

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования  
«Полоцкий государственный университет»

СЕРИЯ «САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ»

Л.С. Турищев

## **РАСЧЕТ ТРЕХШАРНИРНЫХ АРОК**

Электронное учебное пособие  
для студентов строительных специальностей

*Текстовое электронное издание*

Новополоцк  
Полоцкий государственный университет  
2020

УДК 624.04(075.8)

ББК 38.112я73

Одобрено и рекомендовано к изданию методической комиссией  
инженерно-строительного факультета  
в качестве методического пособия  
(протокол № 5 от 27.06.2017)

Кафедра прикладной механики и графики

**РЕЦЕНЗЕНТЫ:**

канд. техн. наук, доц., зав. кафедры строительных конструкций

**А.И. КОЛТУНОВ**

канд. техн. наук, доц., доц. кафедры строительных конструкций

**Е.Д. ЛАЗОВСКИЙ**

**Турищев, Л. С.**

Расчет трехшарнирных арок [Электронный ресурс] : электрон. учеб. пособие для студентов строит. специальностей / Л.С. Турищев. – Новополюцк : Полоц. гос. ун-т, 2020. – 1 электрон. опт. диск (CD-R).

ISBN 978-985-531-706-8.

На основе структурно-логических схем приведены рекомендации по технологии формирования междисциплинарной системы знаний, связанных с базовыми теоретическими положениями и понятиями модуля. Содержатся указания по приобретению умений и навыков, связанных с практическим применением знаний для решения типовых задач модуля. Имеется банк тестовых заданий для самоконтроля, связанных с изучаемым модулем. Приведен список рекомендуемой учебной литературы, интернет-источников. Составлен глоссарий модуля.

Предназначено для самостоятельной работы студентов строительных специальностей всех форм обучения при изучении курса «Строительная механика».

**№ госрегистрации 3302023416**

**ISBN 978-985-531-706-8**

© Турищев Л.С., 2020

© Полоцкий государственный университет, 2020

Для создания текстового электронного издания «Расчет трехшарнирных арок» Л.С. Турищева использованы текстовый процессор Microsoft Word и программа Adobe Acrobat XI Pro для создания и просмотра электронных публикаций в формате PDF.

Материалы включены в Государственный регистр информационного ресурса. Регистрационное свидетельство № 3302023416 от 09.09.2020 г.

**Технические требования:**

1 оптический диск.

**Системные требования:**

PC не ниже класса Pentium;

32 Mb RAM; свободное место на HDD 16 Mb;

Windows 95/98/Me/2000/XP/7;

Дисковод CD-ROM 2-скоростной и выше;

мышь

Редактор *О.Ю. Тарасевич*  
Техническое редактирование *О.Ю. Тарасевич*  
Компьютерный дизайн *М.С. Мухоморовой*

---

Подписано к использованию 11.09.2020.

Объем издания: 3,5 Мб. Заказ 423.

---

Свидетельство о государственной регистрации  
издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 1/305 от 22.04.2014.

211440, ул. Блохина, 29,  
г. Новополоцк,  
Тел. 8 (0214) 59-95-41, 59-95-44  
<http://www.psu.by>

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	5
1. РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА МОДУЛЯ .....	6
2. УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ МОДУЛЯ.....	9
3. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ И УМЕНИЙ.....	14
3.1 Тестовые задания первого уровня .....	15
3.2 Тестовые задания второго уровня .....	20
3.3 Тестовые задания третьего уровня .....	24
3.4 Ответы на тестовые задания первого и второго уровней.....	26
3.5 Рекомендации к выполнению тестовых заданий третьего уровня.....	29
ЛИТЕРАТУРА.....	30
ГЛОССАРИЙ МОДУЛЯ .....	32
ПРИЛОЖЕНИЕ 1 .....	34

## ВВЕДЕНИЕ

Для перекрытия пролетов в зданиях различного назначения, наряду с рассмотренными ранее стержневыми конструкциями (балки, рамы, фермы), широко применяются арки. Арка представляет собой кривой брус, опертый на две неподвижные опоры.

По типу конструкций опор, исключая их горизонтальные перемещения, принято различать бесшарнирные, двухшарнирные и трехшарнирные арки. Если конструкции, на которые опираются двухшарнирные или трехшарнирные арки, не позволяют исключить горизонтальные перемещения опор арок, то в этих случаях в арках устанавливаются дополнительные горизонтальные стержни с шарнирами по концам, именуемые затяжками.

Как архитектурно-строительные конструкции арки возникли еще до нашей эры, применялись при возведении акведуков и мостов, дворцов и соборов, и они были обычно каменными. В настоящее время арки могут изготавливаться из железобетона, дерева, металла и композиционных материалов. В случае установки затяжки в арке она, как правило, выполняется металлической.

По конструктивной форме тела арки могут быть сплошными массивными, сплошными тонкостенными и решетчатыми. Поперечные сечения сплошных и тонкостенных арок могут быть прямоугольные, двутавровые и коробчатые. Тела решетчатых арок, как правило, представляют собой простые фермы с треугольной или раскосной решеткой.

В настоящем пособии рассматривается расчет сплошных массивных трехшарнирных арок без затяжки и с затяжкой.

# 1. РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА МОДУЛЯ

Изучение теоретического материала модуля следует начинать с повторения рекомендаций по изучению курса в целом согласно [13]. Содержание изучаемого модуля связано с общими положениями и понятиями расчета трехшарнирных арок при действии неподвижной и подвижной нагрузок. Структурно-логическая схема ключевых понятий, принципов, терминов рассматриваемого модуля, которые подлежат пониманию и усвоению согласно [2], приведена на рисунке 1.

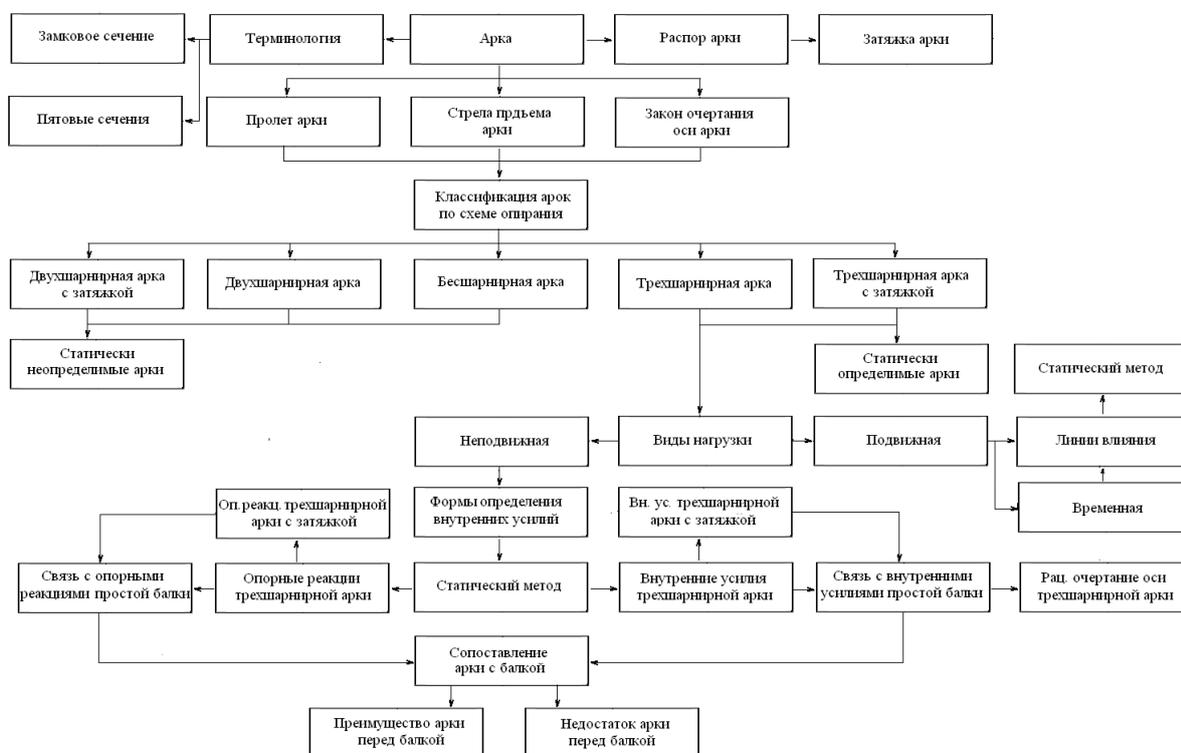


Рисунок 1. – Структурно-логическая схема ключевых понятий, принципов, терминов изучаемого модуля

Изучение материала модуля должно проходить в определенном порядке:

- 1) Ознакомиться с понятиями *арка*<sup>1</sup>, *распор* арки и *затяжка* арки.
- 2) Усвоить систему терминов, связанную с описанием геометрии арки и используемые при их расчете, – *пята арки*, *пятовый шарнир арки*,

<sup>1</sup> Здесь и далее полужирным курсивом выделяются термины и понятия курса, знание которых студентом является обязательным

**замок арки, замковый шарнир арки, пролет арки, стрела подъема арки.** Кроме того, здесь важно понять описание геометрии арки связано с введением некоторой плоской декартовой координатной системы, заданием закона очертания её оси и использованием параметров для описания положения произвольного сечения арки – координаты центра тяжести сечения и угол наклона касательной к оси арки.

