- выбирать тип графика – параметр **Type**;

– вводить символ для выделения узловых точек графика – параметр **Symbol**.

Используя параметры вкладки **Labels**

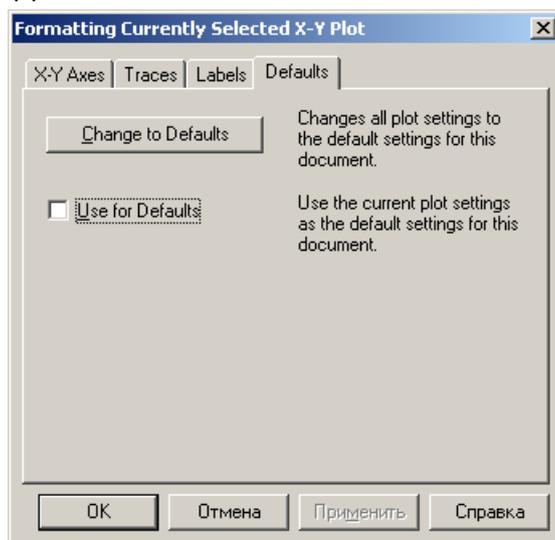


МОЖНО:

– создавать заголовок графика в строке **Title**, определять с помощью параметров **Above** и **Below** его расположение по отношению к области построения графика и осуществлять визуализацию заголовка, для чего необходимо установить курсор мыши в окошко команды **Show Title** и включить флажок щелчком левой клавиши;

– вводить подписи к координатным осям в строках **X-Axes** и **Y-Axes** при включенных флажках в соответствующих окошках.

Четвертая вкладка **Defaults**



позволяет:

- сохранить сделанные изменения параметров для использования их при построении других графиков, для чего необходимо установить курсор мыши в окошко команды **Use for Defaults** и включить флажок щелчком левой клавиши;
- восстановить первоначальные значения параметров, устанавливаемые при запуске системы, с помощью командной кнопки **Change to Defaults**.

#### 4. Создание текстовых блоков

Текстовые блоки позволяют ввести в MathCAD-документ в необходимом объеме словесное описание сути решаемой задачи, ее алгоритма, полученных результатов, а также отдельные текстовые комментарии, поясняющие формулы, графики и другие элементы, связанные с решением задачи, и расположенные рядом с соответствующими элементами. Это придает законченный вид промежуточным и конечным результатам решенной задачи. Например, при выполнении в MathCAD расчетов строительных конструкций использование текстовых блоков позволит быстро и качественно оформить их в форме пояснительной записки.

Для создания текстовых блоков используется команда **Text Region** меню **Insert** главного меню системы. Это позволяет ввести вместо курсора **+** текстовый шаблон



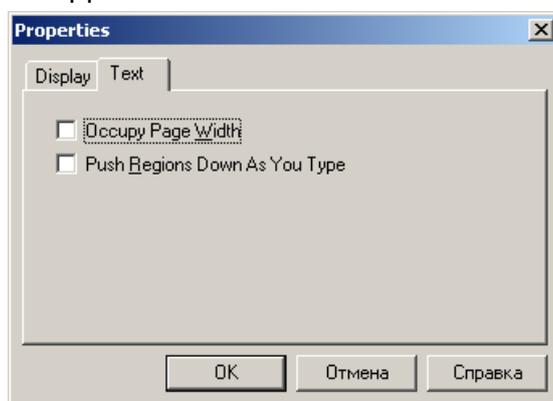
состоящий из прямоугольной рамки, маркеров и курсора в виде красной вертикальной линией, который определяет место для ввода текста. Текстовый шаблон можно также ввести сочетанием клавиш **[Shift + “]**.

Определяющим параметром текстового блока является его ширина, которая не может превышать ширины страницы рабочего листа документа. Возможно задание двух типов текстовых блоков. Текстовый блок первого типа занимает часть ширины страницы рабочего листа, его ширина определяется размером наиболее длинной строки блока и имеет вид отдельного комментария, расположенного в произвольном месте страницы. Текстовый блок второго типа занимает всю ширину страницы и имеет тот

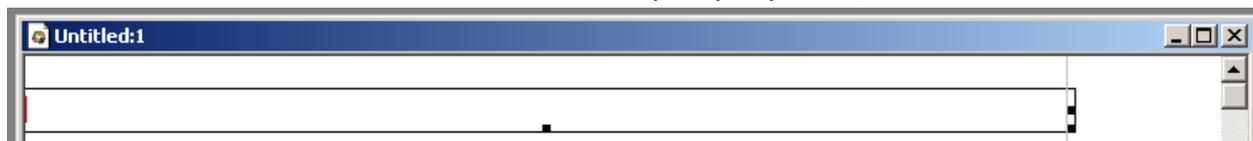
же вид, что и обычный текст, созданный с помощью текстового редактора Microsoft Word.

