

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет»

С. Г. Ехилевский

ИСКУССТВО МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРИЛОЖЕНИЙ

Новополоцк
Полоцкий государственный университет
2020

УДК 51:62(035.3)
ББК 22.1я9
Е93

Рекомендовано к изданию ученым советом
учреждения образования «Полоцкий государственный университет»
в качестве монографии (протокол № 7 от 27.03.2020 г.)

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

доктор физико-математических наук, доцент,
главный научный сотрудник
Физико-технического института Национальной академии наук Беларуси
Б. Б. ХИНА;

доктор технических наук, профессор,
профессор кафедры компьютерного моделирования и дизайна
Донецкого национального технического университета
Г. В. АВЕРИН;

доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры геодезии и геоинформационных систем
Полоцкого государственного университета
В. Н. КОРОВКИН

Ехилевский, С. Г.

Е93 Искусство математических приложений / С. Г. Ехилевский. – Новополоцк :
Полоц. гос. ун-т, 2020. – 176 с.
ISBN 978-985-531-695-5.

Монография позволит актуализировать и развить математические знания инженеров и магистров технических специальностей, будет способствовать подготовке научных работников, обладающих компетенциями по математическому моделированию природных и технологических процессов, что является основой теоретического метода исследования, необходимым условием научного и инженерного творчества.

УДК 51:62(035.3)
ББК 22.1я9

ISBN 978-985-531-695-5

© Ехилевский С. Г., 2020
© Полоцкий государственный университет, 2020

*Ученому и изобретателю, организатору и педагогу,
настоящему человеку, наставнику и другу
Витольду Витольдовичу Паку
посвящаю*

ВВЕДЕНИЕ

Математика как язык науки является фундаментом, но не самой объемной частью инженерной подготовки. Это противоречие требует качественно иного ее изложения в техническом вузе по сравнению с имеющим место на физико-математических факультетах. Традиционно втузовский курс высшей математики выстраивают по аналогии с университетским. Одно из главных требований, предъявляемых к последнему, – строгость и последовательность изложения. Неукоснительная реализация этих принципов не лучшим образом регламентирует структуру втузовского курса. Возникает противоречие с практикой инженерного творчества. В нем и параллельные пути преодоления проблем, и определенная автономность идей, и, наконец, догадки, не имеющие вполне корректного обоснования.

Систематическое с единых позиций освещение достигнутого – завершающий этап и одна из основных функций математики. Однако для непрофессионала этот ее аспект вряд ли является приоритетным. Тем более что строгости, ради которых воздерживаются от напрашивающихся шагов, без сожаления опускаются во втузовских учебниках. Таким образом, сложилась аномальная ситуация, когда основные цели преподавания не совпадают, структура курса копируется, а то, ради чего ее выстраивали, мирясь при этом с недостатками, опускается.

Попытки механически урезать университетский курс, опустив наиболее сложные разделы, доказательства теорем и т.п., конструктивны лишь иллюзорно. На этом пути одна из наиболее гармонических дисциплин превращается в набор глубоко не осмысленных рецептов, которые в конечном итоге сливаются в бессвязный математический шум.

Гармоничное решение проблемы скрыто в самом противоречии. Математика для инженеров должна исповедовать инженерный стиль мышления. Разумеется, дело не в создании соответствующего антуража, как то, использование примеров определенной тематической направленности. Главное заключено в том, чтобы проникновение в суть изучаемого достигалось методами, свойственными инженерному творчеству. Тут и синтетический подход к проблеме, взгляд на нее с различных точек зрения, восхождение от частного к общему, умение извлечь из конкретной ситуации качественно новую информацию.

Не менее важно определить место нового результата в общей системе знаний. Ведь высшая функция науки заключается не в том, чтобы рассчитать, доказать или даже предсказать что-либо. Она должна дать нечто большее – рациональную картину мира. Одних формул для этого недостаточно. Необходимо найти адекватные образы и математически строго определить соответствующие им понятия. Их взаимосвязи отражают единство окружающей действительности как первоисточника научного творчества.

В свете изложенного формирование целостного восприятия всего курса высшей математики является одной из целей преподавания. В связи с этим методически важно демонстрировать идейную общность различных его разделов, взаимопроникновение и обогащение методов.

Исчерпывающая конкретизация предложенных тезисов вряд ли возможна и сама по себе является творческим процессом. Его итогом должен быть не упрощенный, а иной курс высшей математики. В данной книге предпринята попытка реализации такого подхода. Затронуты вопросы линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии на плоскости и в пространстве, дифференциального и интегрального исчисления, рядов (степенных и Фурье), уравнений математической физики, теории вероятностей и математической статистики.

Монография позволит актуализировать и развить математические знания инженеров и магистров технических специальностей, будет способствовать подготовке научных работников, обладающих компетенциями по математическому моделированию природных и технологических процессов, что является основой теоретического метода исследования, необходимым условием научного и инженерного творчества.

1. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ, ФОРМУЛЫ КРАМЕРА И ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА – КАПЕЛЛИ [1]

Опираясь на программный материал, читаемый студентам технических специальностей, дадим наглядную интерпретацию теоремы Кронекера – Капелли. С геометрической точки зрения решением системы трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = a_1 & (1.1) \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = a_2 & (1.2) \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = a_3 & (1.3) \end{cases}$$

является пересечение описываемых ими плоскостей σ_1 , σ_2 , σ_3 .

Смешанное произведение их нормальных векторов

$$\vec{N}_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}\}, \quad \vec{N}_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}\}, \quad \vec{N}_3 = \{a_{31}, a_{32}, a_{33}\}$$

совпадает с Δ – главным определителем системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (\vec{N}_1 \times \vec{N}_2) \cdot \vec{N}_3.$$

I. Если $\Delta \neq 0$ (при этом $r = R = 3$, где r и R – ранги матрицы системы и ее расширенной матрицы соответственно), то векторы некопланарны, т.е. плоскости пересекаются в одной точке M_0 (рисунок 1.1), координаты которой x_0, y_0, z_0 являются единственным решением системы и могут быть получены по формулам Крамера.

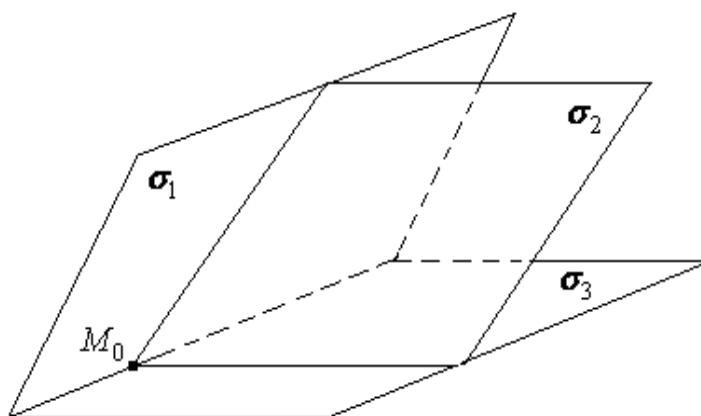


Рисунок 1.1. – Геометрическая интерпретация решения системы уравнений (1)–(3) с отличным от нуля определителем

II. В случае $\Delta=0$ векторы нормалей компланарны. Совместив с ними координатную плоскость OXY , ($a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0$) запишем систему уравнений (1) в виде¹

$$\begin{cases} y = k_1x + b_1 & (1.1') \\ y = k_2x + b_2 & (1.2') \\ y = k_3x + b_3 & (1.3') \end{cases}$$

При таком выборе координатных осей

$$\Delta = \begin{vmatrix} k_1 & -1 & 0 \\ k_2 & -1 & 0 \\ k_3 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \Delta_y = 0. \quad (1.4)$$

Т.е. в зависимости от значения

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} k_1 & -1 & b_1 \\ k_2 & -1 & b_2 \\ k_3 & -1 & b_3 \end{vmatrix} = (b_3 - b_1)(k_2 - k_1) + (b_2 - b_1)(k_1 - k_3) \quad (1.5)$$

возможны две ситуации.

1) Пусть $\Delta_z \neq 0$, ($R=3$), следовательно в (1.5) хотя бы одно из нера-

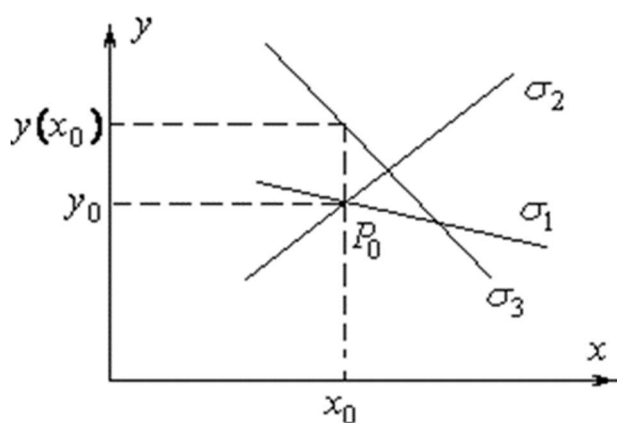


Рисунок 1.2. – Взаимное расположение плоскостей в случае $\Delta = 0$, $\Delta_z \neq 0$

венств $k_1 \neq k_2$ или $k_1 \neq k_3$ имеет место ($r=2$ см. (1.4)). Значит, в соответствии с (1.1')–(1.3') две плоскости (для определенности первые) пересекаются. Следом их общей прямой на плоскости OXY является точка P_0 (рисунок 1.2), координаты которой x_0, y_0 легко найти, решив совместно уравнения (1.1'), (1.2'):

¹ Использование уравнений с угловым коэффициентом не ограничивает общности рассмотрения, т.к. поворотом системы координат вокруг оси OZ можно исключить случай с $k = \infty$

$$x_0 = \frac{b_1 - b_2}{k_2 - k_1}, \quad y_0 = \frac{b_1 k_2 - k_1 b_2}{k_2 - k_1},$$

после чего с помощью (1.3') можно убедиться, что третья плоскость проходит мимо линии пересечения первых двух (см. рисунок 1.2):

$$y(x_0) - y_0 = k_3 x_0 + b_3 - y_0 = \frac{\Delta_z}{k_2 - k_1}. \quad (1.6)$$

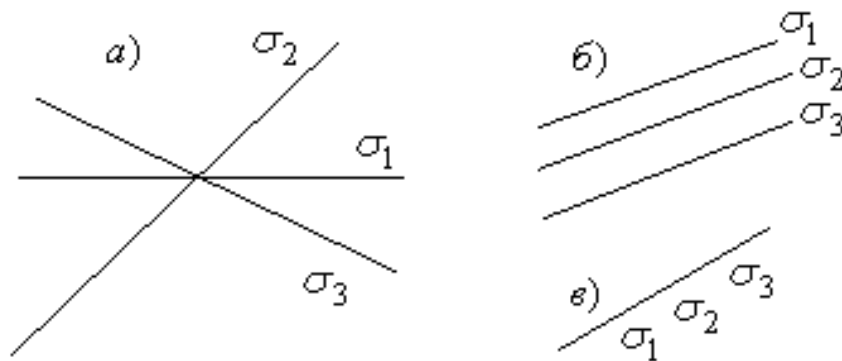
Т.е. в рассматриваемой ситуации ($\Delta_z \neq 0$) система (1.1)–(1.3) несовместна.

2) Во второй ситуации ($\Delta_z = 0$) имеется три возможности:

а) по крайней мере, одно из неравенств $k_1 \neq k_2$, $k_1 \neq k_3$ имеет место ($r = R = 2$ (см. (1.4), (1.5)). Система (1.1)–(1.3) согласно (1.6) совместна. Координаты всех точек линии пересечения трех плоскостей (рисунок 1.3, а) образуют бесчисленное множество ее решений;

б) угловые коэффициенты равны $k_1 = k_2 = k_3$ ($r = 1$ (см. (1.4) и выполнено по крайней мере одно из неравенств $b_1 \neq b_2$, $b_1 \neq b_3$. ($R = 2$ (см. (1.5)). Т.е. плоскости параллельны, но не сливаются в одну, система (1.1)–(1.3) несовместна (рисунок 1.3, б);

в) имеют место равенства $k_1 = k_2 = k_3$, $b_1 = b_2 = b_3$ ($r = R = 1$ (см. (1.4), (1.5)), три плоскости слились в одну (рисунок 1.3, в). Координаты принадлежащих ей точек образуют бесчисленное множество решений системы (1.1)–(1.3), более мощное, чем в случае а.







а) $r = R = 2$; б) $r = 1, R = 2$; в) $r = R = 1$

Рисунок 1.3. – Взаимное расположение плоскостей

Результаты проведенного исследования сведены в таблицу и иллюстрируют теорему Кронекера – Капелли.

Система линейных алгебраических уравнений совместна, если ранги матрицы коэффициентов и расширенной матрицы совпадают. Если при этом они равны числу неизвестных, система определена.

Таблица 1.1. – Результаты проведенного исследования ($\Delta = 0$)

№	r	R	рисунок	совместность
П.1	2	3		–
П.2.a	2	2		+
П.2.б	1	2		–
П.2.в	1	1		+

2. КЛАССИФИКАЦИЯ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ГЛАДКОГО ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Формирование целостного восприятия всего курса высшей математики является одной из целей преподавания. В связи с этим методически важно продемонстрировать идейную общность различных его разделов, взаимопроникновение и обогащение методов. Ниже предпринята попытка реализации такого подхода. Затронуты вопросы экстремума функции двух переменных, линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии. Предложена универсальная и лаконичная методика приведения уравнения кривой второго порядка к каноническому виду. Существенное упрощение выкладок достигается смешанным подходом к их осуществлению. Линейные слагаемые «поворачиваются» непосредственно, а квадратичные с помощью инвариантов уравнения. Прослежена связь достаточных условий гладкого экстремума функции двух переменных с классификацией кривых второго порядка.

Роль кривых второго порядка в развитии науки

Едва ли существует лучший пример простого математического объекта, на протяжении многих веков оказывавшегося причастным к самым животрепещущим проблемам естествознания.

Совершенно очевидно, что особый статус этих кривых не случаен. Существуют объективные, связанные с развитием жизненного уклада, и продиктованные логикой самой науки субъективные причины, по которым этому произведению математической мысли была уготована счастливая будущность ребенка, еще до рождения обреченного на долгую и плодотворную жизнь.

Некоторые из этих причин, наиболее бросающиеся в глаза, приведем, не придерживаясь, однако, упомянутого выше деления, ибо наука – реальность сама по себе ничуть не менее объективная, чем остальной мир.

В средние века интерес к ним подогревался развитием астрономии, навигации, геометрической оптики и пр. Однако главный триумф связан с созданием дифференциального и интегрального исчисления. Первым делом вновь созданный аппарат применили к решению основной задачи небесной механики о движении тела в поле притягивающего центра. Необычайно престижная наука была в то время пиком моды, передовой частью естествознания с колоссальным мировоззренческим и прикладным значением.

Уравнения движения, дополненные законом всемирного тяготения, дали в зависимости от начальных условий эллиптические, параболические или гиперболические орбиты. Такое совпадение «заткнуло за пояс» все объективные и субъективные причины, вместе взятые. В самом деле, гравитационный потенциал, «ни сном ни духом» не ведавший ни о каких уравнениях движения, оказался как раз таким, что при интегрировании последних возникли кривые второго порядка. Это обстоятельство не имеет пока рационального объяснения, хотя, несомненно, глубоко по своей природе. Удивительно, но и самые последние данные с неизменным упорством подтверждают, что гравитационный потенциал с «математической» точностью обратно пропорционален расстоянию до притягивающего центра. Причем границы применимости этого закона простираются от микромира до Вселенной в целом.

Важность происшедшего вышла далеко за рамки простого подтверждения законов Кеплера. Человечество без преувеличения вступило в новую эру. Родилось то, что теперь называют теоретическим методом исследования. Уже этого было бы достаточно, чтобы навсегда вписать перечисленные кривые в историю науки, однако они не раз пригодились и в дальнейшем.

Классификация кривых второго порядка используется в теории дифференциальных уравнений в частных производных и в достаточных условиях экстремума функции двух переменных.

Наконец, по сей день широко применяют так называемое гармоническое приближение. Абстрагируясь от сути конкретных задач, укажем, что ему соответствует отбрасывание в формуле Тейлора слагаемых третьей и более высоких степеней. При этом линии уровня в окрестности критических точек рассматриваемых функций аппроксимируют кривыми второго порядка.

Принимая во внимание изложенное, целесообразно исследование кривых второго порядка на лекциях и практических занятиях проводить в полном объеме. Однако приведение к каноническому виду общего уравнения кривой второго порядка довольно громоздкая процедура. В условиях дефицита времени, отведенного на общеобразовательные курсы, это вызывает серьезные затруднения, как при ее изложении, так и при реализации.

Инварианты общего уравнения кривой второго порядка

Кривая 2-го порядка является пересечением плоскости и конуса. Уравнение последнего, поместив в его центре начало координат, запишем в общем (справедливом для любой ориентации) виде

$$A \cdot x^2 + 2 \cdot B \cdot x \cdot y + C \cdot y^2 + 2 \cdot K \cdot x \cdot z + 2 \cdot M \cdot y \cdot z + N \cdot z^2 = 0 \quad (2.1)$$

или в матричной форме

$$(x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} A & B & K \\ B & C & M \\ K & M & N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0. \quad (2.1a)$$

Собственные значения фигурирующей в (2.1a) квадратной матрицы являются корнями характеристического уравнения $\lambda^3 - I_1 \cdot \lambda^2 + I_2 \cdot \lambda - I_3 = 0$, коэффициенты которого

$$I_1 = A + C + N, \quad I_2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & K \\ K & N \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C & M \\ M & N \end{vmatrix}, \quad I_3 = \begin{vmatrix} A & B & K \\ B & C & M \\ K & M & N \end{vmatrix} \quad (2.2)$$

по этой причине не зависят от ориентации декартова базиса, т.е являются инвариантами.

Поскольку (2.1) описывает произвольно ориентированный конус, будем считать, что секущая плоскость перпендикулярна оси OZ . Подставив в (2.1) $z = z_0 = \text{const}$, получим уравнение кривой:

$$A \cdot x^2 + 2 \cdot B \cdot x \cdot y + C \cdot y^2 + 2 \cdot D \cdot x + 2 \cdot E \cdot y + F = 0, \quad (2.3)$$

где

$$D = K \cdot z_0, \quad E = M \cdot z_0, \quad F = N \cdot z_0^2. \quad (2.4)$$

При повороте базиса элементы симметричных матриц преобразуются как произведения соответствующих координат. С учетом этого обстоятельства для поворотов в плоскости OXY можно записать

$$N \sim z^2 = \text{const}, \quad K^2 + M^2 \sim x^2 \cdot z^2 + y^2 \cdot z^2 = z^2 \cdot r^2 = \text{const}, \quad (2.5)$$

где r – расстояние от точки плоскости OXY до начала координат.

Из инвариантности выражений (2.2), а также соотношений (2.5), (2.4) следует наличие у уравнения (2.3) следующих инвариантов относительно поворотов в плоскости OXY :

$$\left. \begin{aligned} A + C = I_1 - N, \quad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = I_3 \cdot z_0^2, \\ \delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = I_2 + K^2 + M^2 - (A + C) \cdot N. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Приведение кривых второго порядка к каноническому виду с использованием теории инвариантов [2]

Приведение к каноническому виду общего уравнения кривой второго порядка (2.3) довольно громоздкая процедура. В существующих учебниках [3; 4] с целью ее оптимизации последовательность, в которой выполняется параллельный перенос и поворот системы координат, меняется в зависимости от типа кривой. Ниже предлагается универсальная и предельно лаконичная методика решения таких задач. Существенное упрощение выкладок достигается смешанным подходом к их осуществлению. Линейные слагаемые «поворачиваются» непосредственно, а квадратичные – с помощью инвариантов (2.6) уравнения (2.3). При этом произвол в определении угла устраняется вычислением Δ .

Задача. Выяснить, какую кривую (эллипс, параболу или гиперболу) описывает уравнение (2.3) при конкретных значениях коэффициентов. Определить величину ее параметров и построить график.

Решение. Поворотом базиса и сдвигом начала отсчета можно перейти в систему координат, расположенную симметрично относительно исследуемой кривой. Там уравнение (2.1) примет канонический вид, что позволит легко выполнить все пункты задания.

Преобразованием поворота

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C^{-1}(\psi) \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

где

$$C(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} - \quad (2.8)$$

его матрица, в (2.3) устраняется произведение $xу$, отсутствующее в канонических уравнениях кривых 2-го порядка². В уравнении окружности его никогда нет как раз потому, что она симметрична относительно вращений. В новой системе координат квадратичная часть (2.3) примет вид

$$(x', y') \cdot \begin{pmatrix} A' & B' \\ B' & C' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0, \quad (2.9)$$

в котором

$$\begin{pmatrix} A' & B' \\ B' & C' \end{pmatrix} = C(\psi) \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \cdot C^{-1}(\psi). \quad (2.10)$$

Подставив (2.8) в (2.10), получим

$$B' = (C - A) \cdot \sin \psi \cdot \cos \psi + B \cdot (\cos^2 \psi - \sin^2 \psi) \quad (2.11)$$

и из условия $B' = 0$ с точностью до $\pi/2$ определим угол необходимого поворота

$$\psi = 0,5 \cdot \operatorname{arctg} \frac{2B}{A - C}. \quad (2.12)$$

Зная его, по формулам (2.8), (2.10) можно вычислить A' и C' . Удобнее, однако, использовать инварианты. Согласно (2.6) и с учетом того, что $B' = 0$

$$\begin{cases} A + C = A' + C' \\ A \cdot C - B^2 = A' \cdot C'. \end{cases} \quad (2.13)$$

² Исключение составляет равнобочная гиперболола, для которой существует вторая каноническая форма уравнения, что несущественно для решения поставленной задачи.

В силу симметрии системы (2.13) относительно перестановок A' и C' два ее решения связаны отношением $A'_{1,2} = C'_{2,1}$. И, следовательно, отличаются переименованием осей, что эквивалентно повороту на 90° . С точностью до этого угла и определяется ψ из (2.12). Чтобы произвол в определении ψ , A' и C' не привел к тому, что линейные и квадратичные слагаемые «повернуты» на разные углы, достаточно вычислить Δ до и после поворота. После чего останется выполнить параллельный перенос координатных осей:

$$\xi = x' - x'_0, \quad \eta = y' - y'_0. \quad (2.14)$$

Пример 1. $2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 + 2x + 2\sqrt{3}y + 11/5 = 0$. Согласно (2.3) в данном случае $A=2$; $B=\sqrt{3}/2$; $C=1=D$; $E=\sqrt{3}$; $F=11/5$ и в соответствии с (2.12) $\psi = 0,5 \arctg \sqrt{3} = \pi/6$. Подставив это значение в (2.8), а результат в (2.7), осуществим преобразование поворота:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3}x' - y' \\ x' + \sqrt{3}y' \end{bmatrix}.$$

В результате линейная часть исходного уравнения примет вид $2x + 2\sqrt{3}y = \sqrt{3}x' - y' + \sqrt{3}x' + 3y' = 2\sqrt{3}x' + 2y'$, т.е. в повернутой системе координат $D' = \sqrt{3}$; $E' = 1$. Подставив в (2.13) значения A , B и C , получим систему уравнений

$$\begin{cases} A' + C' = 3 \\ A' \cdot C' = 5/4 \end{cases} \text{ с двумя решениями } \begin{matrix} A'_1 = C'_2 = 5/2 \\ A'_2 = C'_1 = 1/2 \end{matrix}. \text{ Чтобы выбрать нужное, вычислим для них третий инвариант}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & \sqrt{3}/2 & 1 \\ \sqrt{3}/2 & 1 & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3} & 11/5 \end{vmatrix} = -\frac{5}{4} = \Delta'_1 = \begin{vmatrix} 5/2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 1/2 & 1 \\ \sqrt{3} & 1 & 11/5 \end{vmatrix} \neq \Delta'_2 = \begin{vmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 5/2 & 1 \\ \sqrt{3} & 1 & 11/5 \end{vmatrix},$$

т.е. второе решение не подходит. Объединив квадратичные слагаемые с линейными, в повернутой системе координат вместо исходного получим уравнение $2,5x'^2 + 0,5y'^2 + 2\sqrt{3}x' + 2y' + 11/5 = 0$, в котором для осуществления параллельного переноса повернутой системы координат выделим полные квадраты: $2,5(x' + 2\sqrt{3}/5)^2 + 0,5(y' + 2)^2 - 1 = 0 \Rightarrow F' = -1$. После чего, введя новые переменные $\xi = x' + 2\sqrt{3}/5$, $\eta = y' + 2$, запишем уравнение

рассматриваемой кривой в каноническом виде $\frac{\xi^2}{2/5} + \frac{\eta^2}{2} = 1$. Таким образом,

исходное уравнение описывает эллипс с полуосями $a=\sqrt{2/5}$, $b=\sqrt{2}$ (рисунок 2.1).

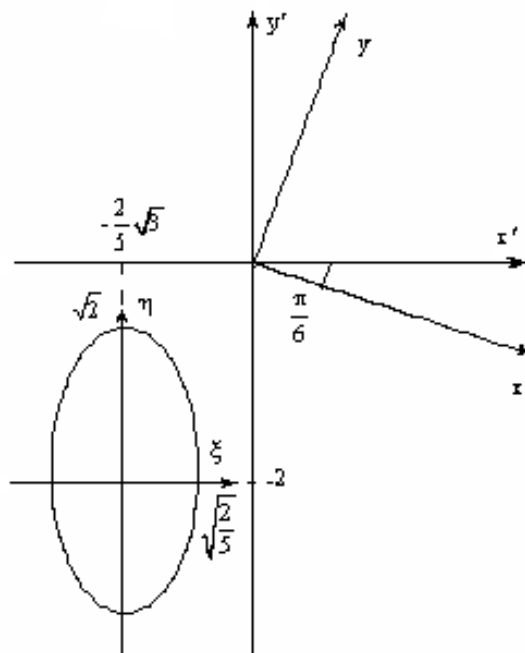


Рисунок 2.1. – График эллипса из примера 1

Решения второго и третьего примеров получены по изложенной методике и приводятся без подробных объяснений.

Пример 2. $x^2 + 4xy + y^2 + \sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 2 = 0$. $A=1$; $B=2$; $C=1$; $D=1/\sqrt{2}=E$; $F=-2$.

$$\psi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{4}{1-1} = \frac{\pi}{4}; \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} x' - y' \\ x' + y' \end{bmatrix}; \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 2x' \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} D'=1, \quad E'=0; \\ 1+1=2=A'+C' \\ 1 \times 1 - 2^2 = -3 = A' \times C' \end{array} \right\} \Rightarrow A'_1 = -1 = C'_2, \quad A'_2 = 3 = C'_1;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1/\sqrt{2} \\ 2 & 1 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & -2 \end{vmatrix} = 7,$$

$$\Delta'_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 7 \neq \Delta'_1 \Rightarrow 3x'^2 - y'^2 + 2x' - 2 = 0; 3(x'+1/3)^2 - y'^2 - 7/3 = 0;$$

$F' = -7/3$; $\xi = x' + 1/3$, $\eta = y'$; $9\xi^2 - 3\eta^2 = 7$ гипербола с $a = \sqrt{7}/3$, $b = \sqrt{7}/3$ (рисунок 2.2).