Существуют типы арок, используемые при возведении строительных сооружений, – **бесшарнирная арка, двухшарнирная арка, двухшарнирная арка с затяжкой, трехшарнирная арка, трехшарнирная арка с затяжкой.** И важно разобраться с особенностями их схем опирания и статических признаков.

3) Изучить определения статическим методом опорных реакций и внутренних усилий от неподвижной вертикальной нагрузки в симметричной трехшарнирной арке с опорами в одном уровне. При этом важную роль играет их взаимосвязь с опорными реакциями и внутренними усилиями простой балки, имеющую одинаковые с аркой пролет и схему нагружения. Это позволяет сопоставить работу двух конструкций и выявить преимущества и недостатки каждой из них.

При сопоставлении работы трехшарнирной арки с балкой при действии вертикальной нагрузки изгибающие моменты и поперечные силы в арке существенно меньше аналогичных внутренних усилий в балке. Однако при этом в арке возникают значительные сжимающие продольные силы, которые отсутствуют в балке при действии вертикальной нагрузки. Следует разобраться, почему появление продольных сил приводит не к увеличению, а к уменьшению размеров поперечных сечений арки по сравнению с аналогичной балкой, что является преимуществом арки перед балкой.

4) Разобраться, почему возникновение распора в арке является её недостатком по сравнению балкой и как использование затяжки позволяет, сохраняя преимущество арки перед балкой, избавиться от её недостатка.

5) Познакомиться с **рациональным очертанием оси арки**, приемами качественного анализа распределения внутренних усилий в трехшарнирной арке при действии вертикальной нагрузки и построением очертаения их эпюр без выполнения расчетов.

6) Выяснить, каковы особенности её расчета при расположении опор в разных уровнях при действии произвольной нагрузки и что изменится в расчете, если очертание арки не будет симметричным.

7) Приступить к изучению построения линий влияния внутренних усилий, возникающих в сечениях симметричной трехшарнирной арки. При этом важно понять два момента. Во-первых, необходимость уменений строить линии влияния вызывается тем, что арки могут подвергаться действию как подвижной, так и временной нагрузок. И, во-вторых, линии влияния внутренних усилий в арках проще строить статическим методом.

Для усвоения материала рассматриваемого модуля курса, прежде всего, необходимо повторить следующие понятия, термины, принципы и методы, изученные в модулях:

– *«Введение в строительную механику» – линейно деформируемая система, принцип независимости действия сил, статически определимые системы* [10, с.11–24].

– *«Методы определения внутренних усилий от неподвижной нагрузки в плоских статически определимых стержневых системах» – внутренние усилия, изгибающий момент, поперечная сила, продольная сила, статический метод определения внутренних усилий* [10, с.42–55].

– *«Методы определения внутренних усилий от подвижной нагрузки в плоских статически определимых стержневых системах» – линия влияния, ордината линии влияния, статический способ построения линий влияния* [10, с.56–77].

При изучении материала модуля рекомендуется использование следующей литературы: [4, с.95–112]; [5, с.78–106]; [6, с.182–200]; [10, с.113–136]; [14, с.77–96].

## 2. УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ МОДУЛЯ

После завершения изучения теоретического материала модуля, его понимания и усвоения можно переходить к применению полученных знаний для решения типовых задач модуля. Согласно утвержденной учебной программе курса [3] вы должны уметь определять внутренние усилия в симметричной трехшарнирной арке при действии вертикальной нагрузки.

Для приобретения умений решения задач, приведенных в [9], [10], [15], [17], [18], рекомендуется сначала внимательно прочитать указания к её решению и разобраться с приводимым примером.

### Задачи на определение внутренних усилий в симметричной трехшарнирной арке при действии вертикальной нагрузки

При действии вертикальной нагрузки вертикальные составляющие опорных реакций трехшарнирной арки равны опорным реакциям соответствующей балки

$$V_A = V_A^0, \quad V_B = V_B^0.$$

Распор арки ( $H$ ) определяется по формуле

$$H = \frac{M_C^0}{f},$$

где  $M_C^0$  – изгибающий момент в сечении балки под замковым шарниром арки,  $f$  – стрела подъема арки.

Для определения изгибающего момента, поперечной и продольной сил в произвольном сечении  $K$  используются следующие формулы:

$$M_K = M_K^0 - H(f - y_K),$$

$$Q_K = Q_K^0 \cos \varphi_K - H \sin \varphi_K,$$

$$N_K = -Q_K^0 \sin \varphi_K - H \cos \varphi_K.$$

Здесь  $M_K^0$ ,  $Q_K^0$  – изгибающий момент и поперечная сила в сечении балки под рассматриваемым сечением арки;  $y_K$ ,  $\varphi_K$  – ордината сечения  $K$  и угол наклона касательной к оси арки в этом сечении.

Для вычисления тригонометрических функций угла  $\varphi$ , имея аналитическое выражение оси арки  $y = f(x)$ , целесообразно использовать следующие формулы:

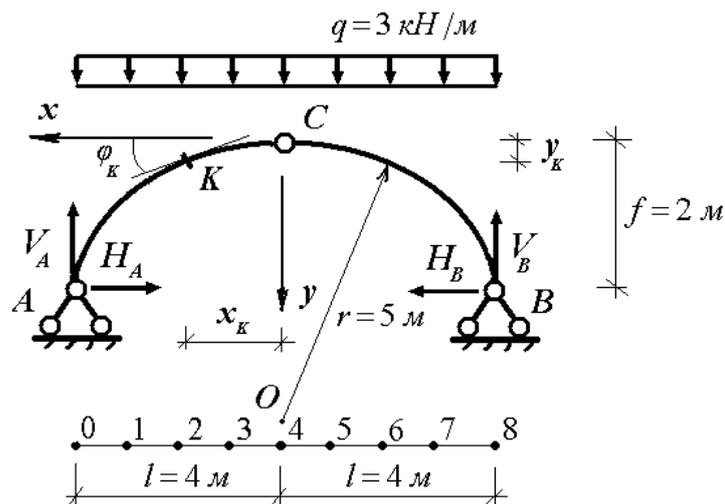
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx};$$

$$\sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}};$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}.$$

**Пример 1.** Для трехшарнирной арки, показанной на рисунке 2, определить внутренние усилия в сечениях через  $1/8$  пролета арки и построить их эпюры. Арка очерчена по дуге окружности.

$$y = r - \sqrt{r^2 - x^2}.$$



**Рисунок 2.** Трехшарнирная балка

Характерные геометрические величины для заданных сечений приведены в таблице 1.