При создании текстового блока первого типа рамка введенного шаблона задает положение левого верхнего угла блока. По мере ввода текста размеры рамки шаблона изменяются, и задается положение трех остальных углов блока. Кроме того, размеры текстовых блоков могут изменяться с помощью мыши и маркеров рамки шаблона. Для окончания ввода текста необходимо вывести курсор за пределы текстового блока.

Для создания текстового блока второго типа необходимо ввести текстовый шаблон, открыть с помощью команды **Properties** меню **Format** главного меню системы диалоговое окно



и установить флажок в окошко параметра **Occupy Page Width**. В этом случае текстовый шаблон занимает всю ширину страницы



Установка флажка в окошко второго параметра позволяет сохранить неизменным расстояние между текстовыми блоками обоих типов и остальными объектами документа, расположенными ниже блоков. Это происходит за счет автоматического опускания этих объектов по мере появления новых строк текста.

Ввод текста в шаблон, его редактирование и форматирование, копирование и удаление производится в MathCAD с помощью приемов, которые во многом совпадают с аналогичными приемами текстового редактора Microsoft Word. Освоение и применение этих приемов будет осуществляться при оформлении выполненных лабораторных работ.

Создание текстовых блоков большого объема и сложной структуры, включающие графики, рисунки, формулы, можно также осуществлять с помощью редактора Word в виде отдельных файлов. Содержимое таких файлов вставляется в MathCAD-документ с помощью команды **Object** меню **Insert** главного меню системы или с помощью буфера обмена.

Листинг программы расчета МШБ в матричной форме

1. Дискретизация расчетной схемы балки и нагрузки

– число конечных элементов

$$m := 6 \quad k := 1..m$$

– число узлов

$$n := 6 \quad j := 0..n$$

– число расчетных сечений

$$i := 0..n$$

– формирование вектора узловой нагрузки заданной балки (кН)

$$G_0 := 10 \quad G_3 := 8 \quad G_4 := 16 \quad G_5 := 16 \quad G_6 := 8$$

$$G^T = ( 10 \ 0 \ 0 \ 8 \ 16 \ 16 \ 8 )$$

2. Определение коэффициентов свободных членов системы дополнительных уравнений

$$m_{01} := -2 \quad m_{03} := -6 \quad m_{06} := -12 \quad M_{0G} := -432$$

$$q_{01} := 1 \quad q_{03} := 1 \quad q_{06} := 1 \quad Q_{0G} := 48$$

$$m_{41} := 0 \quad m_{43} := 0 \quad m_{46} := -4 \quad M_{4G} := -64$$

$$a_{0,0} := m_{01} \quad a_{0,1} := m_{03} \quad a_{0,2} := m_{06} \quad b_0 := -M_{0G}$$

$$a_{1,0} := q_{01} \quad a_{1,1} := q_{03} \quad a_{1,2} := q_{06} \quad b_1 := -Q_{0G} - 10$$

$$a_{2,0} := m_{41} \quad a_{2,1} := m_{43} \quad a_{2,2} := m_{46} \quad b_2 := -M_{4G}$$

3. Решение системы дополнительных уравнений

$$x := a^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} -3 \\ -39 \\ -16 \end{pmatrix}$$

4. Формирование вектора нагрузки эквивалентной консольной балки

$$X_1 := x_0 = -3 \quad X_3 := x_1 = -39 \quad X_6 := x_2 = -16$$

$$X^T = (0 \ -3 \ 0 \ -39 \ 0 \ 0 \ -16)$$

$$G_{ЭК} := G + X$$

$$G_{ЭК}^T = (10 \ -3 \ 0 \ -31 \ 16 \ 16 \ -8)$$

5. Формирование матрицы влияния изгибающих моментов эквивалентной консольной балки