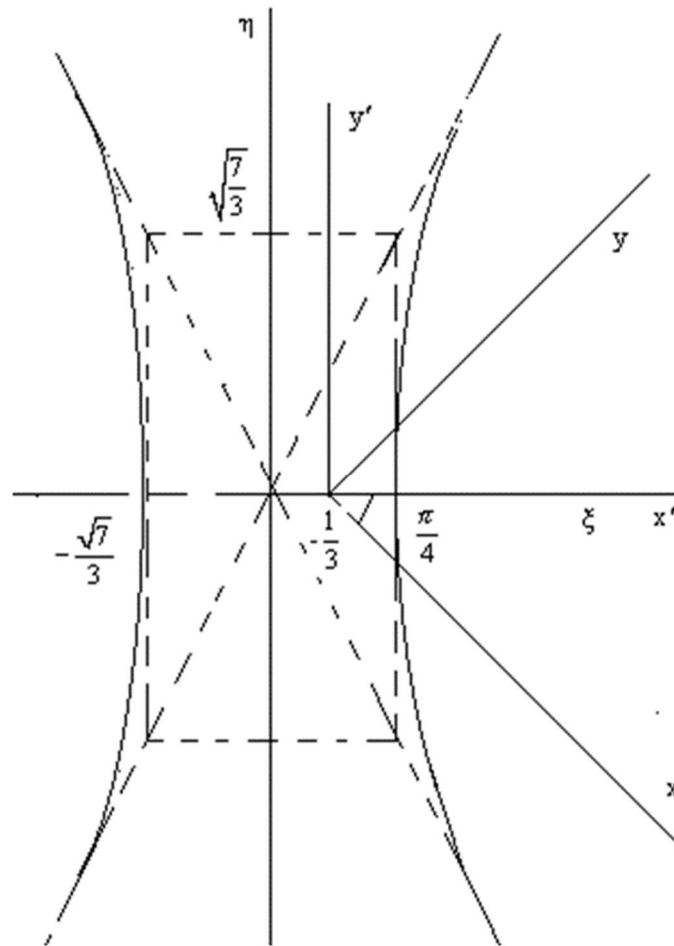


Рисунок 2.2. – График гиперболы из примера 2.

Пример 3. $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$ $A=4$, $B=-2$, $C=1$, $F=7$.
 $\psi = 0,5 \arctg(-4/3) \Rightarrow \operatorname{tg} 2\psi = -4/3$. Если значение тангенса неудобное (ψ не является рациональной частью π), элементы матрицы поворота определяют с помощью формулы

$$\sin^2 \psi_{1,2} = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\psi} \pm 1}{2\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\psi}} = \cos^2 \psi_{2,1}.$$

Неоднозначность отражает упомянутый произвол в определении ψ (при изменении ψ на $\pi/2$ квадраты синуса и косинуса «обмениваются» значениями). Выбирая $\psi = \psi_1$, найдем $\sin^2 \psi = 2/5 > \cos^2 \psi = 1/5$, откуда при

$\operatorname{tg}2\psi < 0$ следует, что ψ лежит в 1-й или в 3-й четверти, в чем легко убедиться с помощью формулы $\operatorname{tg}2\psi = \frac{2\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$. Для $\psi = \psi_2$ имеем $\sin^2 \psi < \cos^2 \psi$, т.е. оси переименовались и угол поворота для перехода в нужную систему координат уменьшается (увеличивается) на $\pi/2$. Действительно, согласно последней формуле при $\operatorname{tg}2\psi < 0$ знаки синуса и косинуса не совпадают, т.е. ψ принадлежит 2-й или 4-й четверти. Произвол, так же, как и при переходе из 1-й четверти в 3-ю, исчерпывается заменой осей противоположно направленными.

Полагая для 1-й четверти $\sin \psi = 2/\sqrt{5}$; $\cos \psi = 1/\sqrt{5}$, с помощью (2.7), (2.8) получим $x = (x' - 2y')/\sqrt{5}$; $y = (2x' + y')/\sqrt{5}$, откуда $-2x - 14y = -6\sqrt{5}x' - 2\sqrt{5}y'$, т.е. $D' = -3\sqrt{5}$, $E' = -\sqrt{5}$; $5 = A' + C'$, $0 = A'C' \Rightarrow A_1 = C_2 = 5$;

$$C_1' = A_2' = 0; \Delta = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -7 \\ -1 & -7 & 7 \end{vmatrix} = -225, \quad \Delta_2' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -3\sqrt{5} \\ 0 & 5 & -\sqrt{5} \\ -3\sqrt{5} & -\sqrt{5} & 7 \end{vmatrix} = \Delta \neq \Delta_1';$$

$5y'^2 - 6\sqrt{5}x' - 2\sqrt{5}y' + 7 = 0$, $5(y' - 1/\sqrt{5})^2 - 6\sqrt{5}x' + 6 = 0$, $F' = 6$; $\eta = y' - 1/\sqrt{5}$, $\xi = x' - 1/\sqrt{5}$, $\eta^2 = 6\xi/\sqrt{5}$; парабола с $p = 3/\sqrt{5}$ (рисунок 2.3).

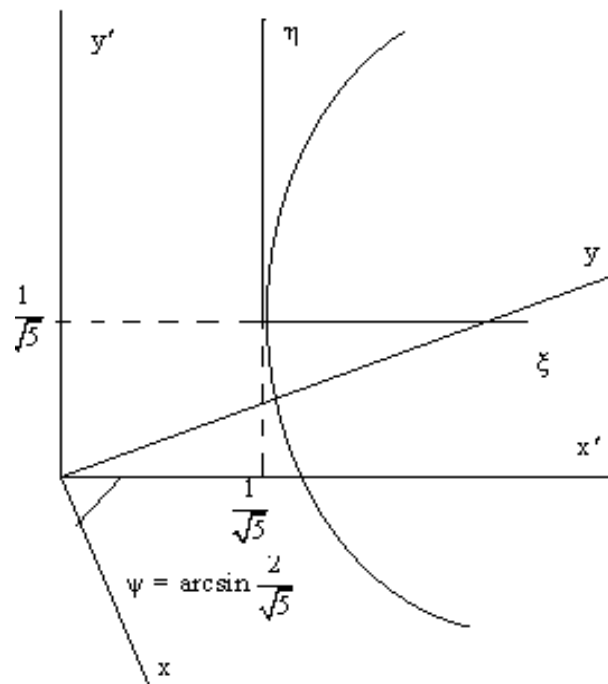


Рисунок 2.3. – График параболы из примера 3

Классификация кривых второго порядка

Если строить график не нужно (нет необходимости в определении Ψ и выделении полного квадрата), тип и параметры кривой можно определить, пользуясь инвариантами ее уравнения. Покажем прежде, что они остаются таковыми и при параллельных переносах системы координат. Для $A+C$ и δ это очевидно, так как квадратичные слагаемые (2.9) при сдвиге начала отсчета (2.14) порождают линейные и нулевого порядка, но сами при этом не меняются. Рассмотрим теперь Δ . Не ограничивая общности, будем считать, что нужный поворот уже произведен ($B=0$). Тогда в результате переноса начала координат в точку $(x_0, 0)$ уравнение (2.3) примет вид

$$\begin{aligned} & A(x-x_0)^2 + Cy^2 + 2D(x-x_0) + 2Ey + F = \\ & = Ax^2 + Cy^2 + 2(D-Ax_0)x + 2Ey + F + Ax_0^2 - 2Dx_0 = 0. \end{aligned}$$

Ему соответствует

$$\begin{aligned} \Delta^* &= \begin{vmatrix} A & 0 & D-Ax_0 \\ 0 & C & E \\ D-Ax_0 & E & F+Ax_0^2-2Dx_0 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} A & 0 & D \\ 0 & C & E \\ D-Ax_0 & E & F \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & 0 & -Ax_0 \\ 0 & C & 0 \\ D-Ax_0 & E & Ax_0^2-2Dx_0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} A & 0 & D \\ 0 & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & D \\ 0 & C & E \\ Ax_0 & E & F \end{vmatrix} + x_0 \begin{vmatrix} A & 0 & -A \\ 0 & C & 0 \\ D-Ax_0 & E & Ax_0-2D \end{vmatrix} = \\ &= \Delta + ACDx_0 + x_0 \begin{vmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ D-Ax_0 & E & -D \end{vmatrix} = \Delta. \end{aligned}$$

Аналогично рассматривается перенос вдоль оси OY . Таким образом, Δ не меняется при сдвиге начала отсчета в произвольную точку.

Обратимся теперь к системе (2.13). Очевидно, при $\delta=0$ вместе с B в результате поворота «исчезнет» A или C , т.е. уравнение (2.3) – параболического типа. Если $\delta>0$, то A' и C' одного знака, следовательно, уравнение – эллиптического типа, а при $\delta<0$ – гиперболического. В случае $\delta\neq 0$ после приведения уравнения к каноническому виду получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} A' & 0 & 0 \\ 0 & C' & 0 \\ 0 & 0 & F' \end{vmatrix} = A' C' F' = \delta \cdot F' \Rightarrow F' = \Delta / \delta. \quad (2.15)$$

Пример 4. Убедиться, что в случаях, рассмотренных в 1-м и 2-м примерах, соотношение (2.15) имеет место.

$$1) -1 = F' = \Delta / \delta = \frac{-5/4}{5/4} = -1; \quad 2) -7/3 = F' = \frac{7}{-3} = -7/3$$

Для уравнения эллиптического типа $\Delta\neq 0$ означает, что $F' \neq 0$ (см. (2.15), то есть (2.3) описывает реальный ($A'/F' < 0$) или мнимый³ ($A'/F' > 0$) эллипс. При $\Delta=0$ «графиком» (2.3) является точка (вырожденный эллипс). Очевидно, при этом секущей плоскости принадлежит только центр конуса.

Если тип уравнения гиперболический, то при $\Delta\neq 0$ графиком (2.3) будет обычная гипербола, а при $\Delta=0$, когда (см. (2.15) $F'=0$ – вырожденная (две пересекающиеся прямые: плоскость $z = z_0$ разрезает боковую поверхность конуса через его центр).

Наконец, в случае уравнения параболического типа

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & D' \\ 0 & C' & 0 \\ D' & 0 & F' \end{vmatrix} = (\text{или} \begin{vmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E \\ 0 & E & F' \end{vmatrix}) = -C' D'^2 = \Delta, \quad (2.16)$$

³ Этот случай не интерпретируется как «сечение» конуса и имеет место, когда «секущая» плоскость проходит мимо эллипсоида. Последний описывается (2.1), если туда добавить свободный член F_0 , что перенормирует константу в (2.3), но не нарушит рассуждений,

$$\text{основанных на инвариантности } \Delta: \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F+F_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & B & 0 \\ B & C & 0 \\ D & E & F_0 \end{vmatrix} = \Delta + \delta \cdot F_0 = \text{inv.}$$

что при известных Δ и C' из уравнения $C'\eta^2 + 2D'\xi = 0$ позволяет найти модуль параметра параболы

$$|p| = |D'/C'| = \left| \sqrt{-\Delta/C'} / C' \right|. \quad (2.17)$$

Пример 5. Убедиться, что для случая из примера 3 формулы (2.16), (2.17) имеют место. $-5D'^2 = -225 \Rightarrow D' = 3\sqrt{5}$; $3/\sqrt{5} = |p| = 3\sqrt{5}/5 = 3/\sqrt{5}$.

Таким образом, если (2.3) параболического типа, то при $\Delta \neq 0$ оно описывает обычную параболу, а при $\Delta = 0$ (когда $p = 0$) – вырожденную: две параллельные, слившиеся ($F' = 0$) или мнимые прямые. Их происхождение понятно, если учесть, что цилиндр является частным (предельным) случаем конуса, когда его центр при уменьшении угла раствора уходит на бесконечность (в (2.1) при этом отсутствует x или y). Результаты исследования занесены в таблицу.

Таблица 2.1

	$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$
$\delta > 0$	эллипс (действительный или мнимый)	точка
$\delta < 0$	гипербола	пара пересекающихся прямых
$\delta = 0$	парабола	пара параллельных, слившихся или мнимых прямых

Достаточные условия гладкого экстремума функции двух переменных

Используем инвариант δ для получения достаточных условий гладкого экстремума функции двух переменных $z(x, y)$. В стационарной точке $P_0 = (x_0, y_0)$ касательная плоскость к поверхности, описываемой $z(x, y)$ горизонтальна. Следовательно $dz = 0$, т.к. геометрический смысл первого дифференциала – приращение аппликаты касательной плоскости. Поэтому, ограничившись в формуле Тейлора первым ненулевым слагаемым, аппроксимируем приращение $z(x, y)$ квадратичной функцией

$$z(x, y) - z(x_0, y_0) \approx \frac{1}{2} \cdot d^2 z = \frac{1}{2} \left(A \cdot (x - x_0)^2 + 2 \cdot B \cdot (x - x_0) \cdot (y - y_0) + C \cdot (y - y_0)^2 \right),$$

где

$$A = z''_{xx}(P_0), \quad B = z'_{xy}(P_0), \quad C = z''_{yy}(P_0). \quad (2.18)$$

При этом линия уровня $z(x, y) = \text{const}$ в окрестности стационарной точки P_0 аппроксимируется кривой второго порядка. Канонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы таковы, что инвариант $\delta(P_0) = z''_{xx}(P_0) \cdot z''_{yy}(P_0) - z''_{xy}(P_0)^2$ (см. (2.6), (2.18) в этих трех случаях соответственно положителен, отрицателен и равен нулю. Очевидно, что вблизи экстремума линии уровня замкнуты, а вблизи седла – разомкнуты. Следовательно, при $\delta(P_0) > 0$ в точке P_0 имеет место экстремум, а при $\delta(P_0) < 0$ – седло. В случае $\delta(P_0) = 0$ в формуле Тейлора для $z(x, y)$ требуется удерживать слагаемые более высоких порядков для дальнейшего исследования линий уровня на предмет их замкнутости или разомкнутости.

Этим объясняется актуальность следующего раздела, ибо в соответствии с теоремой Виета A' и C' являются корнями приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, параметры которого совпадают с инвариантами линий уровня $p = A + C$, $q = \delta$. Удержание в формуле Тейлора слагаемых более высоких порядков приведет к поиску и решению уравнений третьей и четвертой степени.

3. РЕШЕНИЕ ФЕРРАРИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ [5]

Шутят, что величие математика измеряется количеством принадлежащих ему громоздких доказательств. Позже появляется немало кратких, но совершенно немотивированных решений той же проблемы. Наведение такого «лоска» ничего не дает для понимания творческой кухни ученого. То, как автор догадался до той или иной формулировки, является наиболее поучительным и практически всегда содержит идею оригинального (первого) доказательства. К сожалению, история науки неотвратимо теряет подробности получения конкретных результатов. Объективно это связано с увеличением удаленности во времени, а субъективно с неизбежным переосмыслением и необходимостью непрерывного интегрирования прежних результатов в единую систему постоянно обновляющихся научных знаний. В этой связи для восстановления исторической справедливости и воссоздания эстетической функции науки как составной части общечеловеческой культуры представляется целесообразным пройти по практически исчезнувшим следам наших предшественников. Кроме того, такой научно-исторический эксперимент (экскурс) представляет самостоятельный творческий интерес, подобно современным экспедициям по маршрутам и со снаряжением древних путешественников и мореплавателей.

В математических справочниках приводится конечный результат решения Феррари алгебраических уравнений 4-й степени [6]. Способ его получения не получил широкого освещения в современных учебниках. Вместе с тем без проникновения в суть соответствующие формулы представляются громоздкими, как и формулы Кардано для решения уравнений 3-й степени. Постараемся восполнить этот пробел.

Рассмотрим приведенное уравнение 4-й степени

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0. \quad (3.1)$$

Представим его левую часть в виде произведения двух квадратных трехчленов⁴

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = 0. \quad (3.2)$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в (3.1) и (3.2):

$$\begin{cases} a + c = A \\ ac + b + d = B \\ ad + bc = C \\ bd = D \end{cases} \quad (3.3)$$

Первые два уравнения системы (3.3) позволяют, воспользовавшись теоремой Виета ($ac = B - b - d$; $a + c = A$), выразить a и c через $b + d$:

$$a = \frac{A + \sqrt{A^2 + 4(b + d - B)}}{2}; \quad c = \frac{A - \sqrt{A^2 + 4(b + d - B)}}{2}. \quad (3.4)$$

Произведение трехчленов в (3.2) не меняется при перемене мест сомножителей. Поэтому (3.3) инвариантно относительно перестановки a с c и b с d . Т.е. предложенное в (3.4) распределение корней не умаляет общности.

Подставив (3.4) в третье уравнение системы (3.3), получим после группировки

$$\sqrt{A^2 + 4(b + d - B)}(d - b) = 2C - A(b + d). \quad (3.5)$$

⁴ Согласно основной теореме алгебры такая процедура неоднозначна, т.к. два корня из четырех могут быть отобраны тремя способами.

Возведем обе части (3.5) в квадрат⁵ с целью получения уравнения относительно $b + d$:

$$(A^2 - 4B + 4(b + d))(d - b)^2 = (2C - A(b + d))^2.$$

Выделим слева квадрат суммы

$$(A^2 - 4B + 4(b + d))((b + d)^2 - 4bd) = (2C - A(b + d))^2.$$

Подставив сюда из (3.3) $bd = D$ и введя замену

$$b + d = y, \tag{3.6}$$

получим кубическое уравнение относительно y

$$(A^2 - 4B + 4y)(y^2 - 4D) = (2C - Ay)^2. \tag{3.7}$$

Таким образом, решение (3.1) сведено к поиску какого-либо корня кубического уравнения (3.7). Любой из них позволяет с помощью (3.4) определить a , c и осуществить одно из трех разложений (3.2), упомянутых в первой сноске. Естественно, набор корней уравнения (3.1) от этого произвола не зависит.

Если коэффициенты при степенях x в (3.1) вещественны, то используя неоднозначность разложения (3.2), естественно обеспечить вещественность фигурирующих там a , c , b и d . Согласно (3.4) и (3.6) это означает обязательное наличие в рассматриваемом случае у (3.7) вещественного корня

$$y \geq B - A^2/4. \tag{3.8}$$

Именно его и следует подставлять в (3.6).

Проиллюстрируем изложенный метод на примере

$$x^4 - 10x^3 + 27x^2 - 14x + 2 = 0. \tag{3.1'}$$

Запишем систему (3.3)

$$\begin{cases} a + c = -10 \\ ac = 27 - b - d \\ ad + bc = -14 \\ bd = 2 \end{cases} \tag{3.3'}$$

⁵ При этом могут появиться посторонние корни, поэтому отбор значений для b и d будем осуществлять с помощью (3.5).

и выражения (3.4) для a и c

$$a = -5 + \sqrt{b+d-2}; \quad c = -5 - \sqrt{b+d-2}. \quad (3.4')$$

В рассматриваемом примере коэффициенты при степенях x в (3.1') вещественны. В этом случае фигурирующие в (3.2) a , c , b и d удобно тоже сделать вещественными. Для этого потребуем выполнения неравенства (3.8)

$$y = b + d \geq 2, \quad (3.8')$$

что, в частности, приводит к необходимости выбора в качестве y вещественного корня уравнения (3.7)

$$(y-2)(y^2-8) = (5y-14)^2. \quad (3.7')$$

Таковой, как известно, всегда имеется у уравнения 3-й степени. Условие $y \geq 2$ сужает область поисков нужного корня и позволяет подобрать $y = 3$.

Тогда

$$\begin{cases} b + d = 3 \\ bd = 2 \end{cases}.$$

Отсюда

$$\begin{cases} b = 1 \\ d = 2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} b = 2 \\ d = 1 \end{cases}.$$

Отбирая b и d по условию (3.5), получаем $b = 1, d = 2$. Подставляя в (3.4') $b + d = 3$, найдем $a = -5 + \sqrt{3-2} = -4$, $c = -5 - \sqrt{3-2} = -6$. Теперь можно записать разложение (3.2):

$$(x^2 - 4x + 1)(x^2 - 6x + 2) = 0, \quad (3.2')$$

отсюда $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$; $x_{3,4} = 3 \pm \sqrt{7}$.

4. ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА В ОБЛАСТИ РАСХОДИМОСТИ СООТВЕТСТВУЮЩЕГО СТЕПЕННОГО РЯДА [7]

Методически верное (систематическое) изложение любой науки предполагает неукоснительно мотивированное введение новых понятий. Необходимость их появления естественным путем должна вытекать из всего предыдущего рассмотрения. В частности, крайне нежелательно для доказательства теорем или вывода формул пользоваться искусственными приемами, оставляя в тени то, как до них догадались.

Чтобы не быть голословными, приведем пример такого подхода. Обычно для получения формулы Тейлора функцию аппроксимируют полиномом, а выражение для остаточного члена выводят с помощью громоздкой вспомогательной функции [8]. Первое остается никак не мотивированным, а второе – совершенно искусственно. Покажем вначале, как те же результаты можно получить естественным путем.

Получение формулы Тейлора с помощью теоремы Лагранжа

По теореме о связи предела с бесконечно малой функцией, из определения производной следует равенство

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \alpha(x), \quad (4.1)$$

в котором $\alpha(x)$ – функция бесконечно малая в окрестности точки x_0 . При этом из существования $f''(x_0)$ следует непрерывность $\alpha(x)$ в точке x_0 , т.е.

$$\alpha(x_0) = 0. \quad (4.2)$$

Для дальнейшего (4.1) удобно представить в виде

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0). \quad (4.3)$$

Заметим, что с учетом (4.2)

$$\alpha(x)(x - x_0) = o(x - x_0).$$

По аналогии с (4.3)

$$\alpha(x) = \alpha'(x_0)(x - x_0) + \beta(x)(x - x_0), \quad (4.4)$$

где учтено (4.2), а

$$\beta(x_0) = 0. \quad (4.5)$$

Чтобы определить $\alpha'(x_0)$, дважды продифференцируем (4.3) по x :

$$f''(x) = \alpha''(x)(x - x_0) + 2\alpha'(x) \Rightarrow \alpha'(x_0) = f''(x_0)/2. \quad (4.6)$$

Подставив (4.4) и (4.6) в (4.3), получим

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \beta(x)(x - x_0)^2, \quad (4.7)$$

где согласно (4.5) $\beta(x)(x - x_0)^2 = o((x - x_0)^2)$.

Продолжив без комментариев начатую процедуру

$$\beta(x) = \beta'(x_0)(x - x_0) + \gamma(x)(x - x_0), \quad \gamma(x_0) = 0,$$

$$f'''(x) = \beta'''(x)(x - x_0)^2 + 6\beta''(x)(x - x_0) + 6\beta'(x) \Rightarrow \beta'(x_0) = \frac{f'''(x_0)}{6}, \quad (4.8)$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3 + o((x - x_0)^3),$$

нетрудно заметить общую закономерность

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n, \quad (4.9)$$

где $R_n = o((x - x_0)^n)$ – остаточный член в форме Пеано.

Формула Тейлора (4.9) используется в приближенных вычислениях. Для оценки их погрешности удобно связать R_n с $f(x)$. С этой целью воспользуемся теоремой Лагранжа

$$\alpha(x) - \alpha(x_0) = \alpha'(x) = \alpha'(\xi_1)(x - x_0) = \frac{f''(\xi_1)}{2}(x - x_0), \quad (4.10)$$

где $\xi_1 \in (x, x_0)$.

Справедливость первого равенства в (4.10) следует из (4.2), а третьего – из того, что (4.6) доказано для произвольной точки (в том числе и для ξ_1).

Подставив (4.10) в (4.3), получим

$$R_1 = \frac{f''(\xi_1)}{2}(x - x_0)^2. \quad (4.11)$$

Аналогично (см. (4.5) и (4.8)) $\beta(x) = \beta'(\xi_2)(x - x_0) = \frac{f'''(\xi_2)}{6}(x - x_0)$,

что после подстановки в (4.7) дает

$$R_2 = \frac{f'''(\xi_2)}{6}(x - x_0)^3. \quad (4.12)$$

Обобщив (4.11), (4.12), получим остаточный член в форме Лагранжа

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}. \quad (4.13)$$

Пусть для определенности $x_0 < x$, тогда формулы (4.9), (4.13) справедливы, если $f(x)$ $n+1$ раз дифференцируема на (x_0, x) и непрерывна на $[x_0, x]$ вместе со своими производными до n -го порядка включительно.

Значение ξ_n как внутренней точки интервала (x_0, x) очевидно является функцией x и x_0 . Вид $\xi_n(x, x_0)$ в неявной форме определяется системой уравнений (4.9), (4.13). Существование решения доказано выше, что позволяет интерпретировать формулу Тейлора как тождество

$$f(x) \equiv f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi_n(x, x_0))}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}. \quad (4.14)$$

Проиллюстрируем (4.14) на примере $f(x) = \ln(1+x)$. Для $x_0 = 0$ и $n=0$ с учетом (4.9), (4.13) получим $\ln(1+x) = \ln 1 + R_0 = \frac{x}{1+\xi_0}$, откуда

$\xi_0(x, 0) = \frac{x}{\ln(1+x)} - 1$, что после подстановки в предыдущее равенство обращает его в тождество, являющееся частным случаем (4.14).

Пусть для определенности $x > 0$, тогда $0 < \xi_0(x, 0) < x$ в полном соответствии с теоремой Лагранжа. Действительно, левое неравенство очевидно следует из определения $\xi_0(x, 0)$, а для доказательства правого перепишем

$$\text{его в виде } \varphi(x) = \frac{x}{x+1} < \ln(1+x) = \psi(x).$$

$$\text{Очевидно, } \varphi(0) = \psi(0) \text{ и для } x > 0 \quad \varphi'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} < \frac{1}{1+x} = \psi'(x),$$

что доказывает требуемое утверждение. Заметим, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \xi_0(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x}{\ln(1+x)} - 1 \right] = 1 - 1 = 0,$$

как это и должно быть.

Применение формулы Тейлора в области расходимости соответствующего степенного ряда

Устремив в (4.9) n к бесконечности, получим степенной ряд. В интервале его сходимости

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k \equiv \frac{f^{(n+1)}(\xi_n(x, x_0))}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} = R_n(x, x_0), \quad (4.15)$$

а вне интервала это не так. Тем не менее даже в случае расходимости соответствующего ряда при выполнении оговоренных выше условий формула Тейлора верна, как и теорема Лагранжа, обобщением которой она, в сущности, и является. Например,

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + R_n(x), \quad (x > -1), \quad (4.16)$$

где x ограничено только областью определения функции $\ln(1+x)$. Но

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \quad (4.17)$$

лишь в интервале $(-1 < x \leq 1)$ сходимости ряда (4.17).