Таблица 1. – Характерные геометрические величины для сечений

№ сеч.	x (м)	$\sqrt{r^2 - x^2}$ (м)	$y = r - \sqrt{r^2 - x^2}$ (м)	f-y (м)	$\cos \varphi = \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r}$	$\sin \varphi = \frac{x}{r}$
0	4	3,00	2,00	0,00	0,600	0,800
1	3	4,00	1,00	1,00	0,800	0,600
2	2	4,58	0,417	1,58	0,917	0,400
3	1	4,90	0,101	1,90	0,980	0,200
4	0	5,00	0,00	2,00	1,000	0,000
5	-1	4,90	0,101	1,90	0,980	-0,200
6	-2	4,58	0,417	1,58	0,917	-0,400
7	-3	4,00	1,00	1,00	0,800	-0,600
8	-4	3,00	2,00	0,00	0,600	-0,800

Рассмотрим балку, которая имеет с аркой одинаковые пролет и схему нагружения (рисунок 3, а). Определим для нее опорные реакции

$$V_A^0 = V_B^0 = ql = 3 \cdot 4 = 12 \text{ кН}$$

и внутренние усилия от заданной нагрузки в произвольном сечении K

$$M_K^0 = V_A^0(l - x_K) - \frac{q(l - x_K)^2}{2} = 12(4 - x_K) - 1,5(4 - x_K)^2,$$

$$Q_K^0 = V_A^0 - q(l - x_K) = 12 - 3(4 - x_K).$$

Эпюры балочных внутренних усилий показаны на рисунке 3, б.

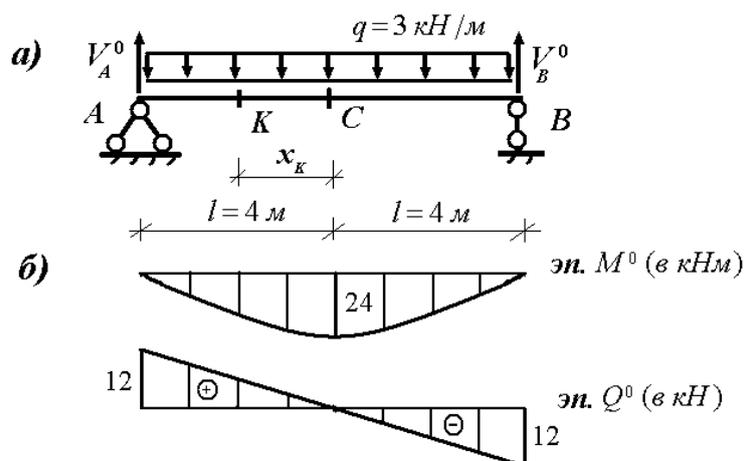


Рисунок 3. – а) балка, имеющая с аркой одинаковые пролет и схему нагружения; б) эпюры балочных внутренних усилий

Определим для трехшарнирной арки от заданной нагрузки опорные реакции

$$V_A = V_B = 12 \text{ кН},$$

$$H = \frac{M_C^0}{f} = \frac{24}{2} = 12 \text{ кН}$$

и внутренние усилия в произвольном сечении  $K$

$$M_K = M_K^0 - H(f - y_K) = M_K^0 - 12(2 - y_K),$$

$$Q_K = Q_K^0 \cos \varphi_K - H \sin \varphi_K = Q_K^0 \cos \varphi_K - 12 \sin \varphi_K,$$

$$N_K = -Q_K^0 \sin \varphi_K - H \cos \varphi_K = -Q_K^0 \sin \varphi_K - 12 \cos \varphi_K.$$

Нахождение внутренних усилий в заданных сечениях арки приведено в таблице 2.

Таблица 2. – Нахождение внутренних усилий в сечениях арки

№ сеч.	$M_K^0$	$-H(f-y)$	$M_K$	$Q_K^0$	$Q_K^0 \cos \varphi_K$	$-H \sin \varphi_K$	$Q_K$	$-Q_K^0 \sin \varphi_K$	$-H \cos \varphi_K$	$N_K$
0	0	0	0	12	7,20	-9,60	-2,40	-9,60	-7,20	-16,8
1	10,5	-12	-1,5	9	7,20	-7,20	0	-5,40	-9,60	-15,0
2	18	-18,991	-0,991	6	5,50	-4,80	0,699	-2,40	-11,0	-13,4
3	22,5	-22,788	-0,288	3	2,94	-2,40	0,539	-0,600	-11,8	-12,4
4	24	-24	0	0	0	0	0	0	-12	-12
5	22,5	-22,788	-0,288	-3	-2,94	2,40	-	-0,600	-11,8	-12,4
							0,539			
6	18	-18,991	-0,991	-6	-5,50	4,80	-	-2,40	-11,0	-13,4
							0,699			
7	10,5	-12	-1,5	-9	-7,20	7,20	0	-5,40	-9,60	-15,0
8	0	0	0	-	-7,20	9,60	2,40	-9,60	-7,20	-16,8
				12						

Эпюры внутренних усилий арки показаны на рисунке 4.

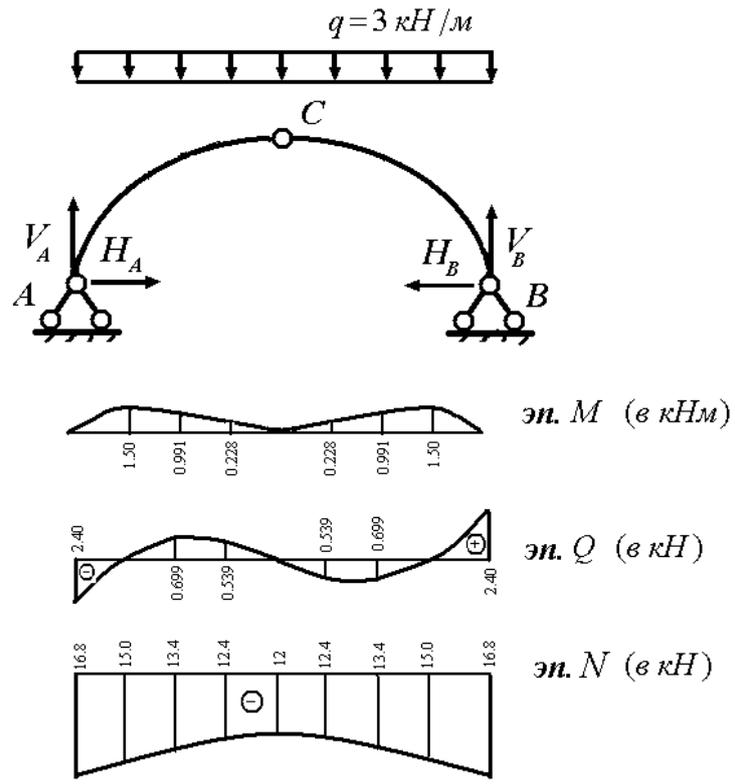


Рисунок 4. – Эпюры внутренних усилий арки

Все вычисления при расчете трехшарнирной арки целесообразно производить с помощью математического пакета MathCAD. Листинг расчета арки, рассмотренной в примере 1, приведен в приложении 1.

### 3. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ И УМЕНИЙ

При изучении строительной механики важную роль играет адекватная самостоятельная оценка приобретенных знаний и умений. Наиболее рационально это можно осуществлять с помощью самотестирования. Для его проведения в пособии содержатся:

- тестовые задания первого уровня, позволяющие проверить понимание и усвоение основных понятий, принципов, терминов изученного модуля;

- тестовые задания второго уровня, позволяющие проверить умение решать типовые задачи модуля;

В представленных тестовых заданиях первого и второго уровня использованы следующие их виды:

- задания закрытой формы;
- задания на установление соответствия;
- задания на установление правильной последовательности;
- задания открытой формы.

В тестовых заданиях закрытой формы необходимо выбрать из представленных вариантов ответов правильный. Возможны две разновидности таких заданий: с выбором одного и нескольких правильных ответов.

В тестовых заданиях на установление соответствия нужно указать связь между элементами двух столбцов – задающего столбца и столбца выбора. Элементы задающего столбца располагаются слева, а элементы столбца выбора – справа. Правый столбец содержит элементов больше, чем левый, и все его элементы являются истинными высказываниями.

В тестовых заданиях на установление последовательности нужно восстановить правильную последовательность некоторых действий, приведенных произвольным образом.

В тестовых заданиях открытой формы требуется дописать правильный ответ, связанный с определением, понятием или принципом.

В представленных тестовых заданиях третьего уровня необходимо показать умение решать нестандартные задачи, связанные с расчетом ферм.

### 3.1 Тестовые задания первого уровня

#### 1.1. Дополните определение.

Арка представляет собой

#### 1.2. Дополните определение.

Распор арки – это

#### 1.3. Укажите статический признак бесшарнирной арки.

1. Статически определимая система.
2. Один раз статически неопределимая система.
3. Два раза статически неопределимая система.
4. Три раза статически неопределимая система.
5.  $N$  раз статически неопределимая система.