$$i := 0..6$$

$$L_{m_{i,0}} := 0 \cdot (i \leq 6)$$

$$L_{m_{i,1}} := [-2(i=0)] + 0 \cdot (i > 1)$$

$$L_{m_{i,2}} := [-4(i=0)] + [-2(i=1)] + 0 \cdot (i > 1)$$

$$L_{m_{i,3}} := [-6(i=0)] + [-4(i=1)] + [-2(i=2)] + 0 \cdot (i > 2)$$

$$L_{m_{i,4}} := [-8(i=0)] + [-6(i=1)] + [-4(i=2)] \dots$$

$$+ [-2(i=3)] + 0 \cdot (i > 3)$$

$$L_{m_{i,5}} := [-10(i=0)] + [-8(i=1)] + [-6(i=2)] \dots$$

$$+ [-4(i=3)] + [-2(i=4)] + 0 \cdot (i > 4)$$

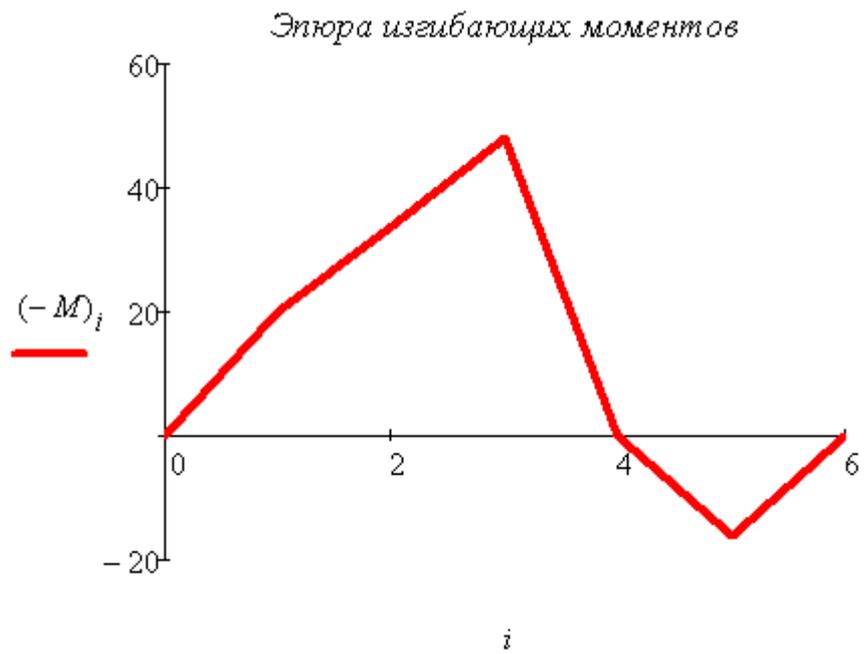
$$L_{m_{i,6}} := [-12(i=0)] + [-10(i=1)] + [-8(i=2)] \dots$$

$$+ [-6(i=3)] + [-4(i=4)] + [-2(i=5)] + 0 \cdot (i > 5)$$

$$L_m = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 & -6 & -8 & -10 & -12 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -6 & -8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & -6 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Получение вектора и построение эпюры изгибающих моментов заданной балки (кНм)

$$M := L_m \cdot G_{ЭК} \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ -34 \\ -48 \\ 0 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}$$



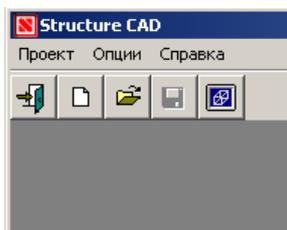
## Краткие справочные сведения о применении ПВК SCAD для расчета плоских стержневых конструкций<sup>12</sup>

### 1. Запуск программы SCAD

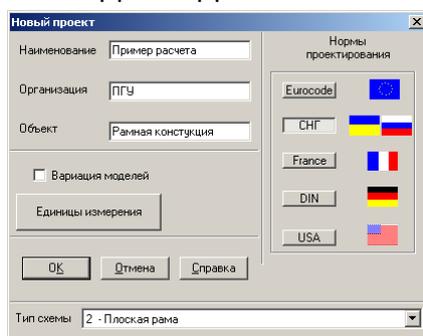
Запуск для работы ПВК SCAD ничем не отличается от запуска других Windows-приложений и может осуществляться двумя способами. Первый способ основан на использовании команды **SCAD** в подменю **SCAD Office** меню **Программы**, которая открывается кнопкой **Пуск**, расположенной на Рабочем столе Windows в левом нижнем углу. Во втором способе может

использоваться специальный ярлык системы , созданный на рабочем столе.

На экране появится окно, информирующее о загрузке программы, содержащее меню из трех разделов – **Проект**, **Опции**, **Справка** и инструментальную панель из 5 кнопок:



Для выполнения нового расчета нажимается кнопка<sup>13</sup>  «Создать новый проект». На экран выводится диалоговое окно **Новый проект**



<sup>12</sup> Составлены с использованием Перельмутер, А.В. и др. Проектно-вычислительный комплекс SCAD. Руководство пользователя.

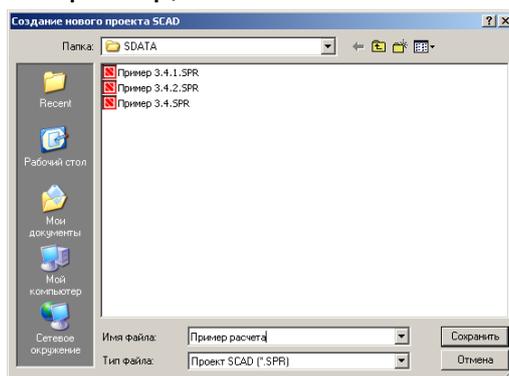
<sup>13</sup> Здесь и всюду ниже нажатие кнопок осуществляется с помощью курсора и левой клавиши мыши.

В окне «Наименование» записывается имя, присваиваемое создаваемому проекту. В окне «Организация» записывается информация, связанная с местом работы (учебы) автора проекта. В окне «Объект» указывается вид проектируемого объекта.

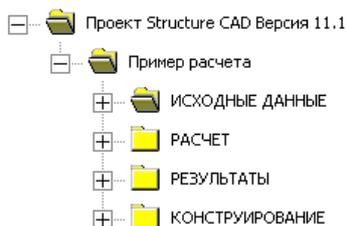
Для назначения единиц измерения, которые будут использоваться при расчете, открывается окно «Единицы измерения» и выбирается система единиц измерения, связанная с соответствующими «Нормами проектирования», например, SI или MKGS для норм проектирования в СНГ.