Заметим, однако, что вне интервала сходимости соответствующего степенного ряда формулу Тейлора нельзя применить для сколь угодно точного вычисления $f(x)$. Действительно, согласно (4.9), (4.14)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x, x_0) = f(x) - f(x_0) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k \neq 0, \quad (4.18)$$

т.к. фигурирующий в (4.18) ряд не сходится к своей функции.

Вместе с тем на практике не требуются абсолютно точные вычисления. Покажем в этой связи, что для любой конечной точности $\Delta \neq 0$, формулу (4.9) можно использовать для приближенных вычислений вне интервала сходимости соответствующего ряда.

Оговоримся сразу, речь не идет об улучшении сходимости (т.е. замене одного функционального ряда другим). Нас в данном случае интересуют принципиальные возможности именно формулы Тейлора.

Согласно (4.16) для $f(x) = \ln(1+x)$

$$R'_n(x) = \frac{1}{1+x} - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} x^{k-1}.$$

Воспользовавшись в последнем равенстве для $|x| < 1$ стандартным разложением

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} x^{k-1},$$

получим

$$R'_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k-1} x^{k-1} = (-1)^n x^n \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} x^{k-1} = \frac{(-1)^n x^n}{1+x},$$

что при $0 < x < 1$ обеспечивает чередование знака $R_n(x)$, ибо согласно (4.16) $R_n(0) = 0$. При этом $|R_{n+1}(x)|$ растет медленнее, чем $|R_n(x)|$.

Из (4.16) также следует, что при $x \gg 1$ функция $R_n(x)$ ведет себя как $(-1)^n x^n / n$. При этом $|R_{n+1}(x)|$ растет уже быстрее, чем $|R_n(x)|$.

С учетом изложенного, вне области сходимости ($x > 1$) увеличивать n имеет смысл до тех пор, пока выполняется неравенство

$$|R_{n+1}(x)| \leq |R_n(x)|. \quad (4.19)$$

Численные расчеты, выполненные в среде пакета MathCAD, показывают, что с увеличением n область выполнения неравенства (4.19) сужается, а погрешность приближенных вычислений, связанная с отбрасыванием в (4.16) остаточного члена, при этом повышается (рисунок 4.1).

Свяжем максимально допустимое x с допустимой погрешностью вычислений Δ . Для этого подставим (4.16) в (4.19). С учетом упомянутого чередования знака получим

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} \leq 2|R_n(x)|. \quad (4.20)$$

Дальнейшее принципиально сводится к следующему. Из равенства (4.20) с помощью (4.16) можно определить $x = x(n)$ – максимальное значение

аргумента, возможное при данном n для приближенных вычислений вне интервала сходимости⁶. Затем из условия

$$|R_n(x(n))| = \Delta \quad (4.21)$$

найдем минимальное $n = n(\Delta)$, необходимое для обеспечения погрешности, ограниченной Δ . После чего получим то самое, максимальное $x = x(\Delta) = x(n(\Delta))$, позволяющее с помощью формулы Тейлора вне интервала сходимости соответствующего ряда вычислить $\ln(1+x)$ с заданной погрешностью Δ .

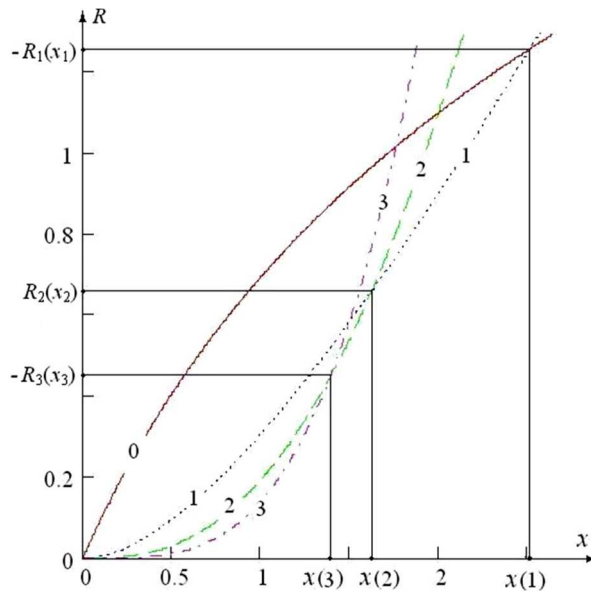


Рисунок 4.1. – Область применимости формулы Тейлора и ее погрешность (i -я кривая изображает модуль остаточного члена $R_i(x)$)

К сожалению, намеченная программа трудно реализуема, т.к. после подстановки (4.16) в (4.20) получается трансцендентное уравнение относительно x , не позволяющее явно выразить x через n . Тем не менее, имея в виду, что такая зависимость существует, уравнение (4.21) с учетом (4.20) представим в виде

$$\frac{x(n)^{n+1}}{n+1} \equiv 2\Delta. \quad (4.22)$$

Формула (4.22) не является неявным заданием x как функции двух переменных n и Δ , ибо n при данном x не может принимать произвольные значения, будучи с ним функционально связанным условием (4.19) (или более

⁶ Если $x > x(n)$, то условие (4.19) нарушается и для уменьшения погрешности лучше ограничиться меньшим n .

конкретно уравнением (4.20). В частности, с ростом n величина $x(n)$ монотонно убывает, асимптотически приближаясь к единице (см. рисунок 4.1). Поэтому правильно подобранное n является минимальным (чтобы не сужать область применимости формулы Тейлора), при котором обеспечивается выполнение (4.21), или, иными словами, достигается требуемая точность. В области $x < x(n)$ погрешность формулы Тейлора не превосходит $|R_n(x(n))|$ и монотонно убывает с ростом n (см. рисунок 4.1). При этом само $x(n)$, как уже говорилось, стремится к единице справа.

В свете изложенного, (4.22) является уравнением для определения упомянутого (минимального) n , достаточного для обеспечения требуемой точности. Разрешить его непосредственно нельзя, т.к. не конкретизирован вид функции $x(n)$. Хотя, по-видимому, это и можно было сделать с помощью (4.16), (4.20), воспользовавшись численными методами. Однако проще поступить иначе. Используем то обстоятельство, что корень уравнения (4.22) $n(\Delta)$, будучи подставленным в $x(n)$, должен (в свете изложенного) обеспечить максимальное значение x , отвечающее данному Δ . Поэтому $n(\Delta)$ можно определить как точку максимума функции

$$x(n, \Delta) = [2\Delta(n+1)]^{1/(n+1)} \quad (4.23)$$

при фиксированном Δ . Формула (4.23) получается, если уравнение (4.22) интерпретировать как неявное задание функции двух переменных $x(n, \Delta)$. Подчеркнем, что $x(n, \Delta)$ не имеет ничего общего с функцией одной переменной $x(n)$ и не совпадает с ней ни при каком значении аргумента Δ .

Для $\Delta = 0,1$ зависимость (4.23) представлена на рисунке 4.2. Видно, что кривая действительно содержит экстремум, который является максимумом, как это и должно быть в соответствии с вышеизложенным.

Выполнив в (4.23) дифференцирование по n , запишем необходимое условие экстремума

$$x(n, \Delta)'_n = \frac{[2\Delta(n+1)]^{1/(n+1)}}{(n+1)^2} \{1 - \ln[2\Delta(n+1)]\} = 0,$$

откуда⁷

$$n(\Delta) = \frac{e}{2\Delta} - 1, \quad (4.24)$$

⁷ В силу дискретности n полученные с помощью (4.24) значения следует округлять до целых.

что после подстановки в (4.22) дает

$$x(\Delta) = e^{2\Delta/e} > 1. \quad (4.25)$$

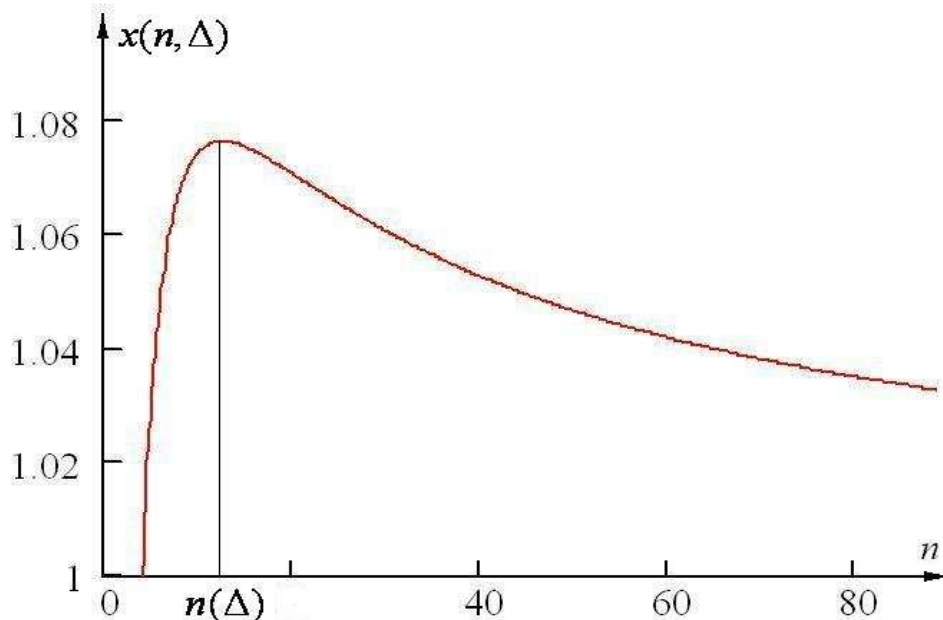


Рисунок 4.2. – Вид функции $x(n, \Delta)$ при фиксированном Δ

Согласно (4.24) для увеличения точности вычислений вне интервала сходимости ряда Тейлора нужно в формуле Тейлора увеличивать число удерживаемых слагаемых. При этом согласно (4.25) уменьшается максимальное x , доступное для приближенных вычислений с требуемой точностью. В частности $x(\Delta = 0) = 1$ и совпадает с правой границей интервала сходимости⁸. Тем не менее, еще раз подчеркнем, что для любого конечного Δ имеет место строгое неравенство $x(\Delta) > 1$.

При необходимости формулы (4.24), (4.25) позволяют решить обратную задачу. По данному $x > 1$ с помощью (4.25) можно определить возможную точность вычислений Δ , а затем из (4.24) получить оптимальное число слагаемых. С использованием формул (4.24), (4.25) составлена таблица погрешностей приближенных вычислений с помощью формулы Тейлора (4.16) вне области сходимости ряда (4.17).

⁸ В этом смысле проведенное рассмотрение можно считать исследованием на сходимость ряда Тейлора функции $\ln(1+x)$. При этом постановка вопроса (как и само понятие сходимости) возникла естественным путем.

Таблица 4.1. – Погрешность формулы Тейлора для $\ln(1+x)$ вне области сходимости соответствующего степенного ряда

Требуемая максимальная погрешность Δ	Оптимальное $n = n(\Delta)$	Максимально возможное $x = x(\Delta)$	$R_n(x(\Delta))$
0,1	13	1,07635	-0,09994
0,01	135	1,00738	-0,009999978
0,001	1358	1,00074	0,000999999943

Видно, что результаты вычислений полностью подтверждают развитую методику применения формулы Тейлора вне интервала сходимости соответствующего степенного ряда.

5. ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА, ФОРМУЛА НЬЮТОНА – ЛЕЙБНИЦА И ТЕОРЕМА ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ СРЕДНЕМ [9]

Традиционно втузовский курс высшей математики выстраивают по аналогии с университетским. Одно из главных требований, предъявляемых к последнему – строгость и последовательность изложения. Неукоснительная реализация этих принципов не лучшим образом регламентирует структуру курса. Возникает противоречие с практикой инженерного творчества.

Рассмотрим для примера методику традиционного изложения интегрального исчисления [8]. Вначале вводится понятие первообразной, неопределенного и определенного интеграла. Формулируется теорема существования последнего, доказательство которой проводится после изучения свойств определенного интеграла. И лишь в заключение, с помощью теоремы Барроу получают формулу Ньютона – Лейбница. Иными словами, ради строгого доказательства теоремы существования наиболее содержательный (с точки зрения приложений) материал отодвигается на второй план. Ниже предлагается альтернативный подход к освещению проблемы.

Рассмотрев задачи, приводящие к понятию определенного интеграла и дав его определение, проводим для примера непосредственное интегрирование. Проиллюстрировав неконструктивность такой процедуры, связанную с необходимостью знать явную зависимость интегральной суммы от числа слагаемых, приступаем к получению универсального, практически удобного способа вычисления определенных интегралов.

Пусть функция $F(x)$ имеет производную $F'(x) = f(x)$, непрерывную на промежутке $[a, b]$. Точками x_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) разобьем его на n произвольных частей длинами Δx_i . По теореме Лагранжа внутри каждого из полученных промежутков есть точка ξ_i , такая, что

$$\left. \begin{aligned} F(x_1) - F(a) &= f(\xi_1)\Delta x_1 \\ F(x_2) - F(x_1) &= f(\xi_2)\Delta x_2 \\ F(x_3) - F(x_2) &= f(\xi_3)\Delta x_3 \\ \dots &\dots \\ F(b) - F(x_{n-1}) &= f(\xi_n)\Delta x_n \end{aligned} \right\}. \quad (5.1)$$

Сложив эти равенства, получим формулу

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i, \quad (5.2)$$

в правой части которой – интегральная сумма для функции $f(x)$ на промежутке $[a, b]$. Условие существования определенного интеграла выполнено, поэтому при произвольном (в том числе и при нашем) выборе точек ξ_i эту сумму в пределе $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) можно заменить на $\int_a^b f(x)dx$.

В итоге получим основную формулу интегрального исчисления, носящую имя его создателей:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (5.3)$$

Таким образом, вычисление определенного интеграла свелось к отысканию функции, производная которой равна подынтегральной. Здесь уместно ввести понятие первообразной и рассмотреть основные классы интегрируемых функций.

Чтобы умело пользоваться определенным интегралом, нужно изучить его свойства. Формула Ньютона – Лейбница позволяет легко убедиться в их справедливости. В частности, в соответствии с правилами дифференцирования первообразная линейной комбинации функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ равна линейной комбинации их первообразных $F_1(x)$ и $F_2(x)$:

$$(c_1 F_1(x) + c_2 F_2(x))' = c_1 F_1(x)' + c_2 F_2(x)' = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x).$$

Поэтому из (5.3) следует, что

$$\int_a^b (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x))dx = c_1 F_1(b) + c_2 F_2(b) - (c_1 F_1(a) + c_2 F_2(a)) =$$

$$= c_1(F_1(b) - F_1(a)) + c_2(F_2(b) - F_2(a)) = c_1 \int_a^b f_1(x) dx + c_2 \int_a^b f_2(x) dx,$$

где c_1 и c_2 – постоянные множители.

Для примера приведем также доказательство теоремы об интегральном среднем:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{F(b) - F(a)}{b-a} = F'(\xi) = f(\xi),$$

где $\xi \in [a, b]$.

Первое равенство в последней формуле записано по определению, третье – на основании теоремы Лагранжа.

После получения свойств определенных интегралов можно переходить к их геометрическим и физическим приложениям. При этом следует рассмотреть задачи, приводящие к понятию несобственных интегралов (разряд конденсатора, например), и соответствующими обобщениями завершить изучение интегрального исчисления.

6. ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ РЕГРЕССИЯ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ НА ОСНОВЕ ТАБЛИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРОИЗВОДНЫХ [10]

Обычно для аппроксимации функций, заданных таблично, используют процедуру регрессии или строят интерполяционные многочлены. Первое целесообразно, если известен вид функции и требуется определить лишь числовые значения ее параметров. За основу берут полученные с некоторой погрешностью экспериментальные точки и применяют к ним метод наименьших квадратов. В отличие от кривой регрессии график интерполяционного многочлена проходит точно через опорные точки. Такой подход приемлем, если точки густо расположены и точность, с которой они найдены, высока. Например, функции, заданные плохо сходящимися рядами, табулируют с любой нужной точностью и во всех дальнейших вычислениях заменяют интерполяционными многочленами, что значительно повышает скорость счета.

Отличие рассматриваемой ситуации в том, что таблично задана не только функция $y(x)$

$$y(x_i) = y_i \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (6.1)$$

но и ее производная

$$y'(x_k) = y'_k, \quad (k=1,2,\dots,m), \quad (6.2)$$

причем наборы точек x_i и x_k , вообще говоря, не совпадают. Единственное к ним требование – репрезентативность, что обеспечивается достаточным объемом ($n, m \gg 1$) и случайным характером обеих выборок. Кроме того, погрешности табличных значений (6.1), (6.2) должны быть согласованы:

$$\Delta y_i \approx (x_{i+1} - x_i) \Delta y'_i. \quad (6.3)$$

В противном случае использовать (6.2) вместе с (6.1) нецелесообразно. В (6.3) символами Δy_i и $\Delta y'_i$ обозначены погрешности в измерении функции и ее производной соответственно.

Аппроксимируем $y(x)$ полиномом

$$y(x) \cong P(x) = \sum_{r=0}^{\alpha} a_r x^r, \quad (6.4)$$

порядок и коэффициенты которого можно определить на основе таблицы (6.1) с помощью модифицированного метода наименьших квадратов, который приходится применять, когда вид зависимости принципиально неизвестен (например, случаен) и опорных точек в силу объективных причин не может быть много (например, сбор информации сопряжен со значительными материальными и технологическими трудностями). В этом случае кривую полиномиальной регрессии целесообразно определять в соответствии со следующей методикой:

- 1) из общего массива исходных данных выбрасывается одна точка;
- 2) на основе оставшихся данных строится регрессионный многочлен низкой степени;
- 3) находится разность между табличным значением функции в выброшенной точке и соответствующим значением, найденным с помощью регрессионной процедуры;
- 4) в массив возвращается выброшенная точка и выбрасывается следующая, после чего повторяются операции, предусмотренные вторым и третьим пунктом.
- 5) четвертый пункт повторяется до тех пор, пока оговоренная в нем процедура не будет осуществлена с каждой точкой исходного массива данных;
- 6) суммируются абсолютные величины отклонений, упомянутых в третьем пункте;

7) операции, предусмотренные вторым – шестым пунктами, повторяем, последовательно увеличивая степень регрессионного многочлена;

8) приемлемая степень многочлена обеспечивает допустимую для практических нужд величину найденного в шестом пункте отклонения регрессионной зависимости от заданной таблично.

В связи с тем, что в рассматриваемой задаче экспериментальная информация о функции содержит сведения и о ее производной, ниже будет развит гибридный вариант аппроксимации. Определив порядок и коэффициенты полинома (6.4), дополним таблицу (6.2) новыми данными:

$$P'(x_i) = y'_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (6.5)$$

Затем, опираясь на расширенную таблицу (6.2), (6.5), вновь применим изложенную выше методику

$$y'(x) \cong f'(x) = \sum_{q=0}^{\beta} b_q x^q. \quad (6.6)$$

Тогда окончательная регрессия примет вид

$$y(x) = F(x), \quad (6.7)$$

в котором $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$. Возникшую в (6.7) постоянную определим на основе (6.1) методом наименьших квадратов.

Недостаток предлагаемого подхода (6.1)–(6.7) состоит в разной точности таблиц (6.2) и (6.5), т.к. (6.5) кроме погрешности измерений (6.1) содержит еще погрешность аппроксимации (6.4). Если $n \gg m$, этим обстоятельством можно пренебречь. В противном случае роль (6.2) можно усилить, дополнив вместо (6.5) таблицу (6.2) значениями

$$F'(x_i) = f'(x_i) = y'_i. \quad (6.8)$$

В результате получим итерационную процедуру, сходящуюся к (6.2), что в ситуации $n \gg m$ не целесообразно. Поэтому правильнее дополнить (6.1) точками

$$F(x_k) = y_k, \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (6.9)$$

и повторять (6.1)–(6.9) до тех пор, пока вид $F(x)$ не стабилизируется.

В двумерном случае вместо (6.1), (6.2) будем опираться на таблицы

$$z(x_i, y_i) = z_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (6.10)$$

$$z'_x(x_k, y_k) = z'_{xk}, \quad (k = 1, 2, \dots, m), \quad (6.11)$$

$$z'_y(x_k, y_k) = z'_{yk}, \quad (k = 1, 2, \dots, m). \quad (6.12)$$

Теперь условие (6.3) примет вид

$$\Delta z_i \cong (x_{i+1} - x_i) \Delta z'_{xi} + (y_{i+1} - y_i) \Delta z'_{yi}. \quad (6.13)$$

Вместо (6.4) запишем

$$z(x, y) \cong P(x, y) = \sum_{r,s}^{\alpha} a_{rs} x^r y^s, \quad (6.14)$$

после чего, определив α и a_{rs} , дополним таблицы (6.11), (6.12) значениями

$$P'_x(x_i, y_i) = z'_{xi}, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (6.15)$$

$$P'_y(x_i, y_i) = z'_{yi}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6.16)$$

и, опираясь на $n + m$ двухмерных точек, определим

$$z'_x(x, y) \cong X(x, y) = \sum_{p,q=0}^{\beta} b_{pq} x^p y^q, \quad (6.17)$$

$$z'_y(x, y) \cong Y(x, y) = \sum_{p,q=0}^{\gamma} c_{pq} x^p y^q. \quad (6.18)$$

В дополнение к описанной процедуре по определению $X(x,y)$, $Y(x,y)$ при использовании метода наименьших квадратов нужно требовать выполнения условия

$$X'_y(x, y) = Y'_x(x, y), \quad (6.19)$$

обеспечивающего гладкость поверхности $z(x, y)$.

Условие (6.19) связывает разложения (6.17), (6.18):

$$\sum_{p,q}^{\beta} b_{pq} x^p q y^{q-1} = \sum_{p,q}^{\gamma} c_{pq} p x^{p-1} y^q, \quad (6.20)$$

откуда следует равенство порядков, фигурирующих в (6.17), (6.18) многочленов, некоторые значения коэффициентов и связь между ними:

$$\beta = \gamma, \quad b_{\beta q} = c_{p\beta} = 0, \quad b_{p,q+1}(q+1) = c_{p+1,q}(p+1). \quad (6.21)$$

Чтобы не пользоваться связями (6.21), можно с самого начала вместо (6.17), (6.18) ввести многочлен

$$F(x, y) = \sum_{p,q=0}^{\beta} d_{pq} x^p y^q \quad (6.22)$$

и работать с его коэффициентами

$$z'_x(x, y) \cong X(x, y) = F'_x(x, y), \quad z'_y(x, y) \cong Y(x, y) = F'_y(x, y). \quad (6.23)$$

В результате получим окончательный вид полиномиальной регрессии поверхности с учетом имеющегося поля градиентов (6.11), (6.12):

$$\begin{aligned} z(x, y) \cong F(x, y) &= \int_{x_0}^x X(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Y(x, y) dy = \\ &= \sum_{p,q}^{\beta} \left[b_{pq} \frac{y_0^q}{p+1} (x^{p+1} - x_0^{p+1}) + c_{pq} \frac{x^p}{q+1} (y^{q+1} - y_0^{q+1}) \right], \end{aligned} \quad (6.24)$$

где числа x_0, y_0 определим на основе (6.10) методом наименьших квадратов.

При необходимости с помощью (6.10)–(6.27) можно развить описанную выше итерационную процедуру, дополнив (6.10) новыми точками

$$F(x_k, y_k) = z_k. \quad (6.25)$$

В заключение заметим, что при определении коэффициентов регрессии поля градиентов, фигурирующих в (6.17), (6.18) (или в (6.22)), нужно чтобы суммы квадратов отклонений, минимизируемые в методе наименьших квадратов, были для (6.17), (6.18) (или (6.23) одного порядка малости.

7. РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ФУРЬЕ ТАБЛИЧНО ЗАДАННЫХ ФУНКЦИЙ [11]

Особое место при восстановлении функциональной связи по данной совокупности экспериментальных точек занимают методы, использующие замену искомой связи частичной суммой ряда по некоторой системе ортогональных функций [12]. Для этого важно знать номер упомянутой

частичной суммы, наиболее подходящий для данной таблицы. Разъяснению смысла слов «наиболее подходящий» и определению самого номера посвящен данный раздел.

Понимая под определенным интегралом предел интегральных сумм, естественно ввести скалярное произведение функций

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)g(x_k) = \vec{f} \cdot \vec{g} \quad (7.1)$$

как сумму произведений соответствующих координат бесконечномерных векторов

$$\vec{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{b-a}{n}} \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}. \quad (7.2)$$

По аналогии с разложением вектора в декартовом базисе попытаемся представить $f(x)$ в виде

$$f(x) = a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + \dots + a_m\phi_m(x) + \dots = \{a_1, a_2, \dots, a_m, \dots\}, \quad (7.3)$$

где $\{\phi_m(x)\}$ – ортонормированная система функций

$$\phi_m \cdot \phi_k = \begin{cases} 1, & m = k \\ 0, & m \neq k \end{cases}. \quad (7.4)$$

Равенство в (7.3) возможно, если при выборе $\{\phi_m(x)\}$ специфика задачи учтена верно, что обеспечивает отсутствие у \vec{f} других координат кроме $\{a_m\}$ и сходимость фигурирующего в (7.3) функционального ряда.

В этом случае квадрат модуля \vec{f} равен сумме квадратов его координат

$$\int_a^b f^2(x)dx = \sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 \quad (7.5)$$

при условии, что интеграл в (7.5) существует. Заметим, что равенство (7.5), известное как формула Парсеваля [12], становится в данной интерпретации тривиальным.

Аппроксимируем $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ суммой

$$S_n(x) = \sum_{m=1}^n \beta_m \phi_m(x) = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, 0, 0, \dots\}. \quad (7.6)$$

В качестве меры близости используем интегрально усредненный квадрат отклонения $\delta(n)$

$$(b-a)\delta^2(n) = \int_a^b [f(x) - S_n(x)]^2 dx = \sum_{m=1}^n (a_m - \beta_m)^2 + \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m^2. \quad (7.7)$$

Справа в (7.7) сумма квадратов разностей соответствующих координат начала и конца вектора $\vec{f} - \vec{S}_n$. Очевидно, что при любом фиксированном n максимальную близость обеспечивают

$$\beta_m = a_m = \int_a^b f(x) \phi_m(x) dx. \quad (7.8)$$

Обычно это доказывают как теорему об экстремальном свойстве коэффициентов Фурье [12]. Таким образом, в качестве $S_n(x)$ следует использовать частичную сумму фигурирующего в (7.3) ряда, что при $n \rightarrow \infty$ позволяет сделать среднеквадратическое отклонение $\delta(n)$ сколь угодно малым,

так как согласно (7.5) ряд $\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2$ сходится. Последнее утверждение из-

вестно как теорема Ляпунова [12] и допускает следующую интерпретацию: расстояние между двумя точками бесконечномерного пространства, определяемыми радиус-векторами конечной длины $\vec{f} = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ и $\vec{S}_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, \dots\}$, стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, так как при этом их координаты совпадают.