#### 1.4. Укажите статический признак двухшарнирной арки.

1. Статически определимая система.
2. Один раз статически неопределимая система.
3. Два раза статически неопределимая система.
4. Три раза статически неопределимая система.
5.  $N$  раз статически неопределимая система.

#### 1.5. Укажите статический признак двухшарнирной арки с затяжкой.

1. Статически определимая система.
2. Один раз статически неопределимая система.
3. Два раза статически неопределимая система.
4. Три раза статически неопределимая система.
5.  $N$  раз статически неопределимая система.

#### 1.6. Укажите статический признак трехшарнирной арки.

1. Статически определимая система.
2. Один раз статически неопределимая система.
3. Два раза статически неопределимая система.
4. Три раза статически неопределимая система.
5.  $N$  раз статически неопределимая система.

**1.7. Укажите статический признак трехшарнирной арки с затяжкой.**

1. Статически определимая система.
2. Один раз статически неопределимая система.
3. Два раза статически неопределимая система.
4. Три раза статически неопределимая система.
5.  $N$  раз статически неопределимая система.

**1.8. Дополните определение.**

Пятами арки называют

**1.9. Дополните определение.**

Замком симметричной арки называют

**1.10. Дополните определение.**

Стрелой подъема симметричной арки называется

**1.11. Запишите формулы для определения вертикальных составляющих опорных реакций симметричной трехшарнирной арки при действии неподвижной вертикальной нагрузки.**

где

**1.12. Запишите формулу для определения распора симметричной трехшарнирной арки при действии неподвижной вертикальной нагрузки.**

где

**1.13. Запишите формулу для определения изгибающего момента в произвольном сечении симметричной трехшарнирной арки при действии неподвижной вертикальной нагрузки.**

где

**1.14. Запишите формулу для определения поперечной силы в произвольном сечении симметричной трехшарнирной арки при действии неподвижной вертикальной нагрузки.**

где

**1.15. Запишите формулу для определения продольной силы в произвольном сечении симметричной трехшарнирной арки при действии неподвижной вертикальной нагрузки.**

где

**1.16. Сравните изгибающие моменты симметричной трехшарнирной арки и балки, имеющую одинаковые с аркой пролет и схему нагружения вертикальной нагрузкой.**

1. Изгибающие моменты, возникающие в арке, больше изгибающих моментов, возникающих в балке.
2. Изгибающие моменты, возникающие в арке и балке, одинаковые.
3. Изгибающие моменты, возникающие в арке, меньше изгибающих моментов, возникающих в балке

**1.17. Сравните поперечные силы симметричной трехшарнирной арки и балки, имеющую одинаковые с аркой пролет и схему нагружения вертикальной нагрузкой.**

1. Поперечные силы, возникающие в арке, больше поперечных сил, возникающих в балке.
2. Поперечные силы, возникающие в арке и балке, одинаковые.
3. Поперечные силы, возникающие в арке, меньше поперечных сил, возникающих в балке.

**1.18. Дополните определение рационального очертания оси арки.**

Рациональным очертанием оси арки называют

**1.19. Запишите уравнение, описывающее рациональное симметричной трехшарнирной арки при действии неподвижной вертикальной нагрузки.**

где

**1.20. Укажите, как изменяются продольные силы в пролете симметричной трехшарнирной арки при действии неподвижной вертикальной нагрузки**

1. Величины этих сил уменьшаются по модулю в направлении от замка к пятам арки.
2. Величины этих сил увеличиваются по модулю в направлении от замка к пятам арки.
3. Величины этих сил не изменяются по модулю в пролете арки.

**1.21. Укажите, какую размерность имеют ординаты линии влияния вертикальной составляющей опорной реакции симметричной трехшарнирной арки.**

1. Килоньютоны.
2. Метры.
3. Килоньютоны, умноженные на метры.
4. Безразмерные.
5. Килоньютоны, деленные на метры.

**1.22. Укажите, какую размерность имеют ординаты линии влияния распора симметричной трехшарнирной арки.**

1. Килоньютоны.
2. Метры.
3. Килоньютоны, умноженные на метры.
4. Безразмерные.
5. Килоньютоны, деленные на метры.

**1.23. Укажите, какую размерность имеют ординаты линии изгибающего момента симметричной трехшарнирной арки.**

1. Килоньютоны.
2. Метры.
3. Килоньютоны, умноженные на метры.
4. Безразмерные.
5. Килоньютоны, деленные на метры.

**1.24. Укажите, какую размерность имеют ординаты линии поперечной силы симметричной трехшарнирной арки.**

1. Килоньютоны.
2. Метры.
3. Килоньютоны, умноженные на метры.
4. Безразмерные.
5. Килоньютоны, деленные на метры.

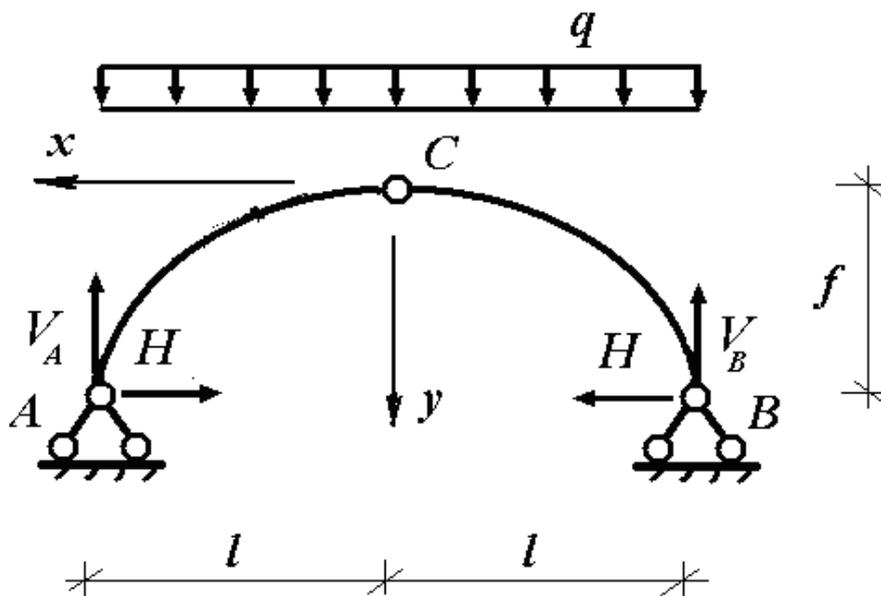
1.25. Укажите, какую размерность имеют ординаты линии продольной силы симметричной трехшарнирной арки.

1. Килоньютоны.
2. Метры.
3. Килоньютоны, умноженные на метры.
4. Безразмерные.
5. Килоньютоны, деленные на метры.

### 3.2 Тестовые задания второго уровня

2.1. Укажите, чему равняются опорные реакции симметричной трехшарнирной арки параболического очертания ( $y = f \frac{x^2}{l^2}$ ) для заданных схем нагружения:

2.1.1.

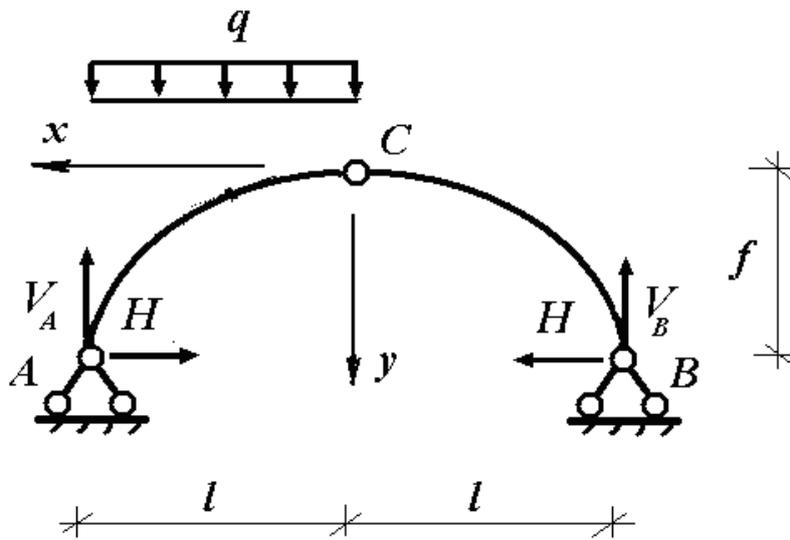


$$V_A = 0.5ql, \quad -0.5ql, \quad ql, \quad -ql, \quad 2ql, \quad -2ql$$

$$V_B = 0.5ql, \quad -0.5ql, \quad ql, \quad -ql, \quad 2ql, \quad -2ql$$

$$H = \frac{ql^2}{8f}, \quad -\frac{ql^2}{8f}, \quad \frac{ql^2}{4f}, \quad -\frac{ql^2}{4f}, \quad \frac{ql^2}{2f}, \quad -\frac{ql^2}{2f}$$

2.1.2.