Для выбора типа схемы необходимо открыть список в окне «Тип схемы» и указать в нем тип схемы, соответствующий рассчитываемому объекту.

Для сохранения введенных данных необходимо в диалоговом окне **Новый проект** нажать кнопку ОК. После этого на экран будет выведено новое окно **Создание нового проекта SCAD**, в котором необходимо задать имя файла, повторив, например, наименование объекта



Выполнение команды «Сохранить» позволяет создать файл в папке SDATA и выйти в окно со схемой, которая называется **Дерево проекта**



Дерево проекта включает четыре раздела первого уровня: **Исходные данные, Расчет, Результаты и Конструирование.**

## 2. Создание расчетной схемы

Расчетная схема стержневой системы создается в трехмерной системе координат. В ПВК SCAD используется правая система координат XYZ. Плоская стержневая система находится в плоскости XOZ. Положение начала системы осей координат на плоскости XOZ назначается расчетчиком.

Для начала работы по созданию расчетной схемы нажимается пиктограмме  **Расчетная схема**. В результате откроется рабочее окно по созданию расчетной схемы, содержащее инструментальную панель



На открывшейся панели имеется шесть разделов, названия которых указаны внизу панели. Каждому разделу соответствует свой набор рабочих кнопок, расположенных в средней части панели.

Создание расчетной схемы плоской стержневой конструкции в ПВК SCAD включает следующие шаги;

- 1.Получение графического изображения расчетной схемы конструкции
- 2.Задание жесткостных характеристик стержней конструкции.
- 3.Описание опорных устройств конструкции
- 4.Установка шарниров в узлах конструкции

### **2.1. Получение графического изображения**

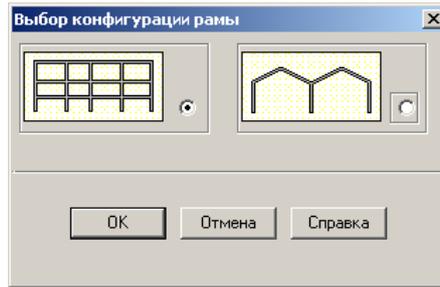
В ПВК SCAD реализованы два способа получения графического изображения расчетных схем плоских стержневых систем. Первый способ основан на использовании типовых схем таких систем. В основе второго способа лежит последовательный ручной ввод узлов и элементов стержневых систем. Возможна также комбинация этих способов.

Для получения графического изображения расчетной схемы конструкции первым способом необходимо с помощью левой клавиши мыши войти в раздел **Схема** инструментальной панели

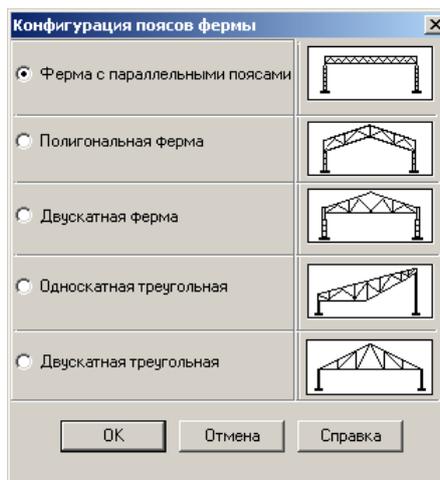


Для построения геометрической схемы рамных и балочных конструкций следует нажать первую кнопку на инструментальной панели этого раздела, а для ферменных конструкций – вторую.

При нажатии первой кнопки появится рабочее окно с предлагаемыми вариантами геометрических схем типовых рамных конструкций

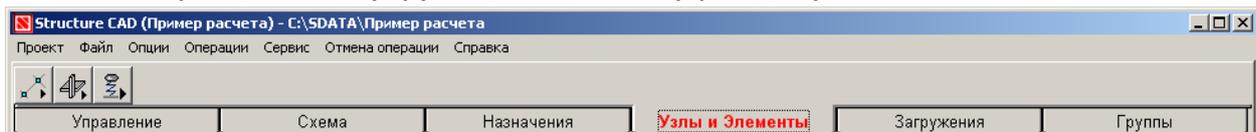


При нажатии второй кнопки появится рабочее окно с предлагаемыми вариантами геометрических схем типовых ферменных конструкций



Для выбора требуемого варианта, как в первом, так и во втором случае, необходимо с помощью левой клавиши мыши отметить его точкой и нажать кнопку ОК. Далее для продолжения и завершения процесса создания геометрической схемы стержневой конструкции необходимо в диалоговом режиме следовать указаниям, которые появляются при открытии последующих рабочих окон.