Часто информация об $f(x)$ содержится в наборе экспериментальных точек $M_k(x_k, y_k)$. Пренебрегая погрешностью самого эксперимента, будем считать, что $y_k = f(x_k)$, где

$$x_k = a + \frac{b-a}{N}(k-1), \quad k=1, 2, \dots, N. \quad (7.9)$$

Для вычисления β_m (см. (7.8)) используем формулы прямоугольников табличного интегрирования

$$\beta_m = a_m^* = \frac{b-a}{N} \sum_{k=1}^N f(x_k) \phi_m(x_k) \approx a_m. \quad (7.10)$$

Допускаемая при этом ошибка

$$\Delta_m = a_m - \beta_m \quad (7.11)$$

не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ в (7.6). Действительно, полностью покрыть криволинейную трапецию конечным числом прямоугольников ($N \neq \infty$) можно лишь в том случае, если она сама прямоугольник. То есть

из $\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta_m = 0 \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_m(x) = \frac{\text{const}}{f(x)}$, что противоречит ортогональности

базисных функций.

Подставив (7.11) в (7.7), получим

$$\delta^2(n) = \delta_1^2(n) + \delta_2^2(n), \quad (7.12)$$

где $\delta_1(n)$ связано с погрешностью табличного интегрирования (7.10), а $\delta_2(n)$ – с отбрасыванием остатка функционального ряда (7.3):

$$\delta_1^2(n) = \frac{1}{b-a} \sum_{m=1}^n \Delta_m^2; \quad \delta_2^2(n) = \frac{1}{b-a} \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m^2. \quad (7.13)$$

При увеличении n на единицу к $\delta_1^2(n)$ добавляется, а из $\delta_2^2(n)$ вычитается положительное слагаемое. Очевидно, делать это нужно до тех пор, пока

$$|\Delta_n| < |a_n|. \quad (7.14)$$

Только при таком условии среднеквадратическое отклонение $\delta(n)$ будет уменьшаться с ростом n . При больших n неравенство (7.14) нарушится, так как в силу необходимого условия сходимости ряда (7.3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = 0$.

Таким образом, для таблицы данного размера (см. (7.9) существует оптимальное n , при котором выражение (7.6) с коэффициентами (7.10) в среднем минимально отклоняется от аппроксимируемой функции.

Поскольку $f(x)$ неизвестна, в (7.14) вместо a_n используем его приближенное значение (7.10)

$$|\Delta_n| < |a_n^*|. \quad (7.14')$$

Полученное из независимых соображений условие (7.14') допускает простую интерпретацию: учет высших гармоник правомерен, если приближенные значения соответствующих фурье-амплитуд больше погрешности их вычисления.

Для оценки последней заметим, что использование в (7.8) формулы прямоугольников эквивалентно отбрасыванию на каждом промежутке $[x_k, x_{k+1}]$ в формуле Тейлора для подынтегральной функции $g_m(x) = f(x) \cdot \varphi_m(x)$ всех слагаемых, кроме нулевого. Поэтому, используя лагранжеву форму остаточного члена, с помощью (7.9) и обобщенной теоремы об интегральном среднем получим

$$\begin{aligned} \Delta_m &= \sum_{k=1}^N \int_{x_k}^{x_{k+1}} g'_m(\xi(x)) \cdot (x - x_k) dx = \\ &= \sum_{k=1}^N g'_m(\xi_k) \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{b-a}{N} \right)^2 \sum_{k=1}^N g'_m(\xi_k), \end{aligned} \quad (7.15)$$

где $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$.

Проиллюстрируем изложенное конкретным примером. Используем в качестве базисных функций систему гармоник

$$\varphi_m(x) = \frac{1}{\sqrt{2l}} e^{i \frac{\pi m x}{l}},$$

где i – мнимая единица. В этом случае (см. (7.11), (7.15))

$$S_n(x) = \sum_{m=-n}^n a_m^* \varphi_m(x); \quad a_m^* = \frac{\sqrt{2l}}{N} \sum_{k=1}^N f(x_k) e^{-i \frac{\pi m x_k}{l}}; \quad (7.16)$$

$$\Delta_m = \frac{(2l)^{3/2}}{2N^2} \sum_{k=1}^N \left[f'(\xi_k) - i \frac{\pi m}{l} f(\xi_k) \right] e^{-i \frac{\pi m \xi_k}{l}}, \quad (7.17)$$

где x_k определено формулой (7.9), в которой следует положить $a = -l$, $b = l$.

Если скорость изменения $f(x)$ невелика ($f'(x) \leq f(x)\pi/l$), для оценки модуля Δ_m можно при больших m пренебречь первым слагаемым в квадратных скобках в (7.17):

$$\Delta_m \approx -i \frac{\pi m}{l} \frac{(2l)^{3/2}}{2N^2} \sum_{k=1}^N f(\xi_k) e^{-i \frac{\pi m \xi_k}{l}}. \quad (7.17')$$

Рассматривая сумму в (7.17') как интегральную

$$\frac{2l}{N} \sum_{k=1}^N f(\xi_k) e^{-i \frac{\pi m \xi_k}{l}} \approx \int_{-l}^l f(x) e^{-i \frac{\pi m x}{l}} dx = \sqrt{2l} a_m,$$

получим из (7.17')

$$\Delta_n \approx -i \frac{\pi n}{N} a_n. \quad (7.18)$$

Подставив последнее выражение для Δ_n в (7.14), определим оптимальное n для приближения медленно меняющейся функции тригонометрическим многочленом:

$$n \approx \frac{N}{\pi} \approx 0,318 N. \quad (7.19)$$

В частности, для $f(x) = e^x$ и $l = \pi$ в (7.16) суммируются члены геометрической прогрессии со знаменателем $q = e^{\frac{2\pi}{N}(1-im)}$ (см. (7.9) и первым членом $e^{x_1(1-im)} = e^{-\pi(1-im)} = e^{-\pi}(-1)^m$, поэтому

$$a_n^* = \frac{\sqrt{2\pi}}{N} (e^{-\pi} - e^{\pi}) \frac{(-1)^n}{1 - e^{\frac{2\pi}{N}(1-in)}}, \quad (7.20)$$

что является адекватным приближением для

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e^{-\pi} - e^{\pi}) \frac{(-1)^n}{in - 1} \quad (7.21)$$

лишь при $n \ll N^9$. С ростом n ошибка накапливается. Оптимальное n (см. (7.11), (7.14) определим из условия $|a_n^* - a_n|^2 = (a_n^* - a_n)(a_{-n}^* - a_{-n}) \leq |a_n|^2$, откуда

$$|a_n^*|^2 \leq 2 \operatorname{Re}(a_n^* a_{-n}) \approx 2 \operatorname{Im} a_n^* \operatorname{Im} a_{-n}. \quad (7.22)$$

⁹ Точное значение a_n получено элементарным интегрированием (7.8) с $f(x) = e^x$, $a = -\pi$, $b = \pi$.

Последнее равенство в (7.22) записано с учетом того обстоятельства (см. (7.21), что при больших n

$$\operatorname{Re} a_n \ll \operatorname{Im} a_n \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e^{-\pi} - e^{\pi}) \frac{(-1)^n}{n}. \quad (7.23)$$

В актуальном диапазоне ($N > n \gg 1$) из (7.20) следует

$$|a_n^*|^2 \approx \frac{\pi}{N^2} \frac{(e^{-\pi} - e^{\pi})^2}{(1 - \cos(2\pi n/N))}, \quad (7.24)$$

$$\operatorname{Im} a_n^* \approx \frac{\sqrt{\pi}}{N} (e^{\pi} - e^{-\pi}) \frac{(-1)^n \sin(2\pi n/N)}{\sqrt{2}(1 - \cos(2\pi n/N))}. \quad (7.25)$$

Подставив (7.23)–(7.25) в (7.22), получим трансцендентное уравнение

$$n\pi/N = \sin(2\pi n/N) \quad (7.26)$$

с единственным положительным корнем

$$n = 0,302N. \quad (7.27)$$

Графики $\delta(n)$ (рисунок 7.1), построенные для различных N численными методами, полностью подтверждают последний результат, с которым, как нетрудно видеть, хорошо (с относительной погрешностью 5%) согласуется полученная из общих соображений (без конкретизации $f(x)$ оценка (7.19).

Отличие между (7.19) и (7.27), по-видимому, связано с отбрасыванием при получении (7.19) первого слагаемого в квадратных скобках в (7.17). Совершаемая при этом ошибка действительно невелика. С учетом того, что n и N целые, она начинает проявляться (к n добавляется лишняя единица) лишь при $N > 62$, что в свою очередь также несущественно, так как минимум $\delta(n)$ пологий (рисунок 7.1).

На рисунке 7.2 даны графики экспоненты и ее тригонометрических многочленов, полученных на основе тридцати табличных значений. Видно, что отклонение от оптимального $n = 0,3N = 9$ как в одну, так и в другую сторону ухудшает степень аппроксимации.

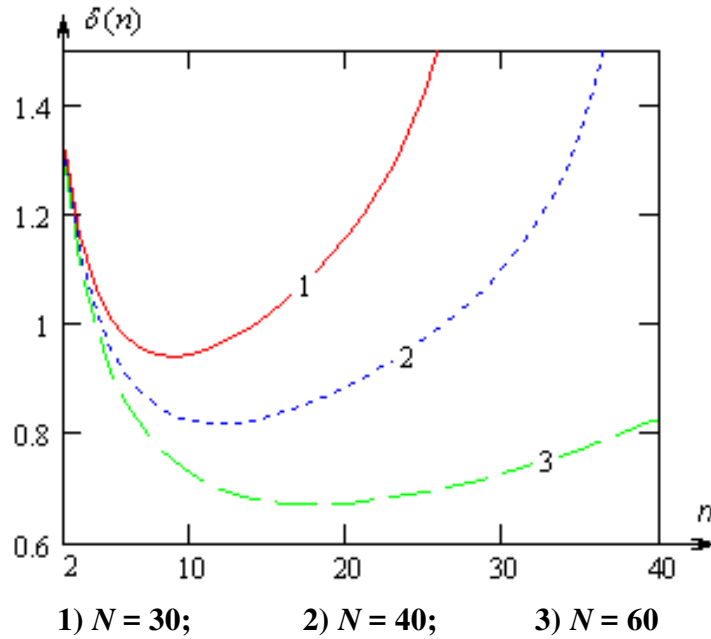


Рисунок 7.1. – Среднеквадратическое отклонение n -го многочлена Фурье от своей функции, заданной N табличными значениями

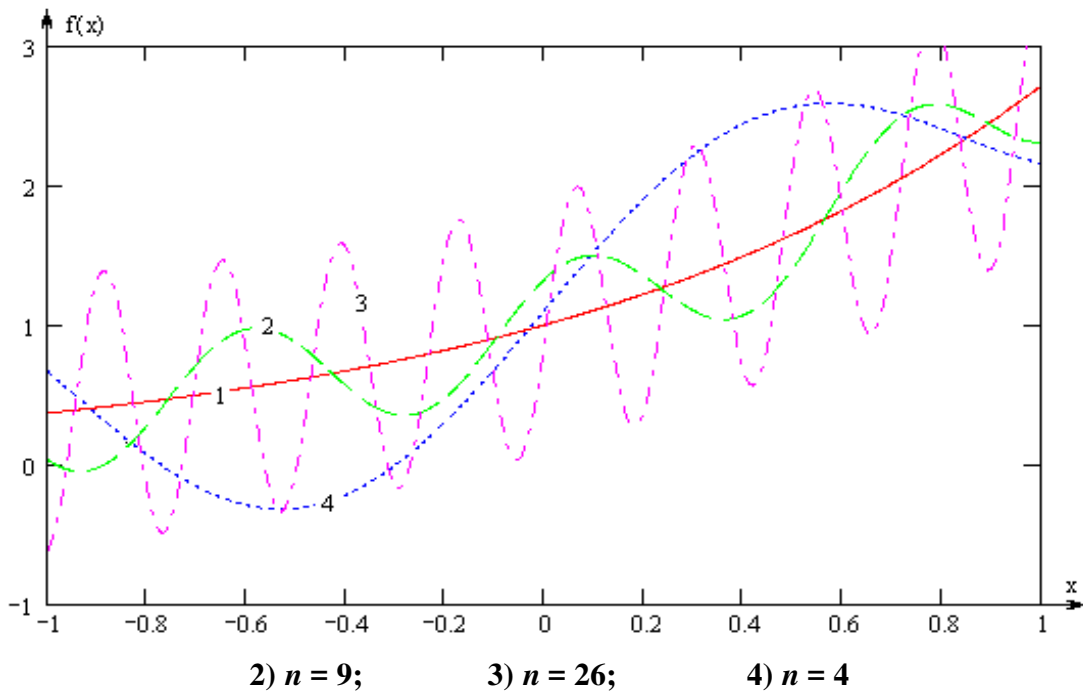


Рисунок 7.2. – Функция (кривая 1) и ее тригонометрические многочлены n -го порядка, найденные на основе 30 табличных значений

Воспользуемся тем, что в данном случае, когда $f(x)$ известна, можно найти вклад в погрешность, связанный с нецелесообразностью учета высших гармоник для $N \neq \infty$. Подставив в $S_n(x)$ в (7.16) вместо a_n^* точные значения a_n , определяемые формулой (7.21), обратим в ноль первое слагаемое в (7.12). При этом интегрирование в (7.7) с $a = -\pi$, $b = \pi$ и $f(x) = e^x$ дает $2\pi\delta_2^2(n)$.

Полагая здесь $n = 0,3N$, получим для различных N вклад δ_2 в минимальное δ (рисунок 7.3, кривая 2). Там же для сравнения приведено минимальное среднеквадратическое отклонение $\delta(0,3N)$ (рисунок 7.3, кривая 1). Видно, что при оптимальном $n = 0,3N$ величины δ_2 и $\delta_1 = \sqrt{\delta^2 - \delta_2^2}$ одного порядка малости.

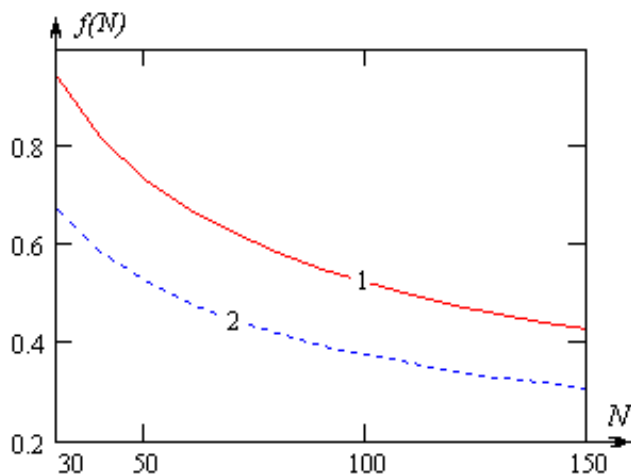


Рисунок 7.3. – Минимальное среднеквадратическое отклонение многочлена Фурье от экспоненты, заданной N табличными значениями (кривая 1), и вклад в него, обусловленный невозможностью учета высших гармоник (кривая 2)

Заметим, что порядок оптимального n не изменится, если вместо формул прямоугольников при вычислении a_n^* использовать более точные формулы трапеций или парабол, так как в этом случае вместо (7.18) получим

$$\left| \frac{\Delta_n}{a_n^*} \right| \sim \left(\frac{n\pi}{N} \right)^p, \quad p = 2, 3.$$

Тем не менее при использовании более точных формул табличного интегрирования за счет слагаемых с малыми m первая сумма в (7.13) заметно уменьшится.

Вклад второй суммы в среднеинтегральное значение квадрата отклонения (7.12) принципиально не оценивается без гипотез относительно вида $f(x)$. Например, зависимость a_m от своего номера можно экстраполировать, опираясь на найденные с высокой точностью несколько первых коэффициентов Фурье. Подчеркнем, однако, исключительно вероятностный характер подобных оценок. Единственное, что можно утверждать достоверно, – при увеличении количества экспериментальных точек в соответствии с изложенным выше n в (7.12) растет. То есть вклад второй суммы (7.13) в $\delta(n)$ стремится к нулю как остаток сходящегося ряда.

8. ДИСКРЕТНОСТЬ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДИРАКА И ХЭВИСАЙДА [13]

Целесообразность появления новых понятий диктуется логикой развития самой науки, в связи с чем их введение «по определению» не выдерживает никакой критики. Остается неясным, как узнали, что нужно ввести именно это понятие и почему его определили так, а не иначе.

Ниже обоснована неконструктивность определения понятия периодичности. Показано, что в тех случаях, когда моделируемый процесс описывается в неэлементарных функциях, удобным критерием его периодичности может служить дискретность спектра интегрального преобразования Фурье. Попутно, в результате исследования спектральной плотности периодических процессов, естественным образом возникает представление для δ -функции Дирака и само ее понятие, вводимое обычно по определению. Отмечена принципиальная конечность ширины спектральных линий атомов и невозможность осуществления на практике строго периодических процессов.

Феномен периодичности (повторяемости) весьма распространен в окружающей нас действительности, начиная от микромира с волнами вероятности и до Вселенной в целом, которая согласно некоторым космологическим моделям является колеблющейся. В быту мы настолько привыкли к периодичности, что испытываем дискомфорт при смене часовых поясов, не задумываясь о причине сезонных колебаний температуры¹⁰ и т.п.

При моделировании периодических процессов возникают функции, при любом значении аргумента удовлетворяющие соотношению

$$f(x) = f(x + T), \quad (8.1)$$

в котором T – некоторое конечное число, называемое периодом. Определение (8.1) не является конструктивным. Если $f(x)$ задана степенным рядом, а T неизвестно (чаще всего так и бывает), убедиться в справедливости (8.1) весьма непросто. Если же $f(x)$ получена непосредственно из эксперимента, то при наличии повторяемости неясно, является ли x на самом деле любым (мы же не можем просканировать всю числовую ось), а при отсутствии повторений – не связано ли это с тем, что T очень велико.

¹⁰ Значительная часть опрошенных затрудняется ответить на этот вопрос. При этом распространено заблуждение о том, что летом теплее, так как Земля ближе к Солнцу, чем зимой.

Между тем наличие периода (даже если он очень велик) является новым качеством и принципиально меняет свойства функции. Например, согласно теореме Дирихле [14] периодическая функция совпадает со своим рядом Фурье во всех точках непрерывности

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{iz_n x}, \quad (8.2)$$

где

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-iz_n x} dx - \quad (8.3)$$

амплитуда Фурье, отвечающая частоте

$$z_n = 2\pi n/T. \quad (8.4)$$

Формулы (8.3), (8.4) определяют спектральный состав функции $f(x)$. В данном случае спектр является дискретным, т.к. разность

$$z_{n+1} - z_n = 2\pi/T \quad (8.5)$$

конечна¹¹.

Если же период у $f(x)$ отсутствует, равенство в (8.2) имеет место лишь на промежутке $(-T/2, T/2)$. Чтобы добиться совпадения непериодической функции со своим рядом (8.2) на всей числовой оси, T в (8.3), (8.4) устремляют к бесконечности. В результате такого предельного перехода спектр частот согласно (8.5) становится непрерывным, а ряд Фурье трансформируется в интеграл

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(z) e^{izx} dz, \quad (8.6)$$

где

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-izx} dx - \quad (8.7)$$

плотность амплитуды Фурье или спектральная плотность.

¹¹ Спектры излучения атомов состоят из отдельных линий как раз потому, что на стационарных электронных «орбитах» укладывается целое число длин их волн де Бройля, т.е. плотность электронного заряда является периодической функцией полярного и азимутального углов.

Несмотря на предельный переход, интеграл Фурье является более общим понятием, чем ряд. Действительно, промежуток интегрирования в (8.6) покрывает все точки z_n . Поэтому к периодическим функциям интегральное преобразование Фурье тоже применимо. При этом, однако, в соответствии с (8.2) плотность $F(z)$ равна нулю везде, кроме изолированных точек $z = z_n$. Причем в них спектральная плотность должна обращаться в бесконечность, чтобы дать при интегрировании в (8.6) конечный вклад в соответствующую Фурье-амплитуду F_n . Убедимся в этом непосредственно¹².

Пусть для простоты ряд (8.2) состоит из одного слагаемого

$$f(x) = F_n e^{iz_n x}. \quad (8.8)$$

Подставим его в (8.7):

$$F(z) = \frac{F_n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(z_n - z)x} dx = \frac{F_n}{\sqrt{2\pi}} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N e^{i(z_n - z)x} dx = F_n \sqrt{2/\pi} \cdot \varphi(z), \quad (8.9)$$

где $\varphi(z)$ получается с помощью формулы Эйлера элементарным интегрированием в (8.9):

$$\varphi(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sin(N(z_n - z))}{z_n - z}. \quad (8.10)$$

Чтобы связать $\varphi(z)$ с δ -функцией Дирака, вычислим

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \varphi(z) dz = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{N(z - z_n)} \frac{\sin t}{t} dt, \quad (8.11)$$

т.е. при $z < z_n$ имеем

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{-\infty} \frac{\sin t}{t} dt = 0, \quad (8.12)$$

при $z = z_n$ функция $\Phi(z)$ принимает значение интеграла Дирихле [15]

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^0 \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}. \quad (8.13)$$

¹² Указанными свойствами обладает δ -функция Дирака, вводимая обычно по определению [16]. В нашем подходе само понятие δ -функции и представление для нее возникают естественным образом.

И, наконец, при $z > z_n$

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi, \quad (8.14)$$

т.к. подынтегральная функция четная.

Таким образом,

$$\Phi(z) = \pi \cdot \theta(z - z_n), \quad (8.15)$$

где $\theta(z)$ – ступенчатая функция Хэвисайда

$$\theta(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \frac{1}{2}, & z = 0 \\ 1, & z > 0 \end{cases}$$

Т.е., оставаясь постоянной при всех $z \neq z_n$, функция $\Phi(z)$ при переходе через точку z_n терпит скачек. Следовательно, согласно (8.11), (8.15)

$$\varphi(z) = \Phi'(z) = \pi \cdot \delta(z - z_n), \quad (8.16)$$

где $\delta(z)$ – δ -функция Дирака $\delta(z) = \begin{cases} 0, & z \neq 0 \\ \infty, & z = 0 \end{cases}$, причем согласно (8.11)–(8.16)

$$\int_a^b \delta(z) dz = \begin{cases} 0, & 0 \notin (a, b) \\ \frac{1}{2}, & 0 = a \text{ (} 0 = b \text{)} \\ 1, & 0 \in (a, b) \end{cases}$$

Будучи обобщенной, δ -функция Дирака может по-разному аппроксимироваться непрерывными функциями [15]. В частности, в нашем случае (см. (8.10), (8.16))

$$\delta(z) = \frac{1}{\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sin(Nz)}{z}. \quad (8.17)$$

Еще раз подчеркнем, что представление (8.17) возникло естественным путем (и привело к понятию δ -функции), не по определению, а в результате последовательного рассмотрения спектральной плотности периодической функции.

Таким образом (см. (8.9), (8.16), $F(z) = F_n \sqrt{2\pi} \cdot \delta(z - z_n)$), что после подстановки в (8.6) дает (8.8), как это и должно быть.

В общем случае периодических функций спектральная плотность представляет собой суперпозицию δ -функций

$$F(z) = \sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \cdot \delta(z - z_n),$$

что может являться критерием периодичности при наличии очень больших периодов.

В действительности, однако, строго периодические зависимости никогда не встречаются, ибо ничто не длится бесконечно. Начало отсчета – величина условная, поэтому, не нарушая общности, будем считать

$$f(x) = \begin{cases} F_n e^{iz_n x}, & x \in [-N, N] \\ 0, & x \notin [-N, N] \end{cases} \quad (8.18)$$

Заметим, что коэффициент F_n в (8.18) не является амплитудой Фурье, т.к. $f(x)$ уже непериодическая функция.

Подставив (8.18) в (8.7), получим (см. (8.9), (8.10))

$$F(z) = F_n \sqrt{2/\pi} \frac{\sin(N(z_n - z))}{z_n - z}. \quad (8.19)$$

Зависимость (8.19) для различных N представлена на рисунке 8.1 и позволяет непосредственно проследить трансформацию непрерывного спектра в дискретный по мере того, как непериодическая функция (8.17) с ростом N превращается в периодическую функцию (8.8). Чем дольше осциллирует экспонента, тем более монохроматическим становится сигнал. Однако на практике предельный переход $N \rightarrow \infty$ не может быть реализован. По этой причине ни одна радиостанция не работает строго на заявленной частоте. Если бы это было не так, сигнал от нее был бы слышен еще до начала его излучения. Даже линии в спектрах излучения атомов имеют конечную ширину. Это значит, что феномен периодичности является математической идеализацией, и в природе действительно дискретные спектры встречаться не могут.

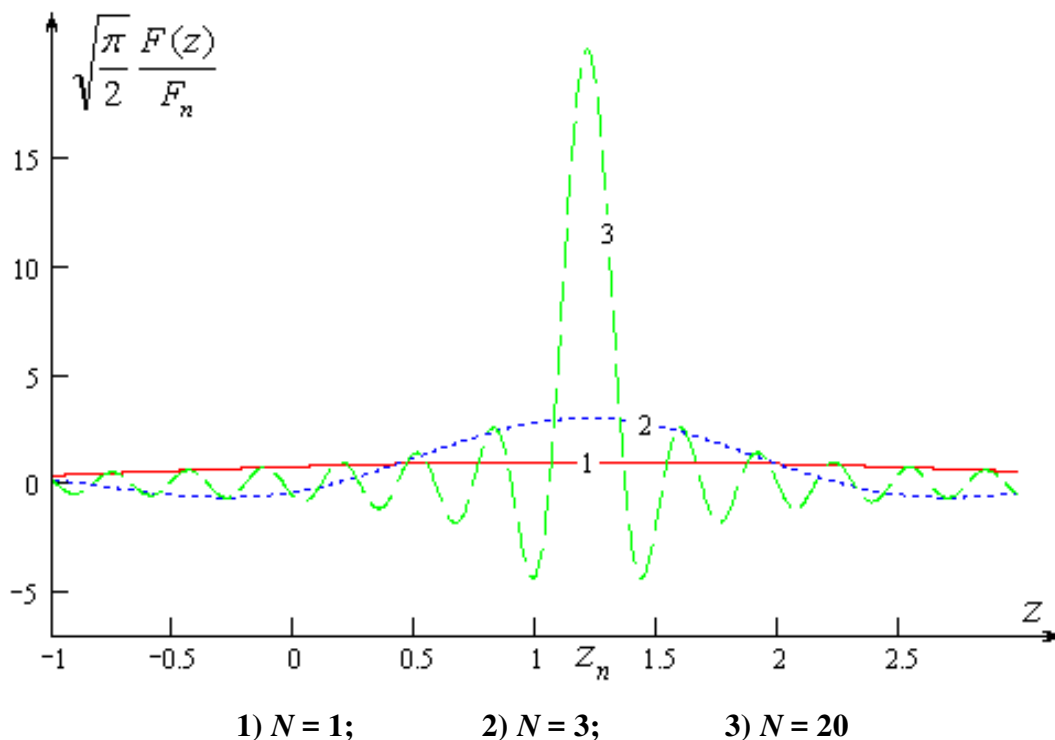


Рисунок 8.1. – Трансформация непрерывного спектра в дискретный при превращении неперидической зависимости в периодическую

9. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ПАРАДОКСЫ В ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ [17]

Математическое моделирование широко используется в проектировании и производстве радиоэлектронных средств и занимает важное место в подготовке соответствующих специалистов.