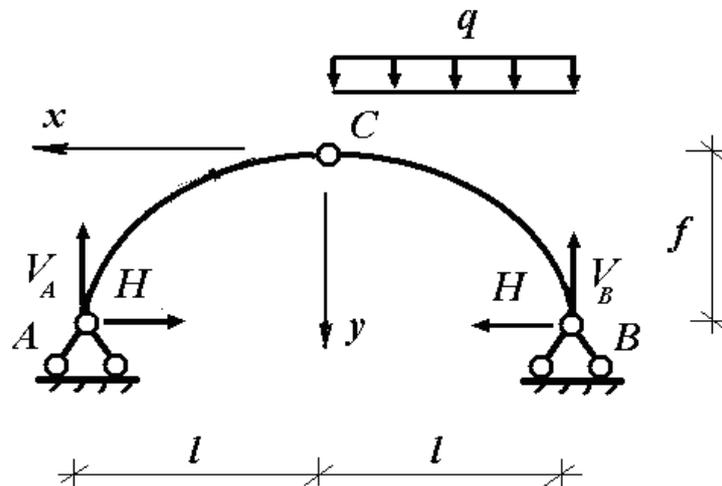


$$V_A = 0.25ql, -0.25ql, 0.5ql, -0.5ql, 0.75ql, -0.75ql$$

$$V_B = 0.25ql, -0.25ql, 0.5ql, -0.5ql, 0.75ql, -0.75ql$$

$$H = \frac{ql^2}{8f}, -\frac{ql^2}{8f}, \frac{ql^2}{4f}, -\frac{ql^2}{4f}, \frac{ql^2}{2f}, -\frac{ql^2}{2f}$$

2.1.3.

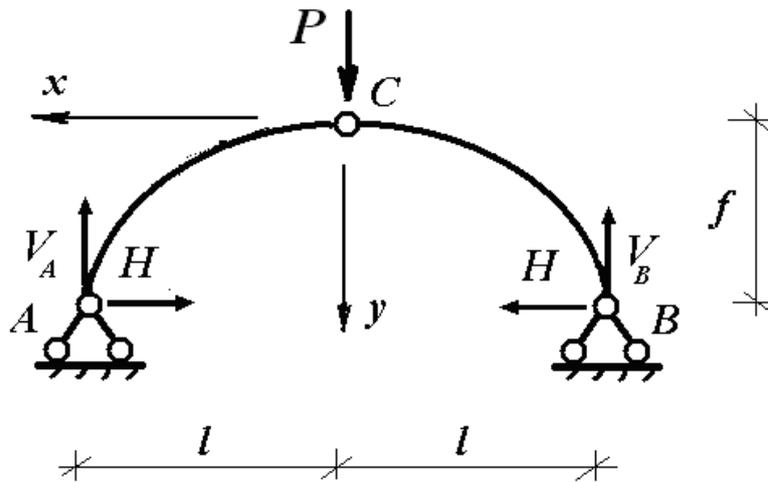


$$V_A = 0.25ql, -0.25ql, 0.5ql, -0.5ql, 0.75ql, -0.75ql$$

$$V_B = 0.25ql, -0.25ql, 0.5ql, -0.5ql, 0.75ql, -0.75ql$$

$$H = \frac{ql^2}{8f}, -\frac{ql^2}{8f}, \frac{ql^2}{4f}, -\frac{ql^2}{4f}, \frac{ql^2}{2f}, -\frac{ql^2}{2f}$$

2.1.4.



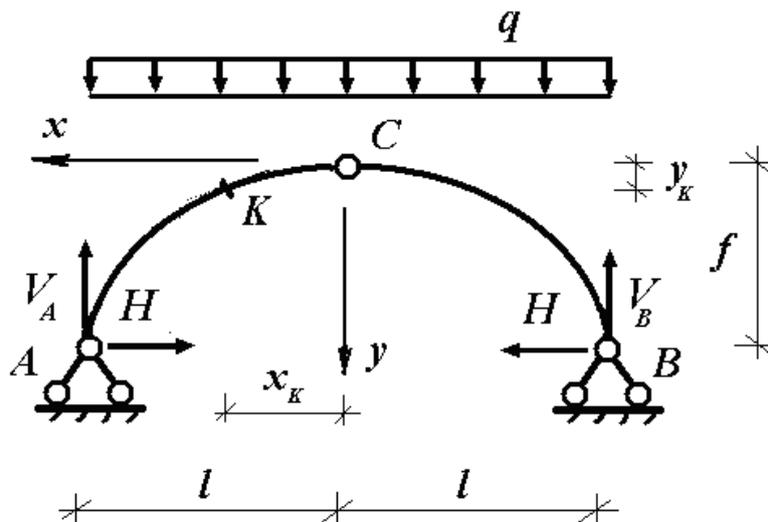
$$V_A = 0.25P, -0.25P, 0.5P, -0.5P, 0.75P, -0.75P$$

$$V_B = 0.25P, -0.25P, 0.5P, -0.5P, 0.75P, -0.75P$$

$$H = \frac{Pl}{8f}, -\frac{Pl}{8f}, \frac{Pl}{4f}, -\frac{Pl}{4f}, \frac{Pl}{2f}, -\frac{Pl}{2f}$$

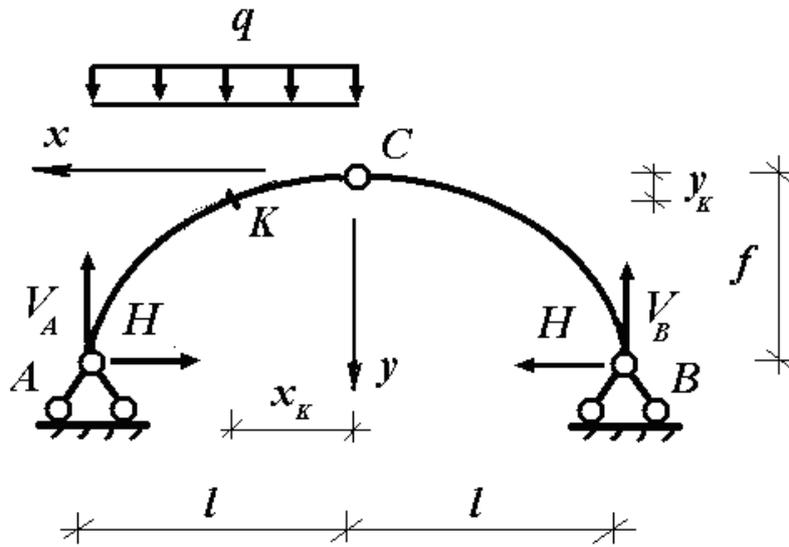
**2.2. Укажите, чему равняется изгибающий момент симметричной трехшарнирной арки параболического очертания ( $y = f \frac{x^2}{l^2}$ ) для заданных схем нагружения, возникающий в сечении K:**