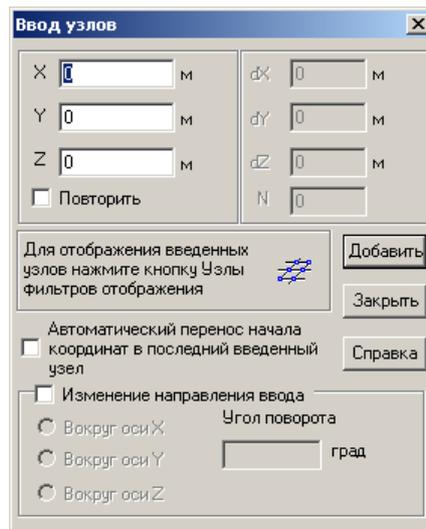
Для создания графического изображения расчетной схемы стержневой конструкции ручным способом необходимо на инструментальной панели войти в раздел **Узлы и элементы** с помощью левой клавиши мыши. После этого появится инструментальная панель с набором рабочих кнопок, соответствующих этому функциональному разделу



Нажимаем кнопку  «Узлы» и на инструментальной панели появляются кнопки для работы с узлами расчетной схемы



Нажимаем кнопку  «Ввод узлов» и открываем одноименное диалоговое окно для ввода координат узлов<sup>14</sup>



Вводим нулевые координаты первого узла и нажимаем кнопку «Добавить». В результате, при нажатой на панели фильтра отображения кнопке , в поле рабочего окна появится изображение узла, а при нажатой кнопке  - номер узла. Затем, в соответствии с принятой нумерацией узлов, вводим координаты остальных узлов стержневой системы.

Для ввода элементов стержневой системы необходимо на инструментальной панели перейти в раздел **Узлы и элементы**, нажать кнопку  «Элементы»



<sup>14</sup> Перед выполнением этой операции рекомендуется изобразить на бумаге вид геометрической схемы стержневой системы с нумерацией узлов и элементов. Нумерацию узлов и элементов рекомендуется осуществлять слева направо и сверху вниз.

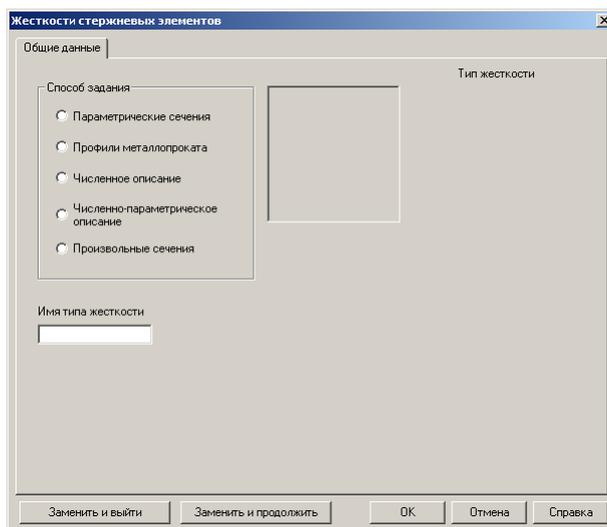
и в изменившемся ряде рабочих кнопок нажать кнопку  «Добавление стержней». При этом произойдет изменение формы курсора. Установить курсор на начальный узел первого элемента, нажать левую клавишу мыши и, не отпуская её, провести линию до конечного узла элемента. Отпустить клавишу, снова нажать и отпустить. Если при этом на фильтре отображения нажата кнопка  «Номера элементов», то появится номер введенного элемента. Далее повторить аналогичные действия для следующих элементов. При этом рекомендуется горизонтальные элементы рисовать слева направо, а вертикальные – снизу вверх.

### а. Задание жесткостных характеристик

Для задания жесткостных характеристик элементов расчетной схемы конструкции перейти в раздел **Назначение**



нажимаем кнопку  **Назначение жесткостей стержням** и попадаем в диалоговое окно



Выбираем требуемый способ задания жесткостей стержней. Далее для продолжения этого процесса необходимо в диалоговом режиме следовать указаниям, которые появляются при открытии последующих рабочих окон. Для завершения задания жесткостей стержней нажимаем кнопку ОК диалогового окна и возвращаемся к графическому изображению рас-

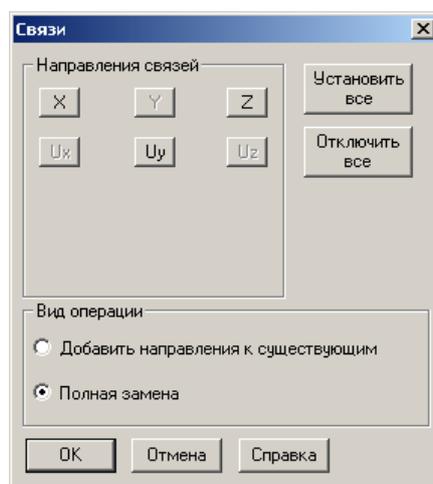
четной схемы. После на этой схеме с помощью курсора и левой клавиши мыши отмечаем стержни, к которым относится заданная жесткость, и нажимаем кнопку **Подтверждение**  инструментальной панели.