Теория электрических колебаний является основой такого моделирования и в свою очередь опирается на математический аппарат обыкновенных дифференциальных уравнений. Данная отрасль знания тщательно разработана и освещена в литературе [18]. Однако имеющийся формализм не всегда подкреплён проникновением в суть моделируемых явлений, анализом адекватности полученных результатов, их физической интерпретацией, пониманием условий и границ их применимости, а также возможностью естественнонаучных и философских обобщений.

Рассмотрим, в частности, энергетические аспекты теории малых колебаний. При наличии трения последние описывают уравнением

$$x'' + \omega^2 x = -2r x', \quad (9.1)$$

в котором производные берутся по времени t , x – обобщенная координата, ω – собственная частота, r – количественная характеристика трения.

Если оно мало ($r < \omega$), имеют место затухающие колебания с уменьшенной частотой

$$x = \Delta e^{-rt} \cos(\sqrt{\omega^2 - r^2} t + \varphi), \quad (9.2)$$

где Δ и φ – начальные амплитуда и фаза соответственно.

Покажем, что энергия E колебаний (9.2) расходуется на выполнение работы A по преодолению трения. Используя электромеханическую аналогию, будем для наглядности рассматривать математический маятник массы m :

$$\begin{aligned} dE &= (m/2) d(\omega^2 x^2 + \dot{x}^2) = m(\omega^2 x \dot{x} + \dot{x} \ddot{x}) dt = \\ &= m(\omega^2 x + \ddot{x}) dx = -2mr \dot{x} dx = -\gamma \dot{x} dx = dA, \end{aligned} \quad (9.3)$$

где γ – коэффициент трения.

Четвертое равенство в (9.3) получено с помощью (9.1), т.е. $dE = dA$ и для апериодических движений ($r \geq \omega$).

Если пренебречь трением ($r = 0$), имеют место лишь взаимные превращения кинетической энергии в потенциальную и наоборот. При этом амплитуда колебаний постоянна, и они согласно (9.2) совершаются по закону синуса или косинуса. Такие колебания называют гармоническими.

Как известно, парадокс – верное утверждение, звучащее неправдоподобно. Покажем, что энергия гармонических колебаний, вообще говоря (правильнее сказать, никогда), не сохраняется.

Чтобы сохранить амплитуду в присутствии вездесущего трения, требуется подпитка энергией извне. Для ее моделирования рассмотрим уравнение движения маятника, раскачиваемого внешней силой амплитуды f с частотой Ω

$$x'' + \omega^2 x + 2r x' = f \cos \Omega t. \quad (9.4)$$

С точки зрения математики (9.4) – линейное неоднородное дифференциальное уравнение со специальной правой частью. Его общее решение представляет суперпозицию общего решения однородного уравнения и любого частного решения неоднородного уравнения. Первое описывает свободное движение, которое независимо от его характера (периодического или нет), определяемого величиной r , со временем угаснет. Второе описывает так называемые вынужденные колебания

$$x = N \cos(\Omega t + \psi), \quad (9.5)$$

где

$$N = \frac{f}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2) + (2r\Omega)^2}} \quad \text{и} \quad \psi = \arctg \frac{2r\Omega}{\Omega^2 - \omega^2} - \quad (9.6)$$

установившаяся амплитуда и сдвиг по фазе соответственно.

Гармоничность вынуждающей силы означает ее вечное существование, что делает беспредметными разговоры о начальных условиях и раскочивании колебаний. Корректная постановка задачи предполагает адиабатическое включение (и выключение) внешней силы, что на языке фурье-компонент означает возбуждение целого спектра вынужденных колебаний с непрерывным распределением амплитуды по частоте, к тому же (см. (9.6)) рассогласованных по фазе и взаимодействующих друг с другом благодаря ангармонизмам. Тем не менее, если вынужденные колебания малы, в промежутке между включением и выключением внешней силы можно пользоваться идеализацией (9.4) тем точнее, чем дольше этот промежуток.

Согласно (9.6) амплитуда вынужденных колебаний (9.5), совершаемых по закону косинуса, не зависит от времени, т.е. их энергия сохраняется, а вся работа внешней силы A_{BH} расходуется на преодоление сил трения. Этот совершенно очевидный вывод тем не менее столь же совершенно ошибочен. Убедиться в этом можно непосредственно

$$-dA = \gamma x' dx = -\gamma N \Omega \sin(\Omega t + \psi) dx \neq f m \cos \Omega t dx = dA_{BH}, \quad (9.7)$$

так как колебания и внешняя сила не согласованы по фазе. Смысл неравенства (9.7) в том, что гармонические колебания (9.5) происходят с несобственной частотой. Поэтому кинетическая энергия меняется не только за счет потенциальной, но и под действием внешней силы. Эта сила четверть периода дополнительно увеличивает скорость x' , а затем четверть периода ровно на столько же уменьшает ее, так что амплитуда гармонических колебаний не меняется

$$\begin{aligned} dE &= \frac{m}{2} d(x'^2 + \omega^2 x^2) = \frac{m}{2} N^2 d(\Omega^2 \sin^2(\Omega t + \psi) + \omega^2 \cos^2(\Omega t + \psi)) = \\ &= \frac{m}{2} N^2 \Omega (\Omega^2 - \omega^2) \sin 2(\Omega t + \psi) dt. \end{aligned} \quad (9.8)$$

Согласно (9.8) энергия гармонических колебаний сохраняется лишь интегрально, за время, равное половине их периода. В дифференциальной форме (перманентно) сохранение имеет место только в случае резонанса ($\omega = \Omega$), которого в точности практически никогда не бывает по причинам, упомянутым выше, связанным с невозможностью обеспечить монохромность вынуждающей силы. Т.е., строго говоря, энергия гармонических колебаний не сохраняется никогда.

С учетом изложенного работа внешней силы лишь в среднем расходуется на преодоление сил трения. При этом сам маятник играет роль аккумулятора, то запасая излишки энергии от внешнего источника, то возвращая их обратно. Поэтому для получения энергетического баланса в дифференциальной форме в соответствующем уравнении, в отличие от (9.7), необходимо учесть энергию колебаний:

$$\begin{aligned} d(E - A) &= \frac{m}{2} d(x'^2 + \omega^2 x^2) + \gamma x' dx = \\ &= m(x'' + \omega^2 x + 2rx') dx = m f \cos \Omega t dx = dA_{BH}. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Предпоследнее равенство в (9.9) записано с учетом (9.4).

Очевидно, причина не сохранения энергии – наличие внешнего источника энергии, который, в свете изложенного, сам подвержен обратному влиянию колеблющейся системы. Чтобы восстановить статус-кво, вынужденные колебания следует рассматривать как предельный случай связанных, что будет корректнее и с методической точки зрения. Заметим в этой связи, что источник внешней силы как колебательное устройство должен обладать значительно большей инерционностью, чем изучаемое колебание. Это позволит, несмотря на нестационарное обратное влияние, сохранить гармоничность вынуждающей силы. В данном случае имеет место полная аналогия используемой идеализации с пробным зарядом во внешнем поле. Этот момент очень важен для понимания следующего парадокса.

Зависимость (9.6) амплитуды вынужденных колебаний от их частоты симметрична относительно точки максимума ($\Omega = \omega$). Ангармонизмы нарушают симметрию, т.к. рост амплитуды при сканировании частоты вблизи резонанса заметно меняет саму частоту свободных ангармонических колебаний ω . Если r мало, такая «деформация» (9.6) приводит к неустойчивости, при которой согласно [19] бесконечно малое изменение частоты вынуждающей силы Ω вызывает скачок амплитуды N , а значит (см. (9.8)), и энергии вынужденных колебаний. Но такой скачок требует бесконечной мощности

источника вынуждающей силы. Чтобы снять противоречие заметим, что сканирование Ω означает ее зависимость от времени. В этом случае (9.5) уже не является решением (9.4). Чтобы сохранить записанные ранее формулы, сканирование частоты следует считать сколь угодно (бесконечно) медленным. Соответственно, скачок амплитуды растянется во времени.

В действительности, тем не менее, все происходит за конечные времена. Поэтому для наблюдения описанного эффекта требуется, как уже упоминалось, значительная инерционность источника вынуждающей силы. В противном случае обратное влияние в момент скачка амплитуды само замедлит сканирование частоты, подобно тому, как перегруз линии «садит» частоту генератора. В такой ситуации идеализация, использующая понятие внешней (детерминированной) силы, перестает быть адекватной.

10. ПРИРОДА СЛУЧАЙНОГО И ЭРГОДИЧНОСТЬ [20]

Иллюстрируя статистические закономерности, обычно вспоминают молекулярно-кинетическую теорию идеального газа. Стандартным аргументом в пользу статистических методов при ее создании является очень большое число молекул в рассматриваемом объеме газа. Однако само по себе большое число частиц принципиально не препятствует механическому описанию образованной ими системы. И даже столкновения классических частиц полностью детерминированы законом их взаимодействия и начальными условиями. Беда заключена в квантовой природе сталкивающихся молекул. Из-за нее классический результат рассеяния существенно случаен. Данная скорость молекулы может реализоваться, а может и нет. Уточнить ничего принципиально нельзя. В этом заключается объективная реальность, такая же, как дифракция электронов. Конечно, у системы из двух молекул квантовые свойства проявляются менее ярко, чем при рассеянии электронов. Однако с каждым новым столкновением молекул неопределенность накапливается и происходит нивелировка начальных условий. По этой причине в уравнении Клайперона – Менделеева нет исходных положений и скоростей отдельных молекул.

Итак, свойства газа не могут быть выведены из законов классической механики из-за ее детерминизма. Трудность не в том, что классические частицы могут собраться в одном месте (статистическое описание этого тоже не запрещает), а том, что заранее известно, когда это произойдет. Вместе с тем, они (свойства) легко объясняются с помощью теории вероятностей. Газ занимает весь предоставленный ему объем, т.к. геометрическая вероятность молекуле в данный момент принадлежать части объема меньше единицы.

А вероятность оставаться в этой части всегда (при любом числе испытаний) в соответствии с теоремой умножения вероятности равна нулю. Подчеркнем, что число молекул газа здесь совершенно ни при чем. Столкновения со стенками сосуда тоже носят существенно-случайный характер. Даже одна молекула занимает весь предоставленный ей объем, в том смысле, что плотность пребывания ее в конкретном месте равномерно распределена по всему объему. Главное заключается в том, что столкновения принципиально (в силу их квантовой природы) не позволяют долгосрочно прогнозировать место пребывания молекулы исходя из начальных условий. И, следовательно, нет никаких оснований, какое-либо место предпочесть всем остальным.

Иными словами, стробоскопическая «фотография» одной молекулы (как отражение плотности вероятности) ничем не отличается от одномоментной фотографии многих, что дает основание среднее по времени заменять средним по ансамблю – совокупности систем (в данном случае молекул) с одинаковым распределением изучаемого признака.

В классической статистической физике для обоснования такого феномена использовали эргодическую гипотезу, в соответствии с которой за достаточно большой промежуток времени фазовая траектория изолированной системы пройдет через любую точку гиперповерхности постоянной энергии. Т.е. имеется в виду, что фазовая траектория ровным слоем покрывает гиперповерхность, доступную изолированной системе, что дает основание с равными весами усреднять по ансамблю. При этом, однако, фазовая траектория не должна пересекать самое себя. Последнее означало бы, что из одного и того же состояния (задаваемого точкой в фазовом пространстве) система один раз эволюционирует в одном направлении, а второй – почему-то в другом.

Представить, как фазовая траектория без самопересечений покрывает сложную поверхность, довольно трудно, и, как позже выяснилось, это запрещено соответствующими теоремами топологии. Корни возникшего противоречия в использовании классического понятия – траектории, основанного на возможности достоверно отслеживать любые, сколь угодно малые перемещения в пространстве. Однако в действительности состояние системы задается набором чисел с дискретным рядом возможных значений, нумерующих квантовые состояния. Попытки использовать для этих целей неадекватные понятия (импульс и координату) приводят к потере информации и, как следствие, необходимости статистического описания. Его прогнозы сбываются тем чаще, чем шире доверительный интервал. Т.е., если не рассматривать очень малые промежутки фазового пространства, классическое описание становится практически достоверным. Однако в его рамках нельзя исследовать проблему самопересечений фазовой траектории. В этом

смысле эргодическая гипотеза – наглядный пример попытки классическими средствами решить существенно-квантовую проблему.

Для иллюстрации изложенного удобна аналогия с движением стакана насыщенного раствора соли. Благодаря флуктуациям из раствора то здесь, то там выпадает, а затем снова растворяется кристаллик соли. Пока погрешность измерения его координаты больше размеров самого стакана, можно говорить о траектории кристаллика, движущегося вместе со стаканом. Но попытки локализовать кристаллик в меньшем объеме обнаруживают отсутствие механического движения как такового. Кристаллик уничтожается в одном месте и рождается в другом (заранее не известно в каком), отстоящем на конечном расстоянии от первого. Адекватной характеристикой такой системы (отражающей ее суть) является, в частности, избыточная концентрация соли. Зная ее, можно (если все-таки интересоваться положением кристаллика) рассчитать плотность вероятности его выпадения в данном месте в единицу времени.

Резюмируя изложенное, можно сказать, что природа случайного заключена в неумении (по незнанию) или в нежелании (по соображениям простоты) использовать адекватный язык, во всей полноте отражающий суть исследуемого объекта.

11. СЛУЧАЙНАЯ ВСТРЕЧА N УЧАСТНИКОВ [21]

Задача о случайной встрече возникает при моделировании многих физических, химических и социальных процессов [22]. В частности, таким образом можно объяснить зависимость скорости химической реакции от ее порядка и механизм действия катализатора.

Для двух встречающихся решение упомянутой задачи приведено практически во всех учебниках [23]. Но уже трехмерный случай сопряжен с громоздкими пространственными построениями и по этой причине, как правило, не рассматривается. Нами предлагается предельно прозрачное и лаконичное рассмотрение трехмерного случая и обобщение ответа для произвольного числа n участников случайной встречи.

При $n = 2$ для временного промежутка T и времени ожидания каждого участника не более τ множество элементарных событий представляет собой квадрат, состоящий из точек (x, y) ($0 \leq x \leq T$, $0 \leq y \leq T$), где x и y – время прихода первого и второго участника. Встреча двух участников состоится, если благоприятствующие этому событию точки будут удовлетворять неравенству

$$|x - y| < \tau \quad \text{или} \quad \begin{cases} y \geq x - \tau \\ y \leq x + \tau \end{cases}.$$

Другими словами, точки квадрата, благоприятствующие встрече, заключены между прямыми $y = x - \tau$ и $y = x + \tau$ (рисунок 11.1).

Тогда в соответствии с геометрическим определением вероятности вероятность P_2 встречи двух участников равна отношению площади s заштрихованной фигуры к площади S квадрата со стороной T (рисунок 11.1):

$$P_2 = \frac{s}{S} = \frac{T^2 - (T - \tau)^2}{T^2} = \frac{\tau(2T - \tau)}{T^2}. \quad (11.1)$$

При $\tau = T$ получим $P_2 = 1$, что показывает справедливость данной формулы.

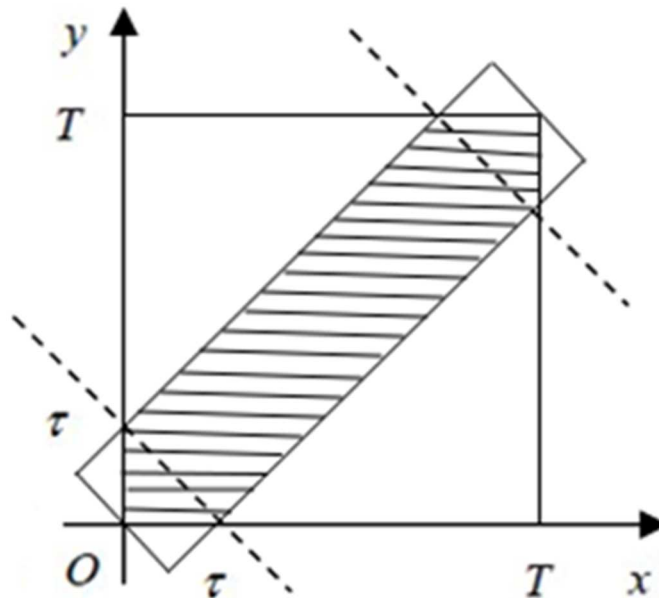


Рисунок 11.1. – Геометрическая интерпретация задачи о встрече двух участников

Обобщим полученный результат на случай трех участников. Для развития аналогии получим иначе выражение для площади s заштрихованной фигуры в двухмерном случае. Для этого умножим ширину заштрихованной полоски $d = \tau\sqrt{2}$ на длину диагонали большого квадрата $L = T\sqrt{2}$ и вычтем площадь короткой полосы (получающейся соединением пунктирных линий) без принадлежащей ей площади малого квадрата τ^2 (рисунок 11.2).

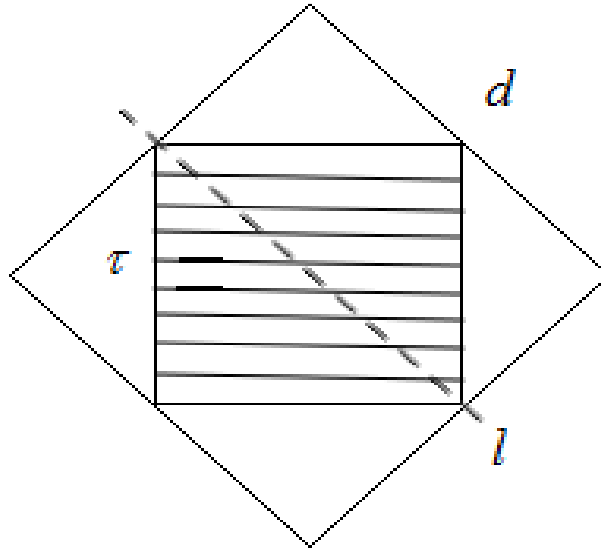


Рисунок 11.2. – Короткая полоса с принадлежащим ей малым квадратом, получающаяся слиянием пунктиров рисунка 11.1

Поскольку длина короткой полосы равна диагонали малого квадрата $l = \tau\sqrt{2}$, а ширина такая же, как и у длинной, то площадь s заштрихованной фигуры на рисунке 11.1 также можно вычислить по формуле

$$s = Ld - (ld - \tau^2) = \tau\sqrt{2} \cdot T\sqrt{2} - (\tau\sqrt{2} \cdot \tau\sqrt{2} - \tau^2) = \tau(2T - \tau). \quad (11.2)$$

При $n = 3$, т.е. для нахождения вероятности встречи трех участников, необходимо перейти в трехмерное пространство, где множество всех элементарных исходов будет представлять собой куб с ребром, равным T .
Условие встречи

$$\begin{cases} |x - y| \leq \tau \\ |x - z| \leq \tau \\ |y - z| \leq \tau, \end{cases} \quad (11.3)$$

где z – момент прихода третьего участника, выделит вокруг пространственной диагонали куба область благоприятствующих встрече исходов объема v (рисунок 11.3), ограниченную тремя парами параллельных плоскостей, расстояние между которыми равно $d = \tau\sqrt{2}$ – ширине заштрихованной полосы на рисунке 11.1.

Углы между проекциями ребер, выходящих из концов главной диагонали на перпендикулярную ей плоскость, равны 60° . В силу симметрии задачи поперечное сечение области благоприятствующих встрече исходов – правильный шестиугольник площадью σ (рисунок 11.4).

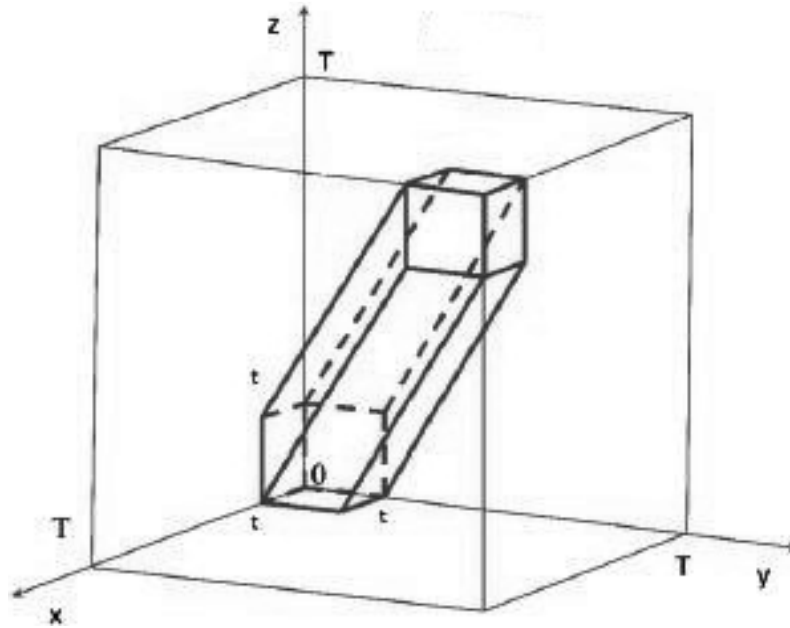


Рисунок 11.3. – Геометрическая интерпретация задачи о встрече трех участников

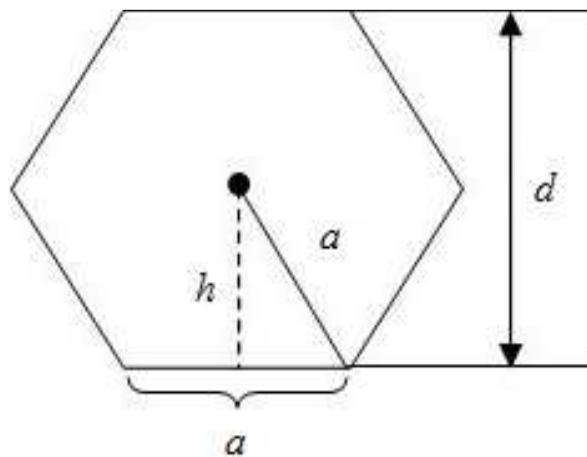


Рисунок 11.4. – Правильный шестиугольник с площадью σ

Геометрическая, вероятность встречи трех участников равна отношению объемов «области встречи» и большого куба $P_3 = v/V$.

По аналогии с формулой (11.2) для вычисления площади s заштрихованной фигуры в двухмерном случае определяется объем области пространства элементарных исходов опыта, благоприятствующей встрече трех его участников

$$v = \sigma L - (\sigma l - \tau^3), \quad (11.4)$$

где $L = T\sqrt{3}$ и $l = \tau\sqrt{3}$ – длины пространственных диагоналей большого и малого куба соответственно.

Шестиугольник на рисунке 11.4 состоит из шести правильных треугольников со сторонами длиной a и высотой $h = d/2 = \tau/\sqrt{2}$, где d – расстояние между противоположными сторонами шестиугольника, равное ширине заштрихованной области на рисунке 11.1¹³. По теореме Пифагора $a^2 - (a/2)^2 = h^2 = \tau^2/2$, т.е. длина стороны изображенного на рисунке 11.4 шестиугольника $a = \tau\sqrt{2/3}$, а площадь правильного шестиугольника, образованного шестью треугольниками с вершинами в его центре, равна

$$\sigma = 6S_{\Delta} = \frac{6ha}{2} = \tau^2\sqrt{3}. \quad (11.5)$$

Из (11.4), (11.5) следует величина объема «области встречи» $v = \tau^2\sqrt{3} \cdot T\sqrt{3} - (\tau^2\sqrt{3} \cdot \tau\sqrt{3} - \tau^3) = \tau^2(3T - 2\tau)$ и геометрическая вероятность встречи трех участников

$$P_3 = \frac{\tau^2(3T - 2\tau)}{T^3}. \quad (11.6)$$

Формулы (11.1), (11.6) позволяют заметить общую закономерность и обобщить полученные результаты на случай n участников встречи

$$P_n = \frac{\tau^{n-1}(nT - (n-1)\tau)}{T^n}. \quad (11.7)$$

В заключение еще раз подчеркнем, что формула (11.6) получена без сложных геометрических построений и громоздких вычислений.

12. ТРИ ДВЕРИ

Согласно статистике большинство людей не склонно без понимания причин менять свой первоначальный выбор. На этой особенности человеческой психики основана популярность телевизионной игры «три двери».

За одной из трех закрытых дверей спрятан приз. В рамках игры участник наугад выбирает одну дверь из трех и сообщает о своем выборе ведущему. Ведущий, зная, где находится приз, открывает одну из двух невыбранных дверей, причем ту, за которой приза нет. Такая возможность у ведущего всегда есть. Ибо если первоначальный выбор участника игры верен, обе оставшиеся двери пусты, в противном случае – одна.

¹³ Очевидно, последняя – проекция трехмерной «области встречи на плоскость OXY .

После этого игроку предоставляется возможность, если он сам этого захочет, изменить свой первоначальный выбор. Согласно логике игрока приз с равной вероятностью может находиться за одной из двух дверей, остающихся закрытыми. Поэтому нет смысла менять первоначальный выбор. Покажем, что это не так, и выясним, во сколько раз стоимость приза P в игре может превышать цену C билета участника для сохранения безубыточности организатора игры «Три двери».

Решение. Обозначим A случайное событие, заключающееся в получении приза. Пусть событие B состоит в том, что игрок упрям (не будет менять первоначальный выбор). И, наконец, C – первоначальный выбор верен (очевидно, вероятность $P(C) = 1/3$, ибо приз за одной из трех закрытых дверей). Покажем, что гипотезами в формуле полной вероятности могут быть произведения $H_1 = B \cap C$, $H_2 = B \cap \bar{C}$, $H_3 = \bar{B} \cap C$, $H_4 = \bar{B} \cap \bar{C}$, в которых чертой обозначены противоположные события. Последние не пересекаются, поэтому произведения различных гипотез ($i \neq k$) являются событиями невозможными ($H_i \cap H_k = \bar{\Omega}$).