2.2.1.  $f = l, x_K = 0.5l, y_K = 0.25l$



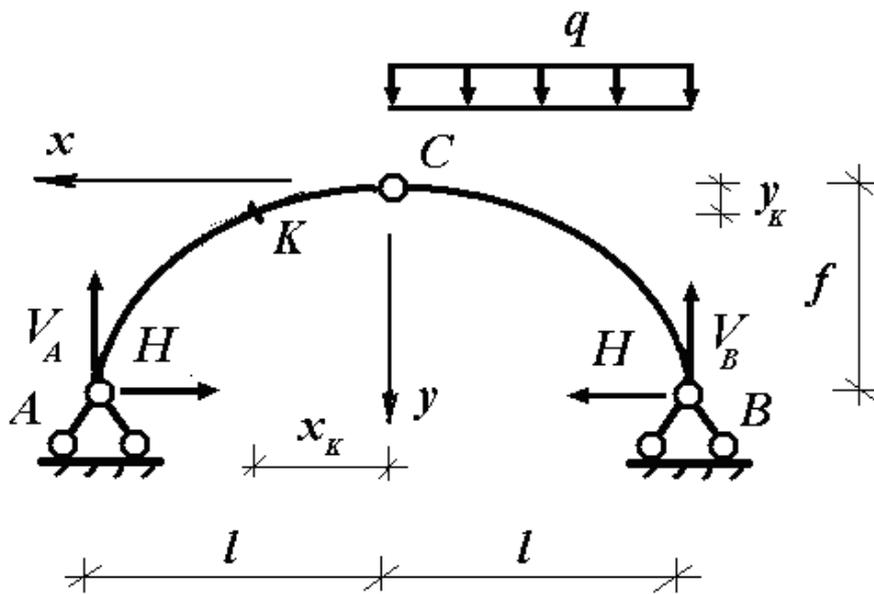
$$M_K = -\frac{ql^2}{2}, -\frac{ql^2}{4}, -\frac{ql^2}{8}, 0, \frac{ql^2}{8}, \frac{ql^2}{4}, \frac{ql^2}{2}$$

2.2.2.  $f = l$ ,  $x_K = 0.5l$ ,  $y_K = 0.25l$



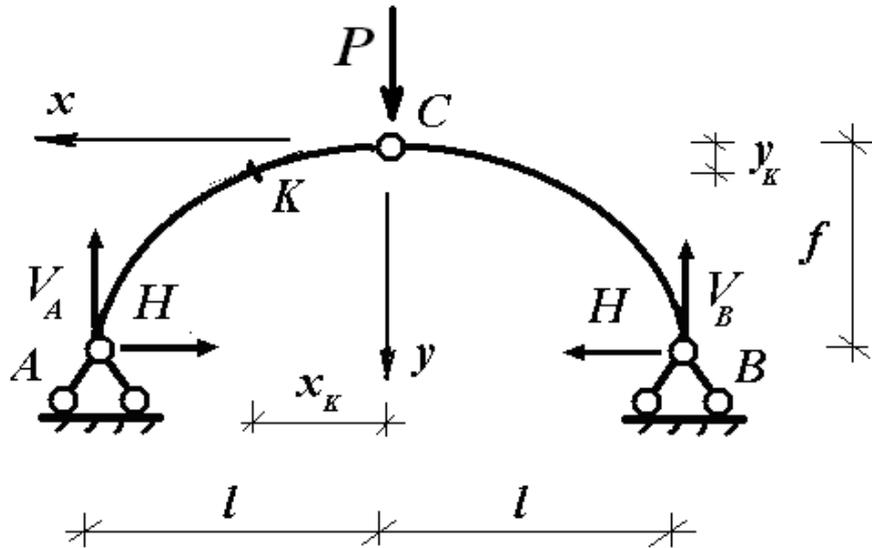
$$M_K = -\frac{ql^2}{4}, -\frac{ql^2}{8}, -\frac{ql^2}{16}, 0, \frac{ql^2}{16}, \frac{ql^2}{8}, \frac{ql^2}{4}$$

2.2.3.



$$M_K = -\frac{ql^2}{4}, -\frac{ql^2}{8}, -\frac{ql^2}{16}, 0, \frac{ql^2}{16}, \frac{ql^2}{8}, \frac{ql^2}{4}$$

2.2.4.

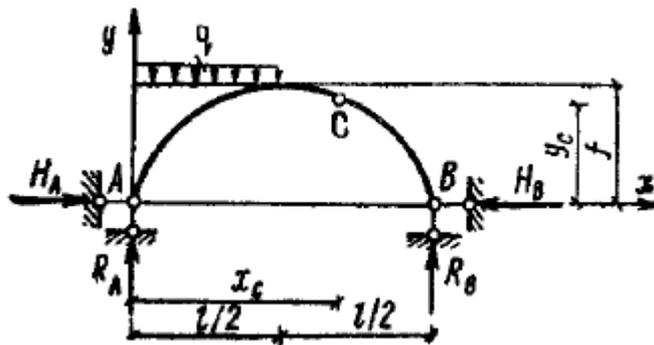


$$M_K = -\frac{ql^2}{4}, \quad -\frac{ql^2}{8}, \quad -\frac{ql^2}{16}, \quad 0, \quad \frac{ql^2}{16}, \quad \frac{ql^2}{8}, \quad \frac{ql^2}{4}$$

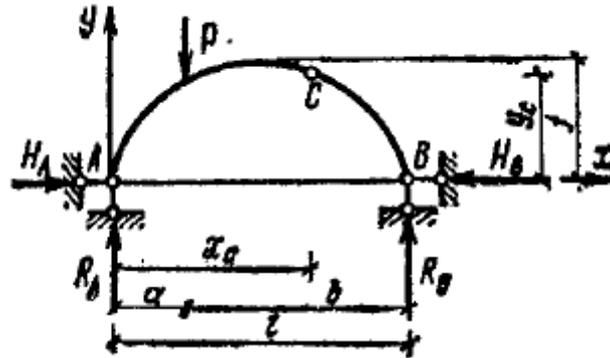
### 3.3 Тестовые задания третьего уровня

3.1. Для трехшарнирных арок с уравнением оси  $y = \frac{4f}{l^2}x(l-x)$  определить положение шарнира C, при котором модули моментов левой и правой полуарок будут равны  $M_1 = |M_2|$

3.1.1

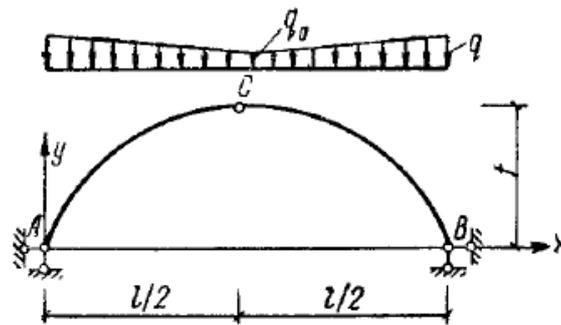


3.1.2

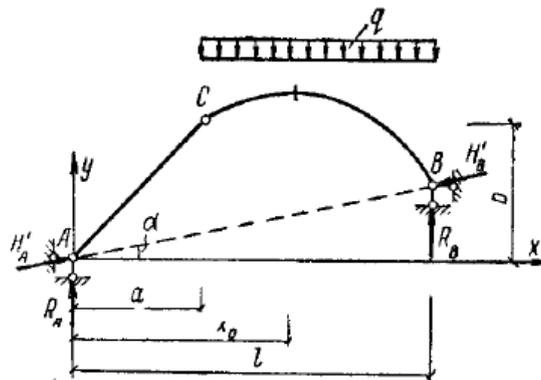


**3.2. Найти рациональные очертания осей трехшарнирных арок при заданных нагрузках и положениях шарниров**

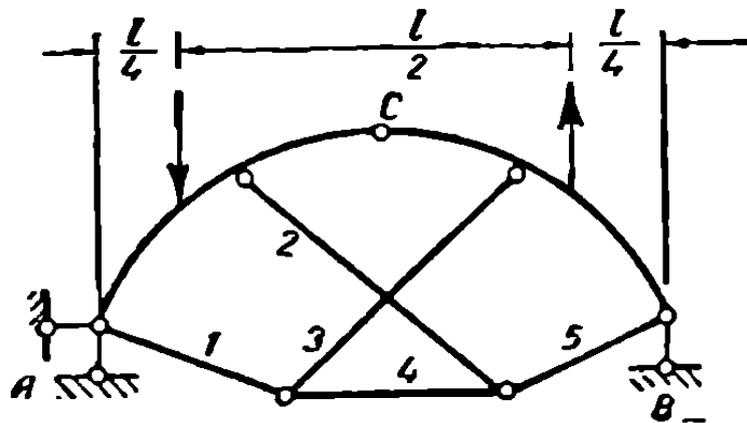
3.2.1



3.2.2



**3.3. Найдите внутренние усилия в стержнях 1, 2, 3, 4, 5 и постройте эпюру изгибающих моментов**



### 3.4 Ответы на тестовые задания первого и второго уровней

**1.1. Дополните определение.**

Арка представляет собой кривой брус, опертый на две опоры, исключающие горизонтальные перемещения опорных сечений
---

**1.2. Дополните определение.**

Распор арки – это горизонтальные составляющие опорных реакций арки, возникающие при действии вертикальной нагрузки
--

1.3 – 4.