## в. Описание опорных устройств

Типовые опорные устройства плоской стержневой конструкции, полностью или частично исключают перемещения сечений, примыкающих к нему стержней, описываются в виде некоторого набора жестких связей. Для задания связей, описывающих некоторое опорное устройств, в разделе **Назначения**



нажимаем кнопку  «Установка связей в узлах» и попадаем в диалоговое окно **Связи**



Так как для плоской стержневой системе расчетная схема находится в плоскости  $XOZ$ , то для описания опорных устройств таких систем могут использоваться три кнопки:

- кнопка **X** вводит связь, исключая линейное смещение в направлении оси  $X$  (горизонтальное перемещение сечения элемента, примыкающего к опоре);
- кнопка **Z** вводит связь, исключая линейное смещение в направлении оси  $Z$  (вертикальное перемещение сечения элемента, примыкающего к опоре);

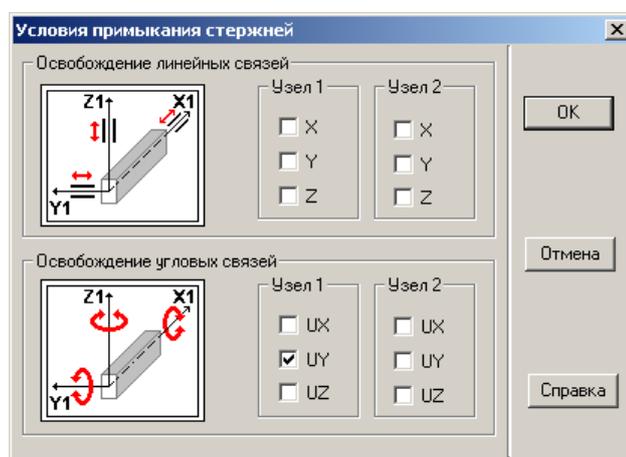
– кнопка **UY** вводит связь, исключающую поворот вокруг оси  $Y$  в плоскости  $XOZ$  (угол поворота опорного сечения элемента, примыкающего к опоре).

Для задания связей, описывающих конкретное опорное устройство, необходимо в режиме **Полная замена** нажать соответствующие кнопки **X**, **Z**, **UY** и кнопку **OK**. Затем отметить курсором на графическом изображении расчетной схемы рассматриваемый опорный узел и нажать кнопку **Подтверждение** .

### с. Установка шарниров в узлах конструкции

Так как шарнир позволяет сечениям примыкающих элементов свободно поворачиваться, то его появление в некотором жестком узле означает удаление связи, мешающей сечениям этих элементов поворачиваться вокруг оси  $Y$  в плоскости  $XOZ$ .

Для установки шарнира в узел в разделе **Назначение** нажимаем кнопку **Установка шарниров**  и попадаем в диалоговое окно **Условия примыкания стержней**



Установка шарнира может быть выполнена на любом элементе<sup>15</sup>, примыкающем к данному узлу. Для этого следует выключить угловую связь **UY** в соответствующем узле элемента, отметив её в диалоговом окне галочкой с помощью курсора и левой клавиши мыши.

Для завершения установки шарниров нажимаем кнопку **OK** диалогового окна и возвращаемся к графическому изображению расчетной схемы. Последовательно подводим курсор к элементам расчетной схемы, где должны быть установлены шарниры и нажимаем левую клавишу мыши.

<sup>15</sup> Элементы в диалоговом окне рассматриваются в местной координатной системе.

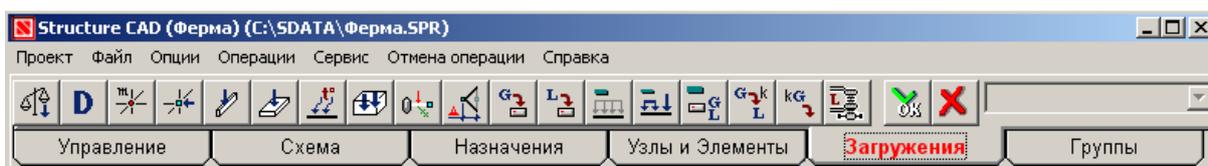
Выбранные элементы окрасятся красным цветом. Затем следует нажать кнопку **Подтверждение**  и на расчетной схеме при нажатой кнопке  на панели **Фильтры отображения** появятся введенные шарниры.

### 3.Задание загрузений конструкции

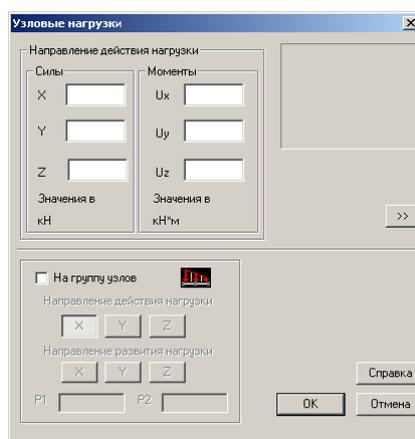
Этот этап включает:

- задание схемы узловой нагрузки стержневой конструкции – узловые силы и моменты;
- задание схем нагружения стержней конструкции – сосредоточенные, распределенные (прямоугольные и трапециевидные) силы и моменты.