События B и C независимы, т.е. по теореме умножения вероятности

$$P(H_1) = \frac{1}{3}P(B), \quad P(H_2) = \frac{2}{3}P(B), \quad P(H_3) = \frac{1}{3}P(\bar{B}), \quad P(H_4) = \frac{2}{3}P(\bar{B}).$$

Как и должно быть, сумма гипотез – событие достоверное:

$$\sum_{i=1}^4 P(H_i) = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)P(B) + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)P(\bar{B}) = P(B) + P(\bar{B}) = 1.$$

Очевидно, что $P_{H_1}(A) = 1 = P_{H_4}(A)$, ибо упрямый, первоначально угадавший, и неупрямый, первоначально не угадавший, выигрывают обязательно. Аналогично $P_{H_2}(A) = 0 = P_{H_3}(A)$.

По формуле полной вероятности

$$P(A) = \frac{1}{3}P(B) \cdot 1 + \frac{2}{3}P(B) \cdot 0 + \frac{1}{3}P(\bar{B}) \cdot 0 + \frac{2}{3}P(\bar{B}) \cdot 1 \quad (12.1)$$

С другой стороны

$$P(A) = P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A), \quad (12.2)$$

так как B и \bar{B} (как и любые противоположные события) тоже могут рассматриваться в качестве гипотез.

Согласно (12.1), (12.2)

$$P_B(A) = \frac{1}{3}, \quad P_{\bar{B}}(A) = \frac{2}{3},$$

т.е. упрямые выигрывают в два раза реже. Поэтому для повышения шансов первоначальный выбор целесообразно менять.

Условие безубыточности

$$П \cdot P(A) = Ц. \quad (12.3)$$

Согласно (12.1)

$$P(A) = \frac{1}{3}P(B) + \frac{2}{3}(1 - P(B)) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}P(B),$$

т.е. чем больше упрямых (меньше $P(A)$), тем больший приз могут назначить организаторы. Одни упрямые ($P(B)=1$) будут выигрывать с вероятностью $1/3$, что позволяет сделать приз максимальным $П = 3Ц$. А одни покладистые ($P(B)=0$) выигрывают вдвое чаще ($P(A)=2/3$), что заставляет организатора игры для обеспечения безубыточности максимально уменьшить приз $П = 3Ц/2$.

Таким образом, $3Ц/2 \leq П \leq 3Ц$ и все определяется долей упрямых участников $P(B)$. Допустим, $P(B) = 3/4$, тогда $P(A) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{8-3}{12} = \frac{5}{12}$ и согласно (12.3) $П = 12Ц/5$.

При указанной $P(B)$ на 12 игроков в среднем приходится 3 покладистых и 9 упрямых. Если $Ц = 5$, то вместе они внесут $(3+9) \cdot 5 = 60$. В среднем выигрывают 2 покладистых и 3 упрямых. Вместе они получают ($П = 12$) $(2+3) \cdot 12 = 60$ (имеет место безубыточность). При этом покладистые (те, кто меняют первоначальный выбор) в прибыли $2 \cdot 12 = 24 > 3 \cdot 5 = 15$ за счет упрямых $24 - 15 = 9 = 9 \cdot 5 - 3 \cdot 12$.

Если с каждого игрока брать $Ц = 6$, организаторы при том же призе получают прибыль $(3+9) \cdot (6-5) = 12$. Прибыль организатора и уменьшенная прибыль победителей ($12 - 6 < 12 - 5$) оплачивается за счет проигравших $12 + (2+3)(12-6) = (1+6) \cdot 6 = 42$.

13. УСТАВШИЙ ФИНН

Во времена сухого закона в Финляндии ее граждане ездили отдыхать в Ленинград. Сильно уставший после экскурсии финн купил билет в кино-театр и заснул на подвернувшемся пустом месте. Если место окажется чужим, то появившийся позже гостеприимный хозяин поймет, что выяснять отношения не с кем, и тоже займет не свое пустое место. Если это место оплачено не финном, то следующий интеллигентный ленинградец, столкнувшийся с аналогичной проблемой, поступит так же, как и его предшественник. И так далее. Какова вероятность того, что в случае аншлага пришедший последним зритель сядет на свое место?

Решение. Пусть число мест в зале равно n . Обозначим H приход финна первым, A и B – посадку на свои места финна и последнего зрителя соответственно. Черта будет означать противоположность события.

Если $n = 1$, последнее место достанется финну, и так как $A = B$, то

$$P_1(B) = 1, \quad (13.1)$$

где P – вероятность (индекс обозначает число мест в зале).

Для $n > 1$ по формуле полной вероятности

$$P_n(B) = P(\bar{H})P_{n-1}(B) + P(H)P_H(B), \quad (13.2)$$

$$P_H(B) = P_H(A) + P_H(\bar{A})P_{H \cap \bar{A}}(B), \quad (13.3)$$

ибо если первым пришел не финн, возникает задача с числом мест, уменьшенным на единицу ($P_{\bar{H}}(B) = P_{n-1}(B)$), а если финн пришел первым и сел на свое место, все остальные зрители (включая последнего) тоже сядут на свои места $P_{H \cap A}(B) = 1$. Очевидно,

$$P(H) = 1/n = P_H(A), \quad P(\bar{H}) = (n-1)/n = P_H(\bar{A}), \quad (13.4)$$

так как первым приходит один зритель из n и если этот зритель финн, перед ним n свободных мест, одно из которых его.

Если $n = 2$,

$$P_{H \cap \bar{A}}(B) = 0 = 1 - P_1(B), \quad (13.5)$$

что после подстановки в (13.3) с учетом (13.2), (13.4) дает $P_2(B) = 3/4$.

Для $n = 3$

$$P_{H \cap \bar{A}}(B) = P_{H \cap \bar{A}}(C)P_{H \cap \bar{A} \cap C}(B) + P_{H \cap \bar{A}}(\bar{C})P_{H \cap \bar{A} \cap \bar{C}}(B), \quad (13.6)$$

где C – вторым зашел не тот, чье место занял финн.

Поскольку вторым приходит один из двух оставшихся зрителей,

$$P_{H \cap \bar{A}}(C) = P_{H \cap \bar{A}}(\bar{C}) = 1/2. \quad (13.7)$$

Если место второго не занято, то на место финна (не свое) сядет последний

$$P_{H \cap \bar{A} \cap C}(B) = 0. \quad (13.8)$$

Если же место второго занято, то в качестве гипотез можно рассматривать D – его посадку на место финна и противоположное событие

$$P_{H \cap \bar{A} \cap \bar{C}}(B) = P_{H \cap \bar{A} \cap \bar{C}}(D)P_{H \cap \bar{A} \cap \bar{C} \cap D}(B) + P_{H \cap \bar{A} \cap \bar{C}}(\bar{D})P_{H \cap \bar{A} \cap \bar{C} \cap \bar{D}}(B). \quad (13.9)$$

Очевидно,

$$P_{H_1 \cap \bar{A} \cap \bar{C}}(D) = P_{H_1 \cap \bar{A} \cap \bar{C}}(\bar{D}) = 1/2 \quad (13.10)$$

и

$$P_{H_1 \cap \bar{A} \cap \bar{C} \cap D}(B) = 1, \quad P_{H_1 \cap \bar{A} \cap \bar{C} \cap \bar{D}}(B) = 0, \quad (13.11)$$

т.к. если вторым окажется тот, на чье место сел финн, и из двух оставшихся он выберет место финна, то последний (третий) сядет на свое место и наоборот.

Подставив (13.7)–(13.11) в (13.6), получим

$$P_{H_1 \cap \bar{A}}(B) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 \right) = \frac{1}{4} = 1 - P_2(B), \quad (13.12)$$

Подстановка (13.12) в (13.3) с учетом (13.2), (13.4) дает $P_3(B) = 2/3$.

Обобщением (13.5), (13.12) на случай произвольных n является

$$P_{H \cap \bar{A}}(B) = 1 - P_{n-1}(B), \quad (13.13)$$

что допускает разумную интерпретацию. Если пришедший первым финн сел не на свое место, в роли финна оказывается тот, чье место он занял. При этом отличие от задачи с n на единицу меньшим в том, что, придя последним, «новый финн» сядет на чужое место.

Использование (13.13) резко упрощает процедуру вычисления $P_{H \cap \bar{A}}(B)$ при больших n . Для иллюстрации последнего утверждения приведем ее реализацию для $n = 4$ двумя способами без подробных комментариев:

$$1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 \right) + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0 \right] \right\} + \frac{2}{3} \cdot 1 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 \right) + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0 \right].$$

Из (13.2)–(13.4) и (13.13) следует рекуррентное соотношение для $P_n(B)$

$$n^2 P_n(B) = n + (n-1)^2 P_{n-1}(B), \quad (13.14)$$

решение которого с учетом (13.1) имеет вид

$$P_n(B) = (n+1)/2n. \quad (13.15)$$

Таким образом, на основании проведенного исследования можно заключить, что при большой вместительности зала пришедший последним зритель окажется на своем месте с вероятностью $1/2$.

Иногда рассмотренная задача предлагается в упрощенном варианте, когда в условии сразу оговаривается, что финн приходит первым и $n \geq 2$. В такой постановке вероятность того, что последний зритель сядет на свое место, дает формула (13.3). Если в нее подставить значения вероятностей, задаваемые формулами (13.4), (13.13), (13.15), получим

$$P_H(B) = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} \left(1 - \frac{(n-1)+1}{2(n-1)} \right) = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \quad (13.16)$$

Заметим, что в новой (упрощенной) постановке, фигурирующая в ответе $1/2$ описывает не асимптотику решения, а его точное значение, справедливое при любых (в том числе и малых) n .

14. ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД К ПОЛУЧЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ [24]

Методически верное изложение любого предмета предполагает неукоснительно мотивированное введение новых понятий. Необходимость их появления естественным путем должна вытекать из всего предыдущего рассмотрения. При правильном подходе вопросы «как мы догадались о необходимости ввести то или иное понятие?» и «почему мы их определили именно так, а не иначе?» вообще не должны возникать. И уж во всяком случае, отвечая на них, нельзя говорить «узнаете потом». После таких ответов

процесс мышления и развитие способностей к исследовательской работе тоже откладывается на потом (правильнее сказать, навсегда).

К примеру, во всех вузовских учебниках (и не только вузовских) нормальный закон вводится по определению, что не выдерживает никакой критики. С какой стати среди бесчисленного множества функций распределения мы «уперлись» именно в эту. Ссылки на теорему Ляпунова несостоятельны, так как:

- 1) ее формулируют позже;
- 2) приводят без доказательства;
- 3) доказательство очень громоздкое и основано на методах математического анализа, идейно далеких от теории вероятностей.

Ниже предлагается альтернативный подход к получению наиболее популярных распределений случайных величин, основанный на экстремальности энтропии и лишенный упомянутых недостатков.

К понятию энтропии естественным образом приводит следующая *Задача*. Имеются рычажные весы без гирь и 25 внешне одинаковых монет, одна из которых несколько тяжелее остальных. Требуется гарантированно определить ее минимальным числом взвешиваний.

Решение. Очевидно, взвешивать монеты нужно одинаковыми по численному составу группами. Правильный численный состав обеспечивает извлечение из каждого взвешивания максимальной информации для локализации тяжелой монеты.

Таким образом, встал вопрос о мере информации, извлекаемой из эксперимента с несколькими возможными исходами.

В качестве такой меры можно взять среднюю длину сообщения об итогах эксперимента с несколькими возможными исходами (усреднение производится по всем исходам). В частности, если таковой всего один, то и сообщать нечего, т.е. длина сообщения, а значит, и количество извлекаемой информации равны нулю. Взвешивание (при одинаковом количестве монет на чашах весов¹⁴) может закончиться тремя исходами: перетягиванием левой чаши, правой или их балансом.

Очевидно, однако, что длина сообщения определяется не только содержанием эксперимента, но и используемой системой записи самих сообщений. Например, итог можно описать словами (перевесила левая чаша, перевесила правая чаша, осуществился баланс), а можно и перенумеровать (закодировать) исходы и по окончании опыта указывать лишь код реализовавшегося исхода.

¹⁴ Иное взвешивание монет ничего не дает для локализации тяжелой, ибо его результат достоверно предсказуем.

По техническим причинам в электронных средствах записи цифровой информации наибольшее распространение получила двоичная система исчисления. Т.е. код исхода представляет последовательность нулей и единицу. Их количество и есть длина сообщения.

Чтобы объективно сравнивать количества информации, извлекаемые из разных экспериментов (например, отличающихся численным составом взвешиваемых групп монет), при кодировании нужно соблюсти очевидные требования:

1) максимально лаконично кодировать исходы сравниваемых опытов (например, нельзя использовать длинные номера, пока не заняты все более короткие);

2) чтобы средняя длина сообщения была короче, более вероятным исходам нужно присваивать самые короткие номера.

Указанным требованиям отвечает следующая система кодирования.

Разобьем все исходы на две группы с примерно равными суммарными вероятностями (по 1/2 на группу). Одной из групп поставим в соответствие номер 0, второй – номер 1. Затем каждую из групп (если в ней более одного исхода) снова разобьем на две части с примерно равными суммарными вероятностями (по 1/4 на каждую часть). Первой подгруппе первой группы будет соответствовать номер 00, второй 01. Аналогично для 1-й и 2-й подгрупп второй группы имеем номера 10 и 11 соответственно. Указанную процедуру будем продолжать до тех пор, пока в каждой из подподгрупп не останется по одному исходу.

Заметим, что исходу с вероятностью $P = 1/2$ соответствует номер из одной цифры, исходу с $P = 1/4$ – из двух цифр, с $P = 1/8$ – из трех и т.д. Т.е. $n_i = -\log_2 P_i$, где n_i – число цифр (длина сообщения об i -м исходе с вероятностью P_i). При этом

$$\bar{n} = -\sum_i P_i n_i = -\sum_i P_i \log_2 P_i = I. \quad (14.1)$$

Последнее равенство определяет количество информации I , извлекаемой из опыта с данным распределением вероятности по его исходам. Если последний еще не произведен, (14.1) может характеризовать меру неопределенности (энтропию S) данного эксперимента или любой величины, имеющей закон распределения вероятностей по своим возможным значениям. Формула (14.1) определяет S и I в разные моменты времени (S – до, а I – после опыта). Соответственно, до него $I = 0$, а после – $S = 0$. Значит, $\Delta S = -\Delta I$.

Покажем, что I максимальна, если распределение равномерно ($P_i = 1/N$, где N – число исходов). Пусть для простоты $N = 2$, обозначим

$P_1 = x$, тогда по условию нормировки $P_2 = 1 - x$, что после подстановки в (14.1) дает функцию

$$-I = x \ln x + (1 - x) \ln(1 - x).$$

Из необходимого условия ее экстремума следует требуемый результат

$$-I' = \ln x + 1 - \ln(1 - x) - 1 = \ln \frac{x}{1 - x} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow P_1 = P_2.$$

Таким образом, возвращаясь к задаче о монетах, перед взвешиванием их нужно делить на три по возможности равные кучки, чтобы вероятности попадания в них тяжелой монеты были примерно равны. В этом случае возможные исходы (левая, правая, баланс) будут равновероятны.

Т.е. на каждую чашку положим по 8 монет. В случае баланса тяжелая среди оставшихся девяти. Вторым взвешиванием локализуем ее среди трех, и третьим определяем.

Общее количество взвешиваний можно найти, не конкретизируя результат каждого из них. Энтропия задачи с 25 монетами (тяжелая с равной вероятностью может оказаться любой из них) равна

$$S = -\sum_{i=1}^{25} \frac{1}{25} \cdot \log_2 \frac{1}{25} = \log_2 25,$$

а максимум информации, извлекаемой при одном взвешивании,

$$I = -\sum_{i=1}^3 \frac{1}{3} \log_2 \frac{1}{3} = \log_2 3.$$

Чтобы исчерпать всю неопределенность (решить задачу), нужно обеспечить выполнение неравенства $m \cdot \log_2 3 \geq \log_2 25$, в котором m – минимальное число взвешиваний, т.е. $m = 3$.

Последняя формула (при замене 25 любым целым числом) позволяет определять m при произвольном числе монет в условии задачи. Заметим, что число исходов одного взвешивания 3 на единицу больше количества чаш у весов. Это позволяет сделать еще одно обобщение в условии задачи. Например, изготовить коромысло для весов с тремя рычагами, расходящимися под углами 120° . В общем случае минимальное число взвешиваний определяется из неравенства

$$m \cdot \log_2(1 + k) \geq \log_2 N,$$

в котором k – число чаш, а N – количество монет.

Однако главный результат решения рассмотренной задачи не в умении быстро находить тяжелую монету среди нескольких легких и даже не в сделанном обобщении условия, а во введении понятия энтропии. Ее возрастание – фундаментальный закон природы. Не вдаваясь в механизмы его реализации, приведем лишь один пример. Капнем чернила в банку с водой. Вначале вероятность обнаружить чернила локализована в том месте, куда упала капля. Но по мере растворения чернил, эта вероятность равномерно распределяется по всему объему банки. Энтропия, как мы уже выяснили, при этом стремится к своему максимальному значению. Обратный процесс невозможен по законам статистики. Сколько бы мы не ждали, чернила не соберутся вновь в каплю. Т.е. состояние с максимальной энтропией является равновесным. По этой причине распределения вероятности, наиболее часто встречающиеся в окружающем нас мире, могут быть получены из условия экстремальности энтропии.

Обобщим (14.1) на случай законов распределения непрерывных случайных величин с плотностью вероятности $f(x)$. Разобьем область возможных значений случайной величины на небольшие интервалы длинами Δx_i . Введя вероятность попадания случайной величины в i -й интервал $P_i = f(\xi_i)\Delta x_i$, с помощью (14.1) получим

$$\begin{aligned} S &= -\sum_i f(x_i)\Delta x_i \log_2(f(x_i)\Delta x_i) = \\ &= -\sum_i f(x_i)\Delta x_i \log_2 f(x_i) - \sum_i f(x_i)\Delta x_i \log_2(\Delta x_i), \end{aligned} \quad (14.2)$$

где ξ_i – внутренняя точка i -го интервала.

Ничто не мешает сделать Δx_i одинаковыми, после чего второе слагаемое в (14.2) не зависит от вида $f(x)$:

$$\sum_i (f(\xi_i) \log_2 \Delta x) \cdot \Delta x = \log_2 \Delta x \sum_i f(\xi_i)\Delta x = \log_2 \Delta x \cdot 1,$$

ибо по условию нормировки $\sum_i f(x_i)\Delta x_i = 1$ для любых законов распределения. Поэтому, если интересоваться изменением S при вариации $f(x)$, второе слагаемое в (14.2) можно опустить. Кроме того, фигурирующие в (14.2) логарифмы можно заменить натуральными, выбирая

таким образом новый масштаб измерения энтропии ($\log_2 f = \ln f / \ln 2$). В результате перехода к бесконечно малым Δx_i получим

$$S = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \ln f(x) dx. \quad (14.3)$$

В связи с имеющим место законом возрастания энтропии выясним, какая $f(x)$ обеспечивает экстремум функционала (14.3). Поскольку $f(x)$ не просто функция, а плотность вероятности, максимум S будем искать при дополнительных условиях

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1, \quad (14.4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = m, \quad (14.5)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 f(x) dx = \sigma^2, \quad (14.6)$$

обеспечивающих реалистичность закона распределения, где (14.4) – условие нормировки, а (14.5) и (14.6) – требование конечности математического ожидания и дисперсии.

Домножим (14.4)–(14.6) соответственно на α , β , γ и прибавим к (14.3):

$$S + \alpha + \beta m + \gamma \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, f(x)) dx, \quad (14.7)$$

где

$$F(x, f) = -f \ln f + \alpha f + \beta x f + \gamma (x - m)^2 f. \quad (14.8)$$

Т.к. слева в (14.7) все кроме S есть константа, экстремальность интеграла в правой части (14.7) будет означать условный экстремум S . Чтобы интеграл в (14.7) был максимальным, нужно каждому x поставить в соответствие такое значение f , чтобы $F(x, f)$ была максимальной. Из необходимого условия экстремума

$$F'_f = -\ln f - 1 + \alpha + \beta x + \gamma (x - m)^2 = 0 \quad (14.9)$$

найдем

$$f = c \cdot e^{\beta x + \gamma(x-m)^2} = f(x). \quad (14.10)$$

Подставив (14.10) в (14.4)–(14.6), получим, что $\beta = 0$ и выразим $c = e^{\alpha-1}$ и γ через m и σ (подробные выкладки приведены в приложении)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}. \quad (14.11)$$

Подчеркнем, что нормальное распределение (14.11) возникло не по определению, а как следствие закона возрастания энтропии. При этом смысл параметров m , σ не надо устанавливать. Он ясен из соотношений (14.5), (14.6).

Если случайная величина положительно определена, из конечности математического ожидания следует конечность дисперсии, т.к. слева от m интервал конечен ($x > 0$), а справа – бесконечен. И бесконечность дисперсии означала бы бесконечное смещение m вправо по числовой оси. Поэтому от условия (14.6) следует отказаться, а соотношения (14.4), (14.5) и (14.10) примут вид:

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = 1, \quad (14.4')$$

$$\int_0^{\infty} x \cdot f(x) dx = m, \quad (14.5')$$

$$f(x) = c \cdot e^{\beta x}. \quad (14.10')$$

Подставив (14.10') в (14.4'), выразим c через β :

$$1 = \int_0^{\infty} c \cdot e^{\beta x} dx = \frac{c}{\beta} e^{\beta x} \Big|_0^{\infty} \Rightarrow \beta < 0; \quad 1 = -\frac{c}{\beta} \Rightarrow f(x) = c \cdot e^{-cx}.$$

Подставив последнее выражение в (14.5'), найдем c и завершим получение экспоненциального распределения:

$$\begin{aligned} c \cdot \int_0^{\infty} x \underbrace{e^{-cx}}_{du} dx &= \left| \begin{array}{l} du = dx \\ V = -\frac{1}{c} e^{-cx} \end{array} \right| = c \left[-\frac{x}{c} e^{-cx} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{c} \int_0^{\infty} e^{-cx} dx \right] = \\ &= -\frac{1}{c} e^{-cx} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{c} = m \Rightarrow f(x) = \frac{1}{m} e^{-\frac{x}{m}}. \end{aligned} \quad (14.12)$$

Если возможные значения случайной величины принадлежат отрезку $[a, b]$, ее математическое ожидание не может не быть конечным. Отбросив в этом случае условие (14.5'), получим

$$\int_a^b f(x) dx = 1, \quad (14.4'')$$

$$f(x) = c, \quad (14.10'')$$

откуда $c = \frac{1}{b-a}$, т.е. максимуму энтропии на отрезке отвечает равномерное распределение

$$f(x) = \frac{1}{b-a}. \quad (14.13)$$

Полученные распределения давно открыты, изучены и затабулированы, т.к. повсеместно распространены в окружающем нас мире. В частности, они формируются в результате растворения капли чернил в бесконечной, полубесконечной (начальное положение капли у ее края) и конечной трубке с водой. При этом под $f(x)$ следует понимать отношение числа чернильных молекул на участке $(x, x + dx)$ к их общему числу в трубке.

Очевидно, растворение означает рост σ , что согласуется с законом возрастания энтропии. Чтобы убедиться в этом, вычислим S нормально распределенной величины. Для этого подставим (14.11) в (14.1), распишем логарифм произведения и вынесем постоянные множители за знаки интегралов

$$\begin{aligned} S &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \right) dx = \\ &= \ln(\sqrt{2\pi\sigma}) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - \frac{1}{2\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 f(x) dx. \end{aligned}$$

После чего с учетом (14.4), (14.6) получим результат

$$S = \ln \sigma + \ln \sqrt{2\pi} - 1/2, \quad (14.14)$$

позволяющий смоделировать растворение чернил в свернутой в кольцо конечной трубке.

Эргодическими будем называть системы, свойства которых в процессе эволюции перестают зависеть от ее начальных условий, даже если исключены сколь угодно малые внешние воздействия. Феномен эргодичности обеспечивает воспроизводимость опытов по установлению статистических закономерностей, т.к. позволяет ввести понятие статистического ансамбля – совокупности систем, эквивалентных между собой в том смысле, что они подчиняются одинаковым уравнениям движения. Добиться полной эквивалентности (совпадения и начальных условий тоже) практически невозможно. Но благодаря эргодичности этого и не нужно, т.к. законы распределения изучаемого случайного признака не зависят от начальных условий эволюции и потому одинаковы у всех элементов ансамбля.

Поскольку распределение случайного признака в данной системе не зависит от начальных условий ее эволюции, можно считать, что элементы ансамбля находятся друг по отношению к другу в некоторой хронологической последовательности. Это приводит к важнейшему следствию эргодичности – равенству средних по времени и средних по ансамблю. Чтобы оценить практическое значение последнего вывода, рассмотрим задачу об определении среднего положения молекулы чернил в запаянной трубке длиной L , ориентированной горизонтально (вдоль оси Ox).

Первый путь заключается в вычислении среднего по времени $x_{cp}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t x(t) dt$ и требует интегрирования уравнений движения для полу-

чения вида $x(t)$ – зависимости координаты рассматриваемой молекулы от времени. Даже если движение остальных молекул воды и чернил считать заданным, а закон их влияния на рассматриваемую – известным, это требует решения совершенно необозримого дифференциального уравнения.

Второй путь (фактически он является единственно возможным и, как это ни парадоксально, гораздо более корректным) неизмеримо проще, т.к. не требует определения механического состояния системы. Вместо интегрирования уравнений движения достаточно установить закон распределения молекул чернил по координатам (что является гораздо более скром-

ной информацией) и вычислить среднее по ансамблю $x_{cp}(t) = \int_0^L x f(x, t) dx$.

Для определения плотности вероятности $f(x, t)$ выясним направление и конечный пункт эволюции, упомянутой в определении эргодичности. Заметим, что $f(x, t)$ является характеристикой отдельной молекулы, но в силу эргодичности утрачивает зависимость от начальных условий ее движения

и потому относится к капле чернил в целом (молекулы которой могут считаться элементами статистического ансамбля).

С каждым новым столкновением рассматриваемой молекулы мы утрачиваем информацию о возможном месте ее локализации. Следовательно, (если пренебречь флуктуациями) энтропия функции распределения должна расти, приближаясь к своему асимптотическому значению, достигаемому при полном (насколько позволяют внешние условия) размещивании системы. После этого x_{cp} , а значит и $f(x,t)$ перестает зависеть от времени. Т.е. вид равновесного распределения $f(x)$ может быть установлен вариационно из условия экстремальности энтропии.