1.4 – 2.

1.5 – 2.

1.6 – 1.

1.7 – 1.

**1.8. Дополните определение.**

Пятами арки называют опорные сечения арки.
--

**1.9. Дополните определение.**

Замком симметричной арки называют наиболее удаленное сечение от линии, соединяющей центры опор арки
---

**1.10. Дополните определение.**

Стрелой подъема симметричной арки называется расстояние между
пятой и замком арки

**1.11. Запишите формулы для определения вертикальных составляющих опорных реакций симметричной трехшарнирной арки при действии неподвижной вертикальной нагрузки.**

$$V_A = V_A^0, \quad V_B = V_B^0$$

где  $V_A, V_B$  – вертикальные составляющие опорных реакций арки,

$V_A^0, V_B^0$  – вертикальные составляющие опорных реакций арки

**1.12. Запишите формулу для определения распора симметричной трехшарнирной арки при действии неподвижной вертикальной нагрузки.**

$$H = \frac{M_C^0}{f}$$

где  $M_C^0$  – изгибающий момент в сечении балки под замком арки,

$f$  – стрела подъема арки

**1.13. Запишите формулу для определения изгибающего момента в произвольном сечении симметричной трехшарнирной арки при действии неподвижной вертикальной нагрузки.**

$$M_K = M_K^0 - H(f - y_K)$$

где  $M_K$  – изгибающий момент в произвольном сечении арки,

$M_K^0$  – изгибающий момент в сечении балки под сечением арки,

$f$  – стрела подъема арки,  $y_K$  – ордината сечения арки,

$H$  – распор арки

**1.14. Запишите формулу для определения поперечной силы в произвольном сечении симметричной трехшарнирной арки при действии неподвижной вертикальной нагрузки.**

$Q_K = Q_K^0 \cos \varphi_K - H \sin \varphi_K$
где $Q_K$ – поперечная сила в произвольном сечении арки,
$Q_K^0$ – поперечная сила в сечении балки под сечением арки,
$\varphi_K$ – угол наклона касательной к оси арки в произвольном сечении
$H$ – распор арки

**1.15. Запишите формулу для определения продольной силы в произвольном сечении симметричной трехшарнирной арки при действии неподвижной вертикальной нагрузки.**

$N_K = -Q_K^0 \sin \varphi_K - H \cos \varphi_K$
где $Q_K$ – поперечная сила в произвольном сечении арки,
$Q_K^0$ – поперечная сила в сечении балки под сечением арки,
$\varphi_K$ – угол наклона касательной к оси арки в произвольном сечении
$H$ – распор арки

**1.16 – 3.**

**1.17 – 3.**

**1.18. Дополните определение.**

Рациональным очертанием оси арки называют очертание оси арки, при котором для заданной схемы нагружения в сечениях арки не возникают изгибающие моменты
---

**1.19. Запишите уравнение, описывающее рациональное симметричной трехшарнирной арки при действии неподвижной вертикальной нагрузки.**

$(f - y) = \frac{M^0}{H}$
где $(f - y)$ – функция, описывающая очертание оси арки для заданной схемы нагружения относительно горизонтальной линии, соединяющей опоры арки,
$M^0$ – функция, описывающая очертание балочной эпюры моментов при одинаковой схеме нагружения с аркой

1.20 – 2.

1.21 – 4.

1.22 – 4.

1.23 – 2.

1.24 – 4.

1.25 – 4.

$$2.1.1. V_A = ql \quad V_B = ql \quad H = \frac{ql^2}{2f}$$

$$2.1.2. V_A = 0.75ql \quad V_B = 0.25ql \quad H = \frac{ql^2}{4f}$$

$$2.1.3. V_A = 0.25ql \quad V_B = 0.75ql \quad H = \frac{ql^2}{4f}$$

$$2.1.4. V_A = 0.5P \quad V_B = 0.5P \quad H = \frac{PL}{2f}$$

$$2.2.1. M_K = 0$$

$$2.2.2. M_K = \frac{ql^2}{16}$$

$$2.2.3. M_K = -\frac{ql^2}{16}$$

$$2.2.4. M_K = \frac{Pl}{8}$$

### 3.5 Рекомендации к выполнению тестовых заданий третьего уровня

**3.1.1, 3.1.2.** Составить аналитические зависимости изгибающих моментов левой и правой полуарок от неизвестной величины  $x_C$ , характеризующей положение шарнира С, приравнять их и решить полученное уравнение.

**3.2.1, 3.2.2.** Получить уравнение рациональной оси трехшарнирной арки из условия равенства нулю изгибающего момента, являющегося функцией координат поперечного сечения

**3.3.** Доказать, что продольные силы во всех элементах шарнирно-стержневой затяжки равны нулю, и построить эпюру моментов как для криволинейного бруса.

## ЛИТЕРАТУРА

### Учебно-нормативные документы

1. Образовательный стандарт высшего образования первой ступени специальности Промышленное и гражданское строительство ОСВО 1-70 02 01-2013, утвержден 30.08.2013, Минск, 2013.

2. Типовая учебная программа дисциплины «Строительная механика», регистрационный № ТД-Ј.066/тип, утверждена 30.06.2010, Минск, 2010.

3. Учебная программа дисциплины «Строительная механика», регистрационный №03/15/уч., утверждена 01.07.2015.

### Учебная литература основная

4. Борисевич, А.А. Строительная механика: учебное пособие для вузов / А.А. Борисевич, Е.М. Сидорович, В.И. Игнатюк. – Минск: БНТУ, 2009. - 756 с.

5. Дарков, А.В. Строительная механика: Учебник для вузов. / А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. – СПб. : Изд. Лань, 2010. – 656 с.

6. Строительная механика. Стержневые системы: Учебник для вузов / А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лащеников, Н.Н. Шапошников; Под ред. А.Ф. Смирнова. – М. : Стройиздат, 1981. – 512 с.

7. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений: Учебник для вузов/ А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лащеников, Н.Н. Шапошников; Под ред. А.Ф. Смирнова. – М. : Стройиздат, 1984. – 416 с.

8. Клейн, Г.К. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики / Г.К. Клейн, В.Г. Рекач, Г.И. Розенблат. – М. : Высшая школа, 1972. – 320 с.

9. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики (статика стержневых систем): Учеб. пособие для студентов вузов / Г.К. Клейн, Н.Н. Леонтьев, М.Г. Ванюшенко и др.; Под ред. Г.К. Клейна. – М. : Высшая школа, 1980. – 384 с.

10. Турищев, Л.С. Строительная механика: учебно-методический комплекс в 3 ч. / Л.С. Турищев. – Новополоцк : ПГУ. 2010. – Ч.1. Статически определимые системы. – 224 с.

11. Турищев, Л.С. Строительная механика: учебно-методический комплекс в 3 ч. / Л.С. Турищев. – Новополоцк : ПГУ. 2009. – Ч.2. Статически неопределимые системы – 200 с.

12. Турищев, Л.С. Строительная механика: учебно-методический комплекс в 3 ч. / Л.С. Турищев. – Новополоцк : ПГУ. 2010. – Ч.3. Основы динамики и устойчивости сооружений – 136 с.

13. Турищев, Л.С. Введение в строительную механику: электронное пособие для организации самостоятельной работы студентов / Л.С. Турищев. – Новополоцк : ПГУ. 2016. – 56 с.

### **Учебная литература дополнительная**

14. Рабинович, И.М. Основы строительной механики стержневых систем / И.М. Рабинович. – М. : Госстройиздат, 1960. – 520 с.

15. Строительная механика. Основы теории с примерами расчетов: учебник для вузов / А.Е. Саргсян, А.Т. Демченко, Н.В. Дворянчиков, Г.А. Джинчвелашвили; Под ред. А.Е. Саргсяна. – М. : Высш. шк., 2000. – 416 с.

16. Безухов, Н.И. Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах / Н.И. Безухов, О.В. Лужин, Н.В. Колкунов. – М. : Высшая школа, 1987. – 264 с.