Для задания нагрузок, приложенных к узлам конструкции, перейдем в раздел **Загружения**



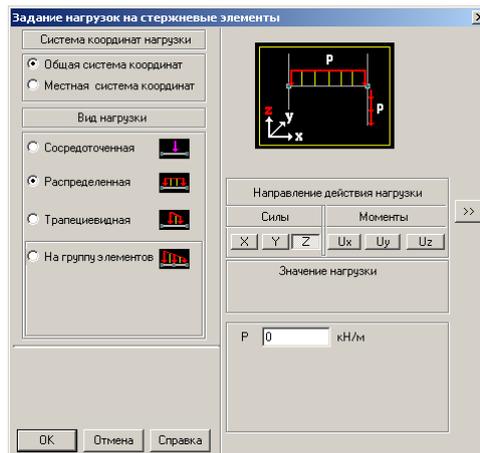
нажимаем кнопку **Узловые нагрузки**  и попадаем в диалоговое окно **Узловые нагрузки**



В диалоговом окне назначаем вид, направление и значение узловой нагрузки и нажимаем кнопку ОК. На графическом изображении расчетной схемы с помощью курсора и левой клавиши мыши отмечаем узел, к которому прикладывается нагрузка, и нажимаем кнопку **Под-**

**тверждение**  инструментальной панели. Далее процедура повторяется для остальных нагруженных узлов конструкции.

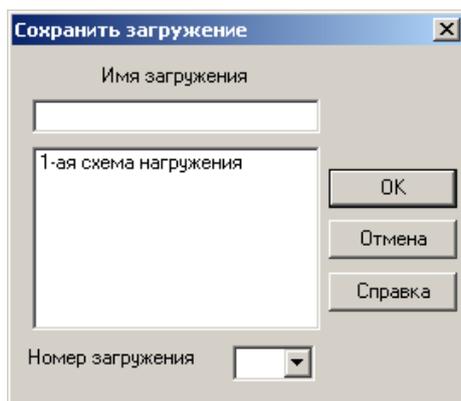
Для задания нагрузок, приложенных к стержням конструкции, в разделе **Загружения** нажимаем кнопку **Нагрузки на стержни**  и попадаем в диалоговое окно **Задание нагрузок на стержневые элементы**



В диалоговом окне назначаем вид, направление и значение стержневой нагрузки и нажимаем кнопку ОК. На графическом изображении расчетной схемы с помощью курсора и левой клавиши мыши отмечаем стержень, к которому прикладывается нагрузка, и нажимаем кнопку **Подтверждение**  инструментальной панели. Далее процедура повторяется для остальных нагруженных стержней конструкции.

Для визуального просмотра введенных одновременно действующих нагрузок и их значений на панели **Фильтры отображения** нажимаем кнопки **Распределенные нагрузки**  и (или) **Сосредоточенные нагрузки** , а также кнопку **Значения нагрузок** .

Для завершения формирования схемы загрузки конструкции её необходимо сохранить под определенным номером. С этой целью в разделе **Загружения** нажимаем кнопку **Сохранить/Добавить загрузение** . В появившемся диалоговом окне **Сохранить загрузение**



задаем имя загрузки и нажимаем кнопку ОК для подтверждения сохранения созданного загрузки под этим именем.

#### 4. Расчет стержневой конструкции

Для выполнения расчета стержневой конструкции, после завершения создания расчетной схемы и задания нагрузок конструкции, переходим в раздел **Управление**, нажимаем кнопку **Выйти в экран управления проектом**  и выходим в окно со схемой **Дерево проекта**.

Для начала расчета стержневой конструкции подведем курсор к пиктограмме  **Линейный** и нажмем левую клавишу мыши. В открывшемся рабочем окне **Параметры расчета**, выбираем функцию «Полный расчет» и нажимаем кнопку ОК.

В результате появится информационное окно о формировании и ходе решения системы разрешающих уравнений МКЭ рассчитываемой конструкции. По окончании их решения появится информация «Задание выполнено». После этого нажимаем кнопку **Выход** и возвращаемся в окно со схемой **Дерево проекта**, где становится доступным раздел **Результаты**. Полученные результаты расчета стержневой конструкции могут быть представлены графически в виде эпюр и численно в виде таблиц.

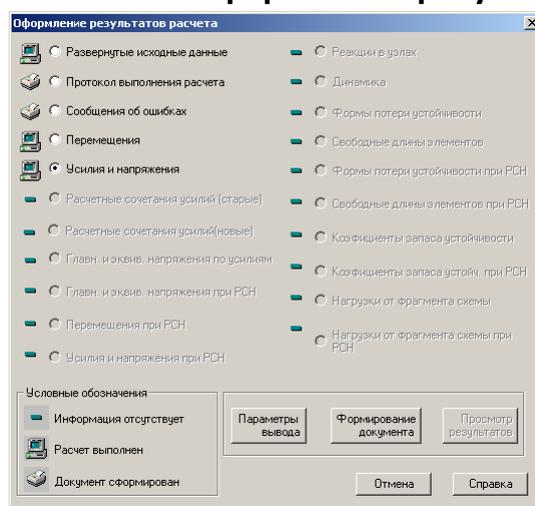
#### 5. Просмотр полученных результатов расчета

Для просмотра результатов расчета в графической форме в разделе **Результаты**. подводим курсор к пиктограмме  **Графический анализ** и нажимаем левую клавишу мыши. На инструментальной панели открывшегося рабочего окна входим в раздел **Эпюры усилий**



Для вывода на экран построенных эпюр внутренних усилий рассчитанной конструкции выбираем вид интересующего внутреннего усилия (M, Q или N) и нажимаем кнопку **Эпюры усилий** .