Свернув координатную плоскость OXY с нарисованной на ней Гауссовой кривой в цилиндр радиуса r и образующей, параллельной оси OY , можно проследить как нормальное распределение по мере увеличения σ (обусловленного ростом S) трансформируется в равномерное.

Пусть $m = 0$. Считая поворот на угол 2π возвратом в исходную точку и применив теорему сложения вероятностей, получим

$$f^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x+2\pi rk)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\pi r \leq x \leq \pi r). \quad (14.15)$$

Вначале, когда чернильные молекулы локализованы, $\sigma \ll \pi r$ и в соответствии с правилом трех сигм в сумме (14.15) можно пренебречь слагаемыми со всеми номерами, кроме $k = 0$, и $f^*(x)$ на отрезке $[-\pi r, \pi r]$ будет аппроксимироваться нормальным законом.

Затем по мере растворения чернил начнет выполняться неравенство $\sigma \geq \pi r$. Т.е. разброс случайной величины станет сравнимым с длиной отрезка, на котором определена $f^*(x)$. Это не позволяет при составлении прогноза одно возможное значение x предпочесть другому. Т.е. $f^*(x)$ в такой ситуации должна описывать равномерное распределение.

Меняя отношение $\pi r/\sigma = a$ от бесконечности до нуля, с помощью формулы (14.15) можно непосредственно проследить трансформацию нормального распределения в равномерное. В частности, графики $f^*(x)$ (рисунок 14.1, $a, б, в$), построенные в среде пакета MathCAD для $a = 5, 3, 1$, полностью подтверждают предсказанную эволюцию функции распределения случайной координаты чернильной молекулы в свернутой в кольцо трубке конечной длины. При этом $x = 0$ соответствует начальному положению капли.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 c \sigma e^{\xi^2 \gamma \sigma^2} d\xi = 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/2} d\xi. \quad (14.16)$$

Чтобы убедиться в справедливости последнего равенства, рассмотрим

$$J(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2/2} dx.$$

Переходом в полярную систему координат можно показать, что

$$J(1)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-\rho^2/2} \rho d\rho = 1 \cdot \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1,$$

т.е. $J(1) = 1$. При этом $J(\alpha) = 1/\sqrt{\alpha}$, после чего дифференцированием $J(\alpha)$ по параметру получим

$$J(\alpha)' = -\alpha^{-3/2}/2 = -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2/2} dx,$$

или, полагая в последнем равенстве $\alpha = 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx = 1.$$

Аналогично, вычислив производную n -го порядка $J(\alpha)^{(n)}$, можно получить

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-x^2/2} dx = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1). \quad (14.17)$$

С учетом изложенного (см. (14.16)) $\gamma = -1/2\sigma^2$, $c = 1/\sqrt{2\pi}\sigma$.

15. ЭКСТРЕМАЛЬНОСТЬ ЭНТРОПИИ, ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ И ФОРМУЛА СТИРЛИНГА [25]

Продемонстрируем проникновение в суть изучаемого методами, свойственными инженерному творчеству. Тут и синтетический подход к проблеме, взгляд на нее с различных точек зрения, восхождение от частного к общему, умение извлечь из конкретной ситуации качественно новую информацию.

С помощью n -кратного интегрирования по частям ($dV = e^{-x} dx$) и правила Лопиталья можно убедиться в справедливости цепочки равенств

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = \dots = n!. \quad (15.1)$$

Разделив левую и правую части (15.1) на $n!$, получим равенство

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{n!} x^n e^{-x} dx = 1, \quad (15.2)$$

которое можно интерпретировать как условие нормировки для плотности вероятности

$$f(x) = \frac{1}{n!} x^n e^{-x} \quad (15.3)$$

некоторой неотрицательной случайной величины X . С помощью (15.1), (15.3) найдем ее математическое ожидание

$$M(X) = \int_0^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} x^{n+1} e^{-x} dx = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1, \quad (15.4)$$

дисперсию и среднеквадратическое отклонение:

$$M(X^2) = \int_0^{\infty} x^2 f(x) dx = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} x^{n+2} e^{-x} dx = \frac{(n+2)!}{n!} = (n+1)(n+2),$$

$$D(X) = M(X^2) - M(X)^2 = (n+1)(n+2) - (n+1)^2 = n+1,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{n+1}. \quad (15.5)$$

То, что $M(X)$ и $D(X)$ аддитивно зависят от n с учетом свойств математического ожидания и дисперсии, означает, что X представляет собой сумму независимых случайных слагаемых

$$X = \sum_{i=1}^{n+1} X_i \quad (15.6)$$

с единичными математическими ожиданиями и среднеквадратическими отклонениями

$$M(X_i) = \sigma(X_i) = 1. \quad (15.7)$$

Свойством (15.7) обладают случайные величины, распределенные по экспоненциальному закону

$$f_i(x) = e^{-x} \quad (i = 1, 2, \dots, n+1),$$

что согласуется с формулой (15.3) при $n = 0$. Т.е, заменив в (15.3) n на $n - 1$, получим плотность вероятности суммы n независимых экспоненциально распределенных случайных слагаемых

$$f(n, x) = \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-x}, \quad (15.8)$$

известную как гамма-распределение с n степенями свободы [23].

Согласно (15.4), (15.5) при больших n слева от математического ожидания в области возможных значений X помещается сколько угодно много среднеквадратических отклонений

$$(M(X) - 0) / \sigma(X) = \sqrt{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

то есть в соответствии с неравенством Чебышева [23] область возможных значений X из полубесконечной ($x \in [0, \infty)$) при $n \rightarrow \infty$ превращается как бы в бесконечную. На ней максимум энтропии

$$S = M(\ln f(X)) \quad (15.9)$$

обеспечивается (см. раздел 14) нормальным распределением

$$f(x) = \frac{1}{n!} x^n e^{-x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(X)} e^{-\frac{(x-M(X))^2}{2\sigma(X)^2}}, \quad (15.10)$$

где x принадлежит интервалу, обеспечивающему для нормального закона практически весь вклад в энтропию.

Выполнив в (15.9), (15.10) замену переменной

$$\xi = (x - M(X)) / \sigma(X), \quad (15.11)$$

получим при $n \rightarrow \infty$

$$S = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi = \ln \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi + \\ + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \xi^2 e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi = \ln \sqrt{2\pi} + \frac{1}{2}. \quad (15.12)$$

При интегрировании в (15.12) учтено условие нормировки и единичность дисперсии приведенной случайной величины:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \xi^2 e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi = 1.$$

Для сравнения при $c = 4$

$$\int_{-c}^c \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi = 0,99994... \approx 1, \quad \int_{-c}^c \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \xi^2 e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi = 0,99887 \approx 1, \quad (15.13)$$

и если точность приближенных равенств в (15.12) приемлема, асимптотика (15.10) справедлива для $x \in (M(X) - c\sigma(X), M(X) + c\sigma(X))$ при условии, что $M(X) - c\sigma(X) > 0$. Согласно неравенству Чебышева оценка погрешности приближенных равенств (15.12) убывает как $1/c^2$, что позволяет обеспечить требуемую точность, подобрав с помощью последнего неравенства для приемлемого c адекватное n . Подставив в (15.10) любое x из этого интервала (например, $x = M(X)$) получим с учетом (15.4), (15.5)

$$\frac{1}{n!} (n+1)^n e^{-(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(n+1)}}.$$

Откуда, пренебрегая в скобках единицами по сравнению с n , получим асимптотическое выражение для факториалов с большими аргументами

$$n! \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}, \quad (15.14)$$

известное как формула Стирлинга [6].

В соответствии с вышеизложенным ее относительная погрешность убывает с ростом n как бесконечно малая одного порядка малости

с $1/c^2 = (\sigma(X)/M(X))^2 = 1/n$. Определить коэффициент пропорциональности и уточнить формулу (15.14) можно получив поправки к асимптотике (15.10), обусловленные асимметриями и эксцессами гамма-распределения (15.3), что является задачей, заслуживающей отдельного рассмотрения.

Пока же (в завершение данного раздела) сформулируем нетривиальное свойство нормального закона. Из (15.6) очевидным образом следует, что сумма независимых гамма-распределенных величин с плотностями вероятности $f(n_1, x)$ и $f(n_2, x)$ также гамма-распределена с $n = n_1 + n_2$ степенями свободы.

Если складывать независимые экспоненциально распределенные Y_i , такие, что $M(Y_i) = \sigma(Y_i) = a$, то $M(Y_i/a) = 1 = M(X_i)$, и выполнить с учетом (15.6) в условии нормировки для $f(n, x)$ замену переменной

$$1 = \int_0^{\infty} f(n, x) dx = \left| \begin{array}{l} x = y/a \\ dx = a^{-1} dy \end{array} \right| = \int_0^{\infty} \frac{y^{n-1} e^{-y/a}}{(n-1)! a^{n-1} a} dy = \int_0^{\infty} f(n, y) dy,$$

можно обобщить (15.8) на случай $a \neq 1$:

$$f(n, y) = \frac{y^{n-1} e^{-y/a}}{(n-1)! a^n}. \quad (15.15)$$

Асимптотикой (15.15) при больших n будет нормальное распределение с $M(Y) = na = m$ и $D(Y) = na^2 = D$. Следовательно, на нормальный закон распространяется вышеупомянутое свойство гамма-распределения. Сумма независимых нормально распределенных случайных величин с параметрами, удовлетворяющими соотношениям $D_i/m_i = a$, $n_i = m_i/a \gg 1$, в которых i – номера слагаемых, также является нормально распределенной. При этом в соответствии с последними равенствами (как это и должно быть) математическое ожидание (дисперсия) суммы равна сумме математических ожиданий (дисперсий) слагаемых. Непосредственно можно убедиться, что сформулированное свойство сохраняется и при произвольных значениях параметров независимых нормально распределенных слагаемых.

16. НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН НА ПЛОСКОСТИ [26]

Считается, что строгое изложение данного вопроса сопряжено с громоздкими вычислениями, и в большинстве учебных пособий по этой причине ограничиваются лишь приведением конечного результата. Однако его правильная интерпретация, а значит, и усвоение невозможны без понимания сути зависимости двух нормально распределенных величин. И наоборот, ее понимание позволяет совместить строгость изложения с его лаконичностью.

Дифференциальная функция распределения системы двух независимых нормально распределенных случайных величин X и Y получается умножением их плотностей вероятностей:

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= f(x) \cdot f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}} = \\
 &= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]}, \quad (16.1)
 \end{aligned}$$

где m_x, m_y – математические ожидания, а σ_x, σ_y – среднеквадратические отклонения X и Y соответственно.

При этом линиями уровня поверхности $f(x, y)$ являются эллипсы

$$\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} = t > 0 \quad (16.2)$$

с осями симметрии, параллельными осям системы координат OXY , формой, задаваемой среднеквадратическими отклонениями σ_x, σ_y , и размерами, определяемыми величиной параметра t .

Из симметрии линий уровня ясно, что условное математическое ожидание Y – горизонтальная прямая

$$m_y(x) = m_y = \text{const}. \quad (16.3)$$

Поворотом системы координат перейдем к системе зависимых случайных величин Ξ, Γ с возможными значениями ξ, η и плотностью вероятности $f(\xi, \eta)$. В соответствии с правилом умножения вероятностей

$$\begin{aligned}
 f(\xi, \eta) &= f(\xi) \cdot f_\xi(\eta) = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\xi^2}} e^{-\frac{(\xi-m_\xi)^2}{2\sigma_\xi^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\eta(\xi)^2}} e^{-\frac{(\eta-m_\eta(\xi))^2}{2\sigma_\eta(\xi)^2}}, \quad (16.4)
 \end{aligned}$$

где $m_\eta(\xi), \sigma_\eta(\xi)$ и $f_\xi(\eta)$ – условные математическое ожидание, среднеквадратическое отклонение и плотность вероятности случайной величины Γ , отвечающие

значению ξ нормально распределенной случайной величины Ξ с безусловными числовыми характеристиками m_ξ и σ_ξ .

Покажем, что в результате поворота системы координат график условного математического ожидания перестанет совпадать с осью симметрии линий уровня, но останется прямой линией.

В силу симметрии нормального закона $f_\xi(m_\eta(\xi) + \zeta) = f_\xi(m_\eta(\xi) - \zeta)$ (см. (16.4)) линия $m_\eta(\xi)$ образована условными максимумами $f(x, y)$ при условии $\xi = \text{const}$ или точками касания линий уровня (16.2) и линий связи (рисунок 16.1). Касание означает равенство производных. Поскольку семейство $\xi = \text{const}$ образовано параллельными прямыми (перпендикулярными повернутой координатной оси), все они имеют одинаковый наклон в системе координат OXY . То есть линия $m_\eta(\xi)$ объединяет точки эллипсов (16.2) с одинаковым значением производной $y'(x) = k$, где величина k определяется углом поворота системы координат φ и параметрами эллипсов σ_x , σ_y , а зависимость $y(x)$ неявно задается формулой (16.2). Согласно (16.2) таким свойством ($y'(x) = \text{const}$) обладают точки пересечения эллипсов с прямыми, проходящими через центр эллипсов:

$$\frac{2(x - m_x)}{\sigma_x^2} + \frac{2(y - m_y)y'(x)}{\sigma_y^2} = 0, \quad (16.5)$$

ибо при $y'(x) = \text{const}$ формула (16.5) является уравнением прямой.

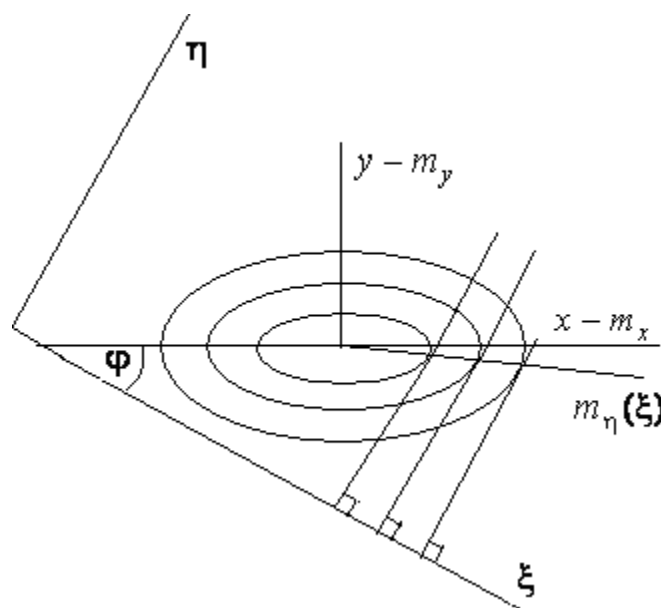


Рисунок 16.1. – Линейность корреляции нормально распределенных величин

Таким образом, то, что график $m_\eta(\xi)$ является прямой, доказано. Значит, $m_\eta(\xi)$ в точности описывается уравнением линейной регрессии корреляционной зависимости

$$m_\eta(\xi) = m_\eta + r_{\xi\eta} \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi} (\xi - m_\xi), \quad (16.6)$$

в котором $r_{\xi\eta}$ – коэффициент корреляции, m_η и σ_η – безусловные матожидание и среднеквадратическое отклонение случайной величины η .

Обычно правую часть (16.6) получают методом наименьших квадратов. Однако в данном случае это тождество, в чем можно убедиться непосредственно:

$$\begin{aligned} m_\eta(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \eta f_\xi(\eta) d\eta = \frac{1}{f(\xi)} \int_{-\infty}^{\infty} \eta f(\xi, \eta) d\eta = \frac{1}{f(\xi)} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (\eta - m_\eta) f(\xi, \eta) d\eta + \right. \\ &\quad \left. + m_\eta \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) d\eta \right\} = \frac{1}{f(\xi)} \int_{-\infty}^{\infty} (\eta - m_\eta) f(\xi, \eta) d\eta + m_\eta, \end{aligned}$$

что после подстановки в (16.6), умножения обеих частей равенства на $(\xi - m_\xi) f(\xi)$ и интегрирования по ξ дает тождество

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - m_\xi)(\eta - m_\eta) f(\xi, \eta) d\eta d\xi = \\ &= r_{\xi\eta} \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - m_\xi)^2 f(\xi) d\xi = r_{\xi\eta} \sigma_\eta \sigma_\xi \end{aligned} \quad (16.7)$$

в соответствии с определением $r_{\xi\eta}$ как смешанного приведенного центрального момента второго порядка.

Кроме $m_\eta(\xi)$ в законе условного нормального распределения $f_\xi(\eta)$ (см. (4) в качестве параметра присутствует условное среднеквадратическое отклонение $\sigma_\eta(\xi)$. Займемся его получением. Вначале найдем среднее значение $\sigma_\eta(\xi)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\eta - m_\eta(\xi))^2 f(\xi, \eta) d\eta d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (\eta - m_\eta(\xi))^2 f_\xi(\eta) d\eta \right\} f(\xi) d\xi =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{\eta}(\xi) f(\xi) d\xi = \overline{\sigma_{\eta}(\xi)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\eta - m_{\eta} - r_{\xi\eta} \frac{\sigma_{\eta}}{\sigma_{\xi}} (\xi - m_{\xi}))^2 f(\xi, \eta) d\eta d\xi = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\eta - m_{\eta})^2 f(\xi, \eta) d\eta d\xi - 2r_{\xi\eta} \frac{\sigma_{\eta}}{\sigma_{\xi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\eta - m_{\eta})(\xi - m_{\xi}) f(\xi, \eta) d\eta d\xi + \\
&+ r_{\xi\eta}^2 \frac{\sigma_{\eta}^2}{\sigma_{\xi}^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - m_{\xi})^2 f(\xi, \eta) d\eta d\xi = \sigma_{\eta}^2 - 2r_{\xi\eta} \frac{\sigma_{\eta}}{\sigma_{\xi}} r_{\xi\eta} \sigma_{\eta} \sigma_{\xi} + r_{\xi\eta}^2 \frac{\sigma_{\eta}^2}{\sigma_{\xi}^2} \sigma_{\xi}^2 = \\
&= \sigma_{\eta}^2 (1 - r_{\xi\eta}^2) = \overline{\sigma_{\eta}(\xi)}. \tag{16.8}
\end{aligned}$$

При получении (16.8) использовано (16.6) и учтено (16.7).

Правая часть (16.6) обеспечивает минимальный среднеквадратический разброс данных выборки объема n двумерной случайной величины $\{\Xi, I\}$ вокруг регрессионной прямой корреляционной зависимости

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\eta_i - m_{\eta}(\xi_i))^2 = \sigma_{\eta}^2 (1 - r_{\xi\eta}^2). \tag{16.9}$$

Поскольку в рассматриваемом случае (нормальный закон на плоскости) условное математическое ожидание является прямой по сути, ее наклон (задаваемый всего двумя принадлежащими ей точками), а значит и $r_{\xi\eta}$ (см. (16.6) не изменятся при выбрасывании из выборки всех точек с любым конкретным значением координаты ξ . Согласно (16.9) это означает, что среднеквадратическое значение минимального разброса остается одинаковым при учете произвольного количества (не меньше двух) возможных значений ξ . То есть средний разброс совпадает с мгновенным (при данном ξ). Иными словами, в рассматриваемом случае условное среднеквадратическое отклонение $\sigma_{\eta}(\xi)$ не зависит от ξ :

$$\sigma_{\eta}^2(\xi) = \sigma_{\eta}^2 (1 - r_{\xi\eta}^2). \tag{16.10}$$

Подставив (16.6) и (16.10) в (16.4), плотность вероятности системы двух зависимых нормально распределенных случайных величин запишем в виде

$$\begin{aligned}
f(\xi, \eta) &= \frac{1}{2\pi\sigma_\xi\sigma_\eta\sqrt{1-r_{\xi\eta}^2}} e^{-\frac{(\xi-m_\xi)^2}{2\sigma_\xi^2}} \cdot e^{-\frac{\left(\eta-m_\eta-r_{\xi\eta}\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}(\xi-m_\xi)\right)^2}{2\sigma_\eta^2(1-r_{\xi\eta}^2)}} = \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_\xi\sigma_\eta\sqrt{1-r_{\xi\eta}^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r_{\xi\eta}^2)}\left(\frac{(\xi-m_\xi)^2}{\sigma_\xi^2}-2r_{\xi\eta}\frac{(\xi-m_\xi)(\eta-m_\eta)}{\sigma_\xi\sigma_\eta}+\frac{(\eta-m_\eta)^2}{\sigma_\eta^2}\right)}. \quad (16.11)
\end{aligned}$$

В соответствии с вышеизложенным в рассматриваемом случае зависимость случайных величин может быть только корреляционной и только линейной. Поэтому при ее отсутствии ($r_{\xi\eta} = 0$) из (16.11) следует, что плотность вероятности двумерной случайной величины равна произведению дифференциальных функций распределения ее составляющих (см. (16.1)).

В частности, при $\sigma_x = \sigma_y$ эллипсы линий уровня плотности вероятности (см. рисунок 16.1) становятся окружностями. Касательные к ним перпендикулярны радиусам, то есть прямая $m_\eta(\xi)$ при любом угле поворота φ остается параллельной оси ξ . Отсутствие наклона означает (см. (16.6)), что $r_{\xi\eta} = 0$, то есть нормально распределенные величины с одинаковыми среднеквадратическими отклонениями всегда независимы.

17. ЭКСТРЕМАЛЬНОСТЬ ЭНТРОПИИ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА МОЛЕКУЛ ГАЗА ПО СКОРОСТЯМ

Многие существенные закономерности процессов молекулярной природы являются простыми следствиями известных результатов теории вероятностей, и по этой причине для их установления не требуется знать микротерию явления. Для иллюстрации последнего утверждения получим таким способом распределение Максвелла молекул по скоростям их броуновского движения, возникающего в молекулярно-кинетической теории идеального газа [27].

Будучи квантовыми объектами, молекулы газа в результате многочисленных столкновений «забывают» о начальных условиях своего движения. Это максимально затрудняет прогноз результата измерения скорости любой из них. Иными словами, закон распределения молекул по скоростям должен обеспечивать экстремальность энтропии. Областью возможных значений декартовых координат скорости теплового движения молекулы $v_i (i = 1, 2, 3)$

является вся числовая ось. На ней максимальной энтропией обладает нормальное распределение плотности вероятности

$$f(v_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{v_i^2}{2\sigma^2}}, \quad (17.1)$$

где σ – среднеквадратическое отклонение, одинаковое для всех i , ибо газ изотропен. Математическое ожидание в (17.1) равно нулю, так как сосуд с газом покоится.

Изотропия газа означает отсутствие корреляционной (а для нормального закона и любой другой) зависимости между v_1, v_2, v_3 . Дифференциальная функция распределения системы независимых случайных величин получается умножением плотностей вероятностей (17.1) ее составляющих:

$$f(v_1, v_2, v_3) = f(v_1)f(v_2)f(v_3) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma})^3} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}, \quad (17.2)$$

где

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \quad (17.3)$$

является величиной скорости.

Поскольку от направления скорости правая часть (17.2) не зависит, для получения закона распределения v перейдем в условии нормировки для $f(v_1, v_2, v_3)$ к сферической системе координат. Выполнив элементарные интегрирования по полярному и азимутальному углам, получим

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v_1, v_2, v_3) dv_1 dv_2 dv_3 = \int_0^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma})^3} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} 4\pi v^2 dv, \quad (17.4)$$

где $4\pi v^2 dv$ – объем в пространстве скоростей сферического слоя радиуса v и толщины dv .

По смыслу условия нормировки подынтегральная функция в правой части формулы (17.4) является плотностью вероятности модуля скорости молекул газа

$$f(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{v^2}{\sigma^3} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}. \quad (17.5)$$

Зависимость (17.5) совпадает с известным распределением Максвелла молекул газа по скоростям их теплового движения. После получения правой части (17.5) молекулярно-кинетические рассуждения необходимы лишь для связи параметра σ с абсолютной температурой газа T и его молярной массой μ .

Согласно формуле (11.11) в [27]

$$\bar{v} = \sqrt{8RT/\pi\mu}, \quad (17.6)$$

где R – универсальная газовая постоянная;

\bar{v} – математическое ожидание модуля скорости:

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \int_0^{\infty} v f(v) dv = \int_0^{\infty} v \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{v^2}{\sigma^3} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} dv = \\ &= \left| x = \frac{v^2}{2\sigma^2} \right| = \sigma \sqrt{\frac{8}{\pi}} \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = \sigma \sqrt{\frac{8}{\pi}}. \end{aligned} \quad (17.7)$$

Из (17.6), (17.7) следует, что

$$\sigma = \sqrt{RT/\mu} = \sqrt{KT/m}, \quad (17.8)$$

где K – постоянная Больцмана, m – масса молекулы.

После подстановки правой части (17.8) в (17.5) получим распределение Максвелла в том виде, в каком оно приведено в учебниках (например, формула (11.8) в [27]):

$$f(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m}{kT} \right)^3 v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}. \quad (17.9)$$

18. ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ [28]

Уравнения математической физики, описывающие явления переноса, получаются на основе рассуждений, учитывающих молекулярную природу моделируемых процессов. Однако распространенные способы их решения эту природу игнорируют и сводятся к реализации абстрактного математического формализма (метода разделения переменных Фурье, изображений и т.п.). Такой подход существенно обедняет арсенал средств поиска и исследования решений, не позволяет применить аппарат, адекватный задаче.

Проиллюстрируем изложенное на примере уравнения диффузии. Ограничившись для простоты одномерным случаем, запишем последнее в виде

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2}, \quad (18.1)$$

где $n(x,t)$ – объемная концентрация переносимой субстанции (примеси);
 t – время;
 x – координата;
 D – коэффициент диффузии.

При наличии начального условия

$$n(x,0) = n_0(x), \quad (18.2)$$

существует единственное решение задачи (18.1), (18.2) [29], которое позволяет достоверно предсказать значение концентрации $n(x,t)$ в любом месте в любой момент времени. Однако, несмотря на такой детерминизм, координаты отдельных молекул примеси являются случайными величинами, закон распределения которых эволюционирует во времени. Изложенное позволяет, соответствующим образом нормировав $n(x,t)$, ввести дифференциальную функцию распределения координаты частицы примеси

$$f(x,t) = \frac{n(x,t)S}{N}, \quad (18.3)$$

где

$$N = S \int_{-\infty}^{\infty} n(x,t) dx, \quad (18.4)$$

равно общему числу молекул примеси, диффундирующих в тонкой трубке параллельной оси OX с площадью поперечного сечения S .

Введенная вместо $n(x,t)$ новая неизвестная функция $f(x,t)$ вероятностно характеризует положение в момент времени t каждой отдельной молекулы примеси. И только их огромное (сравнимое с числом Авогадро) количество в соответствии с законом больших чисел приводит к достоверному прогнозу эволюции $n(x,t)$, что находит свое формальное отражение в справедливости теорем существования и единственности решения задачи (18.1), (18.2).