17. Кузьмин, В.А. Сборник задач по курсу строительной механики / В.А. Кузьмин, В.Г. Рекач, Г.И. Розенблат; под редакцией И.М. Рабиновича. – М. : Госстройиздат, 1963. – 331 с.

18. Киселев, В.А. Строительная механика в примерах и задачах / В.А. Киселев, А.М. Афанасьев, В.А. Ермоленко и др.; Под ред. В.А.Киселева. М. : Стройиздат, 1986. – 387с.

### **Интернет-ресурсы**

19. Учебные курсы для студентов по сопротивлению материалов и строительной механики [Электронный ресурс] – Режим доступа: [http://mysopromat.ru/uchebnye\\_kursu/](http://mysopromat.ru/uchebnye_kursu/).

20. Сайт кафедры строительной механики СПбГПУ с учебными материалами по строительной механике [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://smitu.cef.spbstu.ru/index.htm>.

21. Сайт кафедры строительной механики БелГУТ с учебными материалами по строительной механике [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.mechanika.org.ru/index>.

## ГЛОССАРИЙ МОДУЛЯ

<b><i>Арка</i></b>	Кривой брус, который опирается на две опоры, исключая горизонтальные пересечения опорных сечения.
<b><i>Бесшарниная арка</i></b>	Арка, опирающаяся на две неподвижные защемляющие опоры.
<b><i>Двухшарнирная арка</i></b>	Арка, опирающаяся на две шарнирно неподвижные опоры.
<b><i>Двухшарнирная арка с затяжкой</i></b>	Арка, имеющая затяжку и опирающаяся на шарнирно неподвижную и шарнирно подвижную опоры.
<b><i>Замок арки</i></b>	Наиболее удаленное сечение арки от линии, соединяющей её пяты.
<b><i>Затяжка</i></b>	Стержень, шарнирно прикрепленный концами к арке и предназначенный для восприятия распора.
<b><i>Пролет арки</i></b>	Расстояние между пятами арки по горизонтали.
<b><i>Пята арки</i></b>	Опорное сечение арки.
<b><i>Распор арки</i></b>	Горизонтальные составляющие опорных реакций арки, возникающие при действии вертикальной нагрузки.
<b><i>Рациональное очертание оси</i></b>	Очертание оси арки, при котором для заданной схемы нагружения в её сечениях не возникают изгибающие моменты.
<b><i>Стрела подъема арки</i></b>	Расстояние по вертикали между пятой и замком арки.

***Трехшарнирная арка***

Арка, имеющая промежуточный шарнир и опирающаяся на две шарнирно неподвижные опоры.

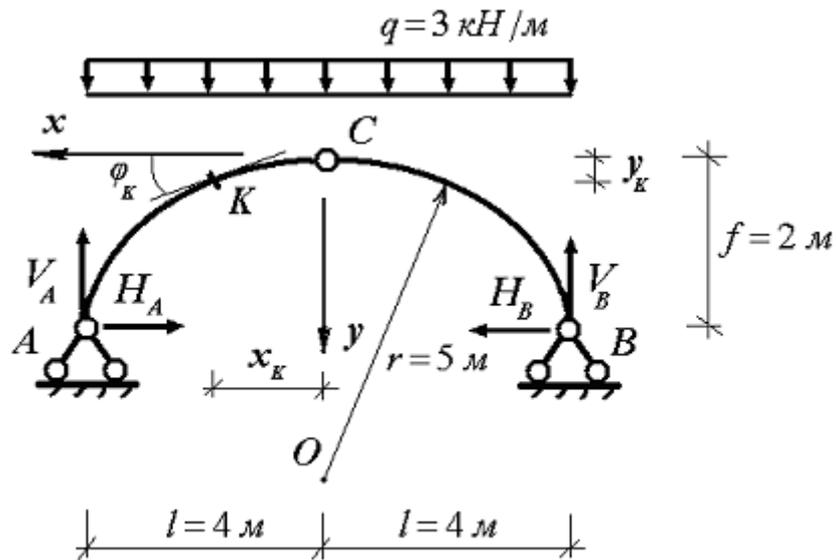
***Трехшарнирная арка с затяжкой***

Арка, имеющая промежуточный шарнир и опирающаяся на две шарнирно неподвижные опоры.

***Рациональное очертание оси арки***

Очертание оси, при котором для заданной схемы нагружения в сечениях не возникают изгибающие моменты

Листинг расчета трехшарнирной арки



$$l := 4 \cdot m_* \quad f := 2 \cdot m_* \quad r := 5 \cdot m_*$$

$$q := 3 \cdot \frac{\text{кН}}{m} *$$

$$n := 80 *$$

$$i := 0 .. n_*$$

$$\Delta x := \frac{2 \cdot l}{n} *$$

$$x_i := l - i \cdot \Delta x * \quad y_i := r - \sqrt{r^2 - (x_i)^2} *$$

$$\cos \phi_i := \frac{\sqrt{r^2 - (x_i)^2}}{r} * \quad \sin \phi_i := \frac{x_i}{r} *$$

$$V_A := q \cdot l_* \quad V_B := q \cdot l_* \quad H := \frac{q \cdot l^2}{2 \cdot f} *$$

$$V_A = 12 \cdot \kappa H$$

$$V_B = 12 \cdot \kappa H$$

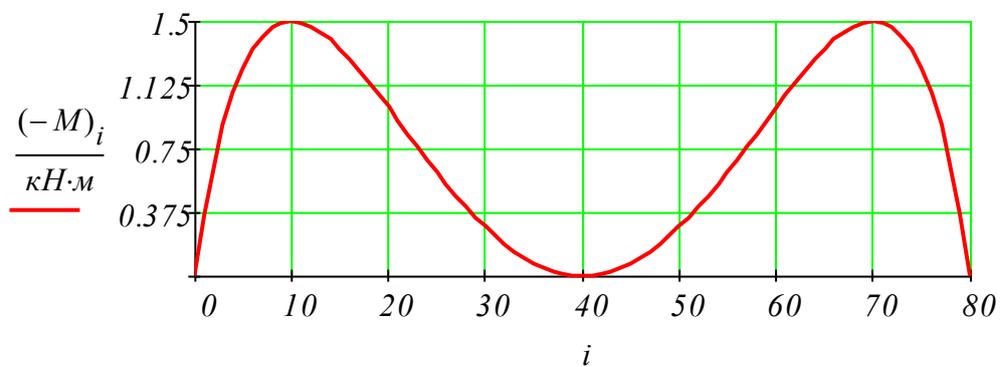
$$H = 12 \cdot \kappa H$$

$$M_{\text{бал}_i} := V_A \cdot (l - x_i) - \frac{q \cdot (l - x_i)^2}{2} *$$

$$Q_{\text{бал}_i} := V_A - q \cdot (l - x_i) *$$

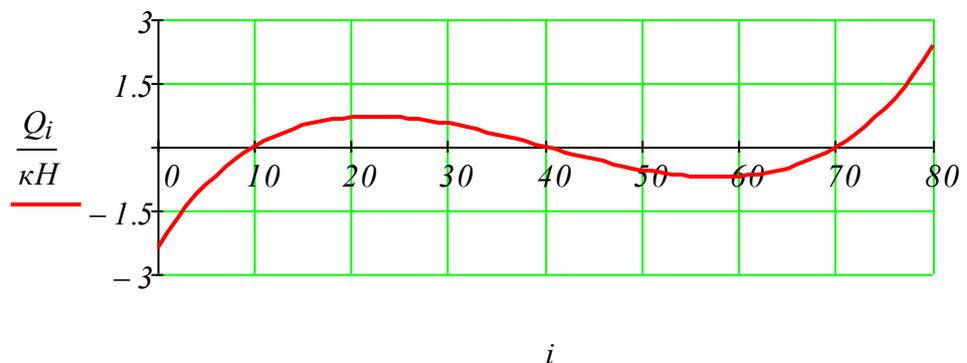
$$M_i := M_{\text{бал}_i} - H \cdot (f - y_i) *$$

### Эпюра моментов



$$Q_i := Q_{\text{бал}_i} \cdot \cos \phi_i - H \cdot \sin \phi_i *$$

### Эпюра поперечных сил



$$N_i := -Q_{бал_i} \cdot \sin \phi_i - H \cdot \cos \phi_i$$

### Эпюра продольных сил