Для просмотра результатов в численной форме в разделе **Результаты**, подводим курсор к пиктограмме  **Печать таблиц** и нажимаем левую клавишу мыши. В рабочем окне **Оформление результатов расчета**



отмечаем точкой пиктограмму  **Усилия и напряжения** и нажимаем кнопку **Параметры вывода**. В открывшемся рабочем окне **Состав выходных таблиц** в диалоговом режиме выполняем все операции, связанные с указанием списка элементов, списка загрузжений, параметров оформления и выходных единиц измерения, которые должны быть учтены при формировании таблиц с численными значениями результатов расчета.

После этого последовательно нажимаем кнопки «Формирование документа» и «Просмотр результатов». В результате появится окно с таблицей искомых внутренних усилий M, Q, N.

## ГЛОССАРИЙ МОДУЛЯ

### ***Внутренние силы***

Internal forces

Силы взаимодействия между частями элемента конструкции, расположенные по разные стороны поперечного сечения и возникающие от действия внешних сил.

### ***Полное напряжение***

Total stress

Векторная величина, характеризующая интенсивность внутренних сил в произвольной точке поперечного сечения на единицу его площади.

### ***Нормальное напряжение***

Normal stress

Проекция вектора полного напряжения на нормаль к плоскости сечения.

### ***Касательное напряжение***

Shear stress

Проекция вектора полного напряжения на плоскость сечения.

### ***Изгибающий момент***

Bending moment

Взятый относительно каждой из главных центральных осей поперечного сечения стержня момент внутренних сил, возникающих в поперечном сечении при их приведении к центру тяжести этого сечения.

### ***Поперечная сила***

Shear force

Направленная вдоль каждой из главных центральных осей сечения стержня проекция главного вектора внутренних сил, возникающих в поперечном сечении при их приведении к центру тяжести этого сечения.

<p><b>Продольная сила</b> Axial force</p>	<p>Направленная по касательной к оси стержня проекция главного вектора внутренних сил, возникающих в поперечном сечении при их приведении к центру тяжести этого сечения.</p>
<p><b>Простая статически определимая система</b> Simple statically indeterminate structure</p>	<p>Статически определимая система, которая будучи отделенной от опор является единым диском без внутренних связей</p>
<p><b>Составная статически определимая система</b> Composite statically indeterminate structure</p>	<p>Статически определимая система, которая будучи отделенной от опор не является единым диском</p>
<p><b>Метод сечений</b> Method of sections</p>	<p>Метод, который позволяет рассматривать внутренние силы как внешние и включать их в уравнения равновесия.</p>
<p><b>Статический метод</b> Static method</p>	<p>Метод определения внутренних усилий в плоских статически определимых стержневых конструкциях от неподвижной нагрузки, основанный на использовании метода сечений и уравнений равновесия отдельных частей конструкций.</p>
<p><b>Кинематический метод</b> Kinematic method</p>	<p>Метод определения внутренних усилий в плоских статически определимых стержневых конструкциях от неподвижной нагрузки, основанный на освобождении системы от соответствующих кинематических</p>

связей и использовании принципа возможных перемещений.

***Метод замены связей***

Relations replacement method

Метод определения внутренних усилий в плоских составных статически определимых стержневых конструкциях от неподвижной нагрузки, основанный на переходе от расчета заданной составной конструкции к расчету эквивалентной простой конструкции.

***Дискретизация расчетной схемы***

Discretization of design scheme

Представление расчетной схемы стержневой конструкции в виде совокупности конечных элементов, соединенных между собой в отдельных узлах, и выделенными расчетными сечениями.

***Дискретизация нагрузки***

Discretization of load

Замена заданной нагрузки, приложенной к стержневой конструкции, статически эквивалентной системой сосредоточенных сил, приложенных в узлах дискретной расчетной схемы.

***Вектор нагрузки***

The load vector

Вектор, элементами которого являются сосредоточенные силы, приложенные в узлах дискретной расчетной схемы.

***Вектор внутреннего усилия***

Vector internal effort

Вектор, элементами которого являются внутренние усилия, возникающие в расчетных сечениях дискрет-

ной расчетной схемы.

**Матрица влияния внутреннего усилия**

Matrix effect of internal effort

Матрица, осуществляющая линейное преобразование вектора нагрузки в вектор внутренних усилий.