Интерпретация диффузии как случайного процесса позволяет подключить к ее моделированию дополнительный мощный ресурс в виде основных

теорем теории вероятностей, математической статистики и теории информации. В частности, асимптотика $f(x,t)$ и поправки к ней могут быть установлены с помощью начальных и центральных моментов случайной координаты отдельной молекулы примеси. Найти моменты можно используя (но не решая) уравнение (18.1) и соотношения (18.2), (18.3).

Подставив (18.3) в (18.1), получим уравнение относительно плотности вероятности $f(x,t)$:

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}. \quad (18.5)$$

Вначале рассмотрим задачу о расплзании однородного концентрационного пятна шириной l :

$$f(x,0) = \begin{cases} 1/l, & x \in [-l/2, l/2] \\ 0, & x \notin [-l/2, l/2] \end{cases}. \quad (18.6)$$

Зависимость (18.6) описывает равновесное состояние, ибо максимуму энтропии на отрезке отвечает равномерное распределение случайной величины (см. [24] или раздел 14). Поэтому использование (18.6) в качестве начального условия вполне естественно.

Для дальнейшего удобно перейти к обезразмеренным времени τ и координате ξ :

$$\tau = Dt/l^2, \quad \xi = x/l. \quad (18.7)$$

В новых переменных соотношения (18.5), (18.6) соответственно примут вид

$$\frac{\partial f(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 f(\xi, \tau)}{\partial \xi^2}, \quad (18.8)$$

$$f(\xi, 0) = \begin{cases} 1, & \xi \in [-1/2, 1/2] \\ 0, & \xi \notin [-1/2, 1/2] \end{cases}. \quad (18.9)$$

Со старой плотностью вероятности $f(x,t)$ новая $f(\xi, \tau)$ связана вытекающим из условия нормировки

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \tau) d\xi = \left| \begin{array}{l} \xi(x) = x/l \\ d\xi = l^{-1} dx \end{array} \right| = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi(x), \tau) \cdot l^{-1} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dx$$

соотношением

$$f(x, t) = f(\xi(x), \tau(t)) \cdot l^{-1}. \quad (18.10)$$

Согласно [39] вся информация о плотности вероятности $f(\xi, \tau)$ содержится в начальных $v_n(\tau)$ или центральных $\mu_n(\tau)$ моментах обезразмеренной координаты ξ отдельной частицы примеси. В силу симметрии задачи (18.8), (18.9) имеют место равенства

$$v_{2n+1}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^{2n+1} f(\xi, \tau) d\xi = 0 \quad (n=0,1,\dots),$$

то есть

$$\mu_n(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - v_1(\tau))^n f(\xi, \tau) d\xi = v_n(\tau) \quad (18.11)$$

Из условия нормировки

$$\mu_0(\tau) = 1, \quad (18.12)$$

а для остальных (четных) n дифференцированием (18.11) по τ с учетом (18.10) и при помощи (18.8) получим

$$\mu_{2n}(\tau)' = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^{2n} \frac{\partial f(\xi, \tau)}{\partial \tau} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^{2n} \frac{\partial^2 f(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} d\xi. \quad (18.13)$$

Очевидно, что при любых конечных временах $f(\pm\infty, \tau) \equiv 0$. С учетом этого обстоятельства дважды проинтегрируем правую часть (18.13) по частям

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\xi^{2n}}_U \underbrace{\frac{\partial^2 f(\xi, \tau)}{\partial \xi^2}}_{dV} d\xi &= \left| \begin{array}{l} dU = 2n\xi^{2n-1} d\xi \\ V = \frac{\partial f(\xi, \tau)}{\partial \xi} \end{array} \right| = \underbrace{\xi^{2n} \frac{\partial f(\xi, \tau)}{\partial \xi}}_{=0} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \\ -2n \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\xi^{2n-1}}_U \underbrace{\frac{\partial f(\xi, \tau)}{\partial \xi}}_{dV} d\xi &= \left| \begin{array}{l} dU = (2n-1)\xi^{2n-2} d\xi \\ V = f(\xi, \tau) \end{array} \right| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2n \left[\underbrace{\xi^{2n-1} f(\xi, \tau)}_{=0} \Big|_{-\infty}^{\infty} - (2n-1) \int_{-\infty}^{\infty} \xi^{2n-2} f(\xi, \tau) d\xi \right] = \\
&= 2n(2n-1) \mu_{2n-2}(\tau).
\end{aligned} \tag{18.14}$$

Из (18.13), (18.14) следует искомое соотношение для определения $\mu_{2n}(\tau)$:

$$\mu_{2n}'(\tau) = 2n(2n-1) \mu_{2n-2}(\tau). \tag{18.15}$$

С помощью (18.15) и условия нормировки (18.12) можно развить рекуррентную процедуру последовательного вычисления моментов любых четных порядков. В частности, для $n=1$ из (18.15) получим

$$\mu_2'(\tau) = 2(2-1) \mu_0(\tau) = 2, \tag{18.16}$$

откуда с учетом вытекающего из (18.9), (18.11) начального условия

$$\mu_{2n}(0) = \int_{-1/2}^{1/2} \xi^{2n} d\xi = \frac{1}{(2n+1)2^{2n}} \tag{18.17}$$

для $n=1$ следует

$$\mu_2(\tau) = 2\tau + 1/12 = \sigma^2(\tau), \tag{18.18}$$

где $\sigma(\tau)$ – среднеквадратическое отклонение обезразмеренной координаты молекулы примеси ξ .

Аналогично для $n=2$ из (18.15) получим с учетом (18.18)

$$\mu_4'(\tau) = 4(4-1) \mu_2(\tau) = 24\tau + 1. \tag{18.19}$$

Дополнив (18.19) вытекающим из (18.17) (для $n=2$) начальным условием

$$\mu_4(0) = \int_{-1/2}^{1/2} \xi^4 d\xi = \frac{1}{80}, \tag{18.20}$$

выполним интегрирование

$$\mu_4(\tau) = 12\tau^2 + \tau + 1/80. \tag{18.21}$$

Найденных моментов достаточно для определения асимптотики $f(\xi, \tau)$ при больших временах. С этой целью вычислим эксцесс случайной величины ξ

$$E(\tau) = \frac{\mu_4(\tau)}{\sigma^4(\tau)} - 3 = \frac{12\tau^2 + \tau + 1/80}{(2\tau + 1/12)^2} - 3 = -\frac{1}{120\sigma^4(\tau)} \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} 0. \quad (18.22)$$

Отсутствие эксцесса при больших временах означает, что в результате диффузионного перемешивания частицы примеси все дальше выходят за пределы отрезка $[-1/2, 1/2]$, и первоначальное распределение (18.9) постепенно эволюционирует в нормальное

$$f(\xi, \tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(\tau)}} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma(\tau)^2}} \equiv f_0(\xi, \tau), \quad (18.23)$$

обеспечивающее максимум энтропии в новых условиях (на всей числовой оси) (см. [24] или раздел 14).

Согласно (18.7) при $l \rightarrow 0$ обезразмеренные времена сразу ($\forall \tau \neq 0$) становятся бесконечными, а распределение нормальным (см. (18.7), (18.18), (18.23)):

$$f(\xi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{\xi^2}{4\tau}} \equiv \varphi(\xi, \tau). \quad (18.24)$$

Используем (18.24) для решения (18.8) в общем виде (без конкретизации начального распределения $f(\xi, 0)$). Рассмотрим участок $[\eta, \eta + d\eta]$ на числовой оси. В начальный момент молекула примеси принадлежит ему с вероятностью

$$dF(\eta, 0) = f(\eta, 0)d\eta. \quad (18.25)$$

В соответствии с изложенным из малости $d\eta$ следует, что при $t \neq 0$ эта вероятность распределится по числовой оси с плотностью (18.24) при математическом ожидании η . Воспользовавшись линейностью (18.8), просуммируем вклады в $f(\xi, \tau)$ отдельных участков числовой оси, для чего выполним интегрирование по η :

$$f(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\eta, 0)}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{(\xi-\eta)^2}{4\tau}} d\eta. \quad (18.26)$$

В том, что (18.26) обращает (18.8) в тождество, можно убедиться непосредственно, выполнив дифференцирование абсолютно сходящегося интеграла по параметрам ξ и τ :

$$\frac{\partial f(\xi, \tau)}{\partial \xi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\eta, 0)}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{(\xi-\eta)^2}{4\tau}} \left(-\frac{\xi-\eta}{2\tau} \right) d\eta,$$

$$\frac{\partial^2 f(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\eta, 0)}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{(\xi-\eta)^2}{4\tau}} \left[\frac{(\xi-\eta)^2}{4\tau^2} - \frac{1}{2\tau} \right] d\eta,$$

$$\frac{\partial f(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\eta, 0)}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{(\xi-\eta)^2}{4\tau}} \left[-\frac{1}{2\tau^{3/2}} + \frac{(\xi-\eta)^2}{4\tau^{5/2}} \right] d\eta.$$

Видно, что правые части двух последних формул тождественно совпадают.

В справедливости начального условия для $f(\xi, \tau)$, определяемой правой частью (8.26), можно убедиться, воспользовавшись известным представлением для δ -функции Дирака (см. [13; 15] или раздел 8):

$$\varphi(\xi, 0) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{\xi^2}{4\tau}} = \delta(\xi) \quad (18.27)$$

С учетом (18.27)

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\eta, 0)}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{(\xi-\eta)^2}{4\tau}} d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta, 0) \delta(\xi - \eta) d\eta = f(\xi, 0),$$

как это и должно быть.

С помощью (18.7) и (18.10) вернемся в (18.26) к обычным времени и координате

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y, 0)}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4Dt}} dy, \quad (18.28)$$

где $y = l\eta$.

Решение (18.28) с точностью до замены $z = y - x$ совпадает с полученным в [29] методом Фурье. Формально такая замена ничего не меняет,

но вуалирует теоретико-вероятностный смысл подынтегрального выражения. Заметим также, что фигурирующую в (18.28) функцию

$$\varphi(x-y, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4Dt}} \quad (18.29)$$

можно трактовать (см., например, (77) в [31]) как переходную плотность вероятности, переводящую $f(\xi, \tau)$ из начального в текущий момент времени. Там же (последняя формула на с. 165 в [31]) для переходной плотности получено идентичное (18.28) выражение, однако в рамках совершенно иной идеологии.

Вернемся теперь к начальному условию (18.9). С его учетом из (18.26) следует

$$f(\xi, \tau) = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{(\xi-\eta)^2}{4\tau}} d\eta = \Phi(\xi+1/2, \tau) - \Phi(\xi-1/2, \tau), \quad (18.30)$$

где

$$\Phi(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\xi} \varphi(\zeta, \tau) d\zeta \quad (18.31)$$

является интегральной функцией распределения, отвечающей нормальному закону (18.24). Действительно, согласно (18.31), (18.24)

$$\Phi(\xi+1/2, \tau) = \int_{-\infty}^{\xi+1/2} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{\zeta^2}{4\tau}} d\zeta = \left| \begin{array}{l} \zeta = \eta - \xi \\ d\zeta = d\eta \end{array} \right| = \int_{-\infty}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{(\xi-\eta)^2}{4\tau}} d\eta.$$

Аналогично

$$\Phi(\xi-1/2, \tau) = \int_{-\infty}^{-1/2} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{(\xi-\eta)^2}{4\tau}} d\eta,$$

поэтому с учетом аддитивности интеграла

$$\Phi(\xi+1/2, \tau) - \Phi(\xi-1/2, \tau) = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{(\xi-\eta)^2}{4\tau}} d\eta$$

(см. (18.30)).

Определим погрешность при замене (18.30) асимптотическим выражением (18.23). Осуществим в (18.30) разложение по степеням $1/2$:

$$\Phi(\xi \pm 1/2, \tau) = \Phi(\xi, \tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^n \Phi(\xi, \tau) / \partial \xi^n}{n!} \left(\pm \frac{1}{2} \right)^n.$$

Приняв во внимание, что согласно (18.31)

$$\partial^n \Phi(\xi, \tau) / \partial \xi^n = \partial^{n-1} \varphi(\xi, \tau) / \partial \xi^{n-1},$$

получим

$$\begin{aligned} & \Phi(\xi \pm 1/2, \tau) - \Phi(\xi, \tau) = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^n \Phi(\xi, \tau) / \partial \xi^n}{n!} \left(\pm \frac{1}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^n \varphi(\xi, \tau) / \partial \xi^n}{(n+1)! (\pm 2)^{n+1}}. \end{aligned} \quad (18.32)$$

Подставим (18.32) в правую часть (18.30). При этом $\Phi(\xi, \tau)$ и слагаемые с нечетными n сократятся, а с четными – удвоятся:

$$\begin{aligned} & f(\xi, \tau) - \varphi(\xi, \tau) = \\ & = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1/2)^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{\partial^{2n} \varphi(\xi, \tau)}{\partial \xi^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1/2)^{2n}}{(2n+1)!} \frac{\partial^{2n} \varphi(\xi, \tau)}{\partial \xi^{2n}}. \end{aligned} \quad (18.33)$$

В качестве нулевого приближения в (18.33) при определении поправок к асимптотическому выражению следует выделить функцию $f_0(\xi, \tau)$, определяемую равенствами (18.23), (18.18). Отклонение

$$\Delta(\xi, \tau) = f(\xi, \tau) - f_0(\xi, \tau) \quad (18.34)$$

в силу симметрии задачи – четная функция ξ , т.е. экстремальная при $\xi = 0$ (рисунок 18.1). Видно, что экстремум абсолютный, т.е. значение $\Delta(0, \tau)$ может быть использовано для оценки погрешности при замене $f(\xi, \tau)$ асимптотическим выражением $f_0(\xi, \tau)$. Вычислив несколько фигурирующих в (18.33) производных и положив $\xi = 0$, получим

$$f(0, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \left[1 + \frac{(1/2)^2}{3!} \left(-\frac{1}{2\tau} \right) + \frac{(1/2)^4}{5!} \frac{3}{(2\tau)^2} - \dots \right]. \quad (18.35)$$

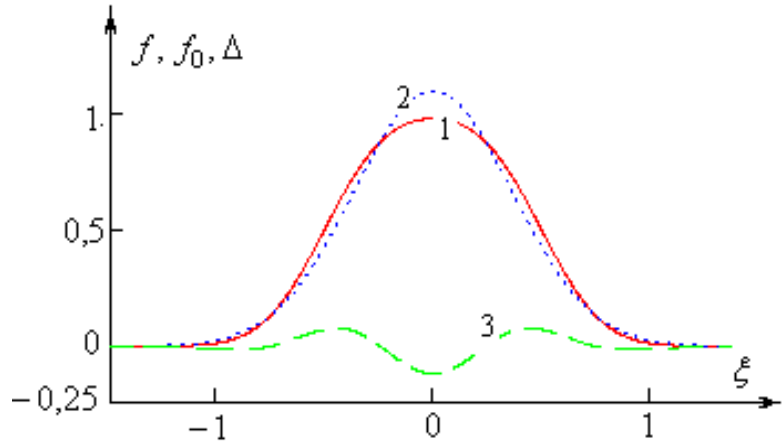


Рисунок 18.1. – Плотность вероятности f (кривая 1), ее асимптотика f_0 (кривая 2) и отклонение Δ (кривая 3) как функции координаты ξ при $\tau = 0,025$

Чтобы сравнить $f_0(0, \tau)$ с правой частью (18.35), положим в (18.23) $\xi = 0$ и выполним разложение по степеням τ^{-1} :

$$\begin{aligned}
 f_0(0, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(2\tau + 1/12)}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \left(1 + \frac{1}{24\tau}\right)^{-\frac{1}{2}} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{24\tau} + \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{24\tau}\right)^2 - \dots\right]. \quad (18.36)
 \end{aligned}$$

И, наконец, вычтя нулевое приближение (18.36) из точного выражения (18.35), получим, пренебрегая высшими порядками по τ^{-1} , относительную погрешность, вносимую при замене $f(\xi, \tau)$ нормальным законом (18.23),

$$\frac{f(0, \tau) - f_0(0, \tau)}{f(0, \tau)} \approx -\frac{1}{960} \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 = \frac{1}{8} E(\tau), \quad (18.37)$$

где последнее равенство записано для больших τ с учетом (18.18), (18.22). Согласно (18.37) большими могут считаться времена

$$\tau \geq \frac{1}{20} \equiv \tau^*, \quad (18.38)$$

что обеспечивает малость относительной погрешности при замене $f(\xi, \tau)$ нормальным законом (18.18), (18.23). Рисунок 2 иллюстрирует, как равномерное распределение на отрезке по мере осуществления (18.38) трансформируется в нормальное на всей числовой оси. Интересно, что моменту τ^* отвечает примерно двукратное увеличение дисперсии (см. (18.18) и рисунок 18.2).

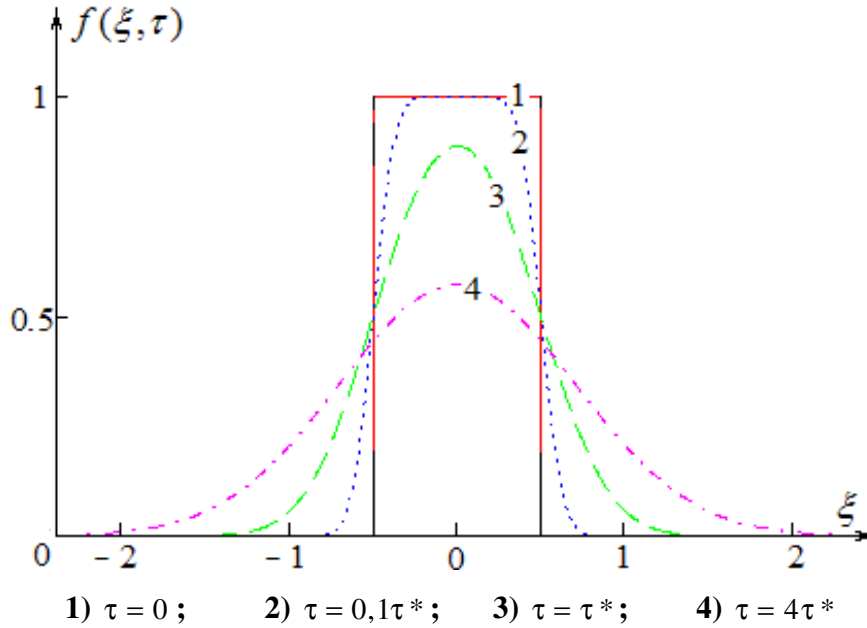


Рисунок 18.2. – Диффузионное «расползание» однородного концентрационного пятна

19. ВКЛАД ЭКСЦЕССОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ В ДИФФУЗИОННОЕ РАЗМЫВАНИЕ ОДНОРОДНОГО КОНЦЕНТРАЦИОННОГО ПЯТНА [32]

В предыдущем разделе методами теории вероятностей получено точное решение уравнения диффузии при произвольных начальных условиях и выделена асимптотика плотности вероятности $f(\xi, \tau)$ обезразмеренной координаты $\xi = x/l$ молекулы примеси при диффузионном расползании однородного концентрационного пятна шириной l с центром в начале координат:

$$f(\xi, \tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(\tau)}} \exp\left(-\xi^2/2\sigma(\tau)^2\right) \equiv f_0(\xi, \tau), \quad (19.1)$$

где

$$\sigma(\tau) = \sqrt{2\tau + 1/12} \quad (19.2)$$

представляет собой среднеквадратическое отклонение ξ , $\tau = Dt/l^2$ – обезразмеренное время t , в котором D – коэффициент диффузии.

Показано, что при больших временах ($\tau > 1/20$) главная часть

$$\Delta(\xi, \tau) = f(\xi, \tau) - f_0(\xi, \tau) \quad (19.3)$$

пропорциональна эксцессу четвертого (минимального) порядка и убывает как $\sigma(\tau)^{-4} f_0(\xi, \tau)$.

Учет эксцессов старших порядков

$$E_{2k}(\tau) = \frac{\mu_{2k}(\tau)}{\sigma(\tau)^{2k}} - \omega(k) \quad (k = 3, 4, \dots), \quad (19.4)$$

где

$$\mu_n(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - v_1(\tau))^n f(\xi, \tau) d\xi = v_n(\tau) \quad (19.5)$$

центральные моменты n -го порядка, в силу симметрии задачи ($v_1(\tau) = 0$) равные начальным $v_n(\tau)$, а

$$\omega(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta^{2k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\zeta^2}{2}} d\zeta = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1) \quad (19.6)$$

(см. 14.17) приведет к вкладам в $\Delta(\xi, \tau)$ более высоких порядков по степеням $\sigma(\tau)^{-2}$:

$$\Delta(\xi, \tau) = f_0(\xi, \tau) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Phi_{2k}(\zeta(\xi, \tau))}{\sigma(\tau)^{2k}} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\xi, \tau), \quad (19.7)$$

где $f_k(\xi, \tau)$ – поправки порядка $\sigma(\tau)^{-2(k+1)}$ к асимптотике (19.1), а

$$\zeta(\xi, \tau) = \xi / \sigma(\tau) \quad (19.8)$$

является приведенной координатой, учитывающей эволюцию актуального диапазона ξ . Фигурирующие в (19.7) полиномы $\Phi_{2k}(\zeta)$ в силу симметрии задачи раскладываются по четным степеням ζ :

$$\Phi_{2k}(\zeta) = \sum_{i=0}^k C_{2k\ 2i} \zeta^{2i}. \quad (19.9)$$

Старшая степень равна порядку учитываемого эксцесса, ибо подбором коэффициентов $C_{2k\ 2i}$ необходимо обеспечить заданную зависимость от τ центральных моментов $\mu_{2k}(\tau)$ рассматриваемого (фигурирующего в (19.4) и предыдущих четных порядков. Подставив в определение (19.5) плотность вероятности, задаваемую равенствами (19.1), (19.3), (19.7)–(19.9), получим с учетом (19.6) разложение центральных моментов четных порядков по степеням $\mu_2(\tau)$:

$$\begin{aligned}
\mu_{2n}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \xi^{2n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(\tau)}} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2(\tau)}} \left\{ 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sigma^{2k}(\tau)} \sum_{i=0}^k C_{2k \ 2i} \left(\frac{\xi}{\sigma(\tau)} \right)^{2i} \right\} d\xi = \\
&= \left| \frac{\zeta = \xi/\sigma(\tau)}{d\zeta = d\xi/\sigma(\tau)} \right| = \sigma^{2n}(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \zeta^{2n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \left\{ 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sigma^{2k}(\tau)} \sum_{i=0}^k C_{2k \ 2i} \zeta^{2i} \right\} d\zeta = \\
&= \omega(n)\mu_2^n(\tau) + \sum_{k=2}^{\infty} \mu_2^{n-k}(\tau) \sum_{i=0}^k \omega(n+i)C_{2k \ 2i} \quad (n=0,1,\dots), \quad (19.10)
\end{aligned}$$

где $\omega(0) = 1$ по условию нормировки (см. (19.6)).

Согласно обоснованной в [28] (см. предыдущий раздел) рекуррентной процедуре

$$\mu_{2n}(\tau)' = 2n(2n-1)\mu_{2n-2}(\tau) \quad (19.11)$$

и условию нормировки ($\mu_0(\tau) = 1$ (см. (19.5)) $\mu_{2n}(\tau)$ есть полином n -й степени по τ , а значит и по $\mu_2(\tau) = 2\tau + 1/12 = \sigma^2(\tau)$ (см. (19.2)). По этой причине в (19.10) должна отсутствовать часть разложения, содержащая отрицательные степени $\mu_2(\tau)$. Последнее возможно, если для всех $k = 2, 3, \dots$ коэффициенты $C_{2k \ 2i}$ будут удовлетворять k линейным алгебраическим уравнениям

$$\sum_{i=0}^k \omega(n+i)C_{2k \ 2i} = 0 \quad (n=0,1,\dots,k-1). \quad (19.12)$$

С учетом (19.12) из (19.10) следует¹⁵

$$\mu_4(\tau) = \omega(2)\mu_2^2(\tau) + b(2), \quad (19.13)$$

$$\mu_{2n}(\tau) = \omega(n)\mu_2^n(\tau) + \sum_{k=2}^{n-1} \mu_2^{n-k}(\tau) \sum_{i=0}^k \omega(n+i)C_{2k \ 2i} + b(n) \quad (n=3,4,\dots), \quad (19.14)$$

где $b(n)$ – константа в разложении $\mu_{2n}(\tau)$ по степеням $\mu_2(\tau)$:

$$\sum_{i=0}^n \omega(n+i)C_{2n \ 2i} = b(n). \quad (19.15)$$

¹⁵ Случаи с $n=0$ и $n=1$ описывают тривиальные тождества (см. (19.5), (19.6)).

Заметим, что $b(n)$ не является функцией τ . Значит, все степени τ в (19.13), (19.14) (кроме нулевой) должны взаимно уничтожиться. Полагая в (19.13), (19.14) $\tau = 0$, с учетом однородного начального условия

$$\mu_{2n}(0) = \int_{-1/2}^{1/2} \xi^{2n} d\xi = \frac{1}{(2n+1)2^{2n}}, \quad (19.16)$$

а также (19.6), получим

$$b(2) = \mu_4(0) - \omega(2)\mu_2^2(0) = -1/120, \quad (19.17)$$

и

$$b(n) = \mu_{2n}(0) - \omega(n)\mu_2^n(0) - \sum_{k=2}^{n-1} \mu_2^{n-k}(0) \sum_{i=0}^k \omega(n+i)C_{2k \ 2i} \quad (n=3, 4, \dots). \quad (19.18)$$

Объединив (19.12), (19.15) в определенную систему $k+1$ линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $C_{2k \ 2i}$ ($i=0, 1, \dots, k$), получим

$$\begin{pmatrix} C_{2k \ 0} \\ \vdots \\ C_{2k \ 2k-2} \\ C_{2k \ 2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega(0) & \dots & \omega(k-1) & \omega(k) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \omega(k-1) & \dots & \omega(2k-2) & \omega(2k-1) \\ \omega(k) & \dots & \omega(2k-1) & \omega(2k) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(k) \end{pmatrix}. \quad (19.19)$$

Рекуррентная процедура (19.17)–(19.19) позволяет исключить интегрирование (19.11) и полностью формализовать получение поправок $f_n(\xi, \tau)$ к асимптотическому выражению $f_0(\xi, \tau)$. Подставив (19.17) в (19.19), определим $C_{4 \ 2i}$:

$$\begin{pmatrix} C_{40} \\ C_{42} \\ C_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 15 \\ 3 & 15 & 105 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/120 \end{pmatrix} = \frac{1}{96 \cdot 10} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1/3 \end{pmatrix}. \quad (19.20)$$

Возвратив (19.20) в правую часть (19.18), для $n=3$ получим с учетом (19.6), (19.16)

$$b(3) = \mu_6(0) - \omega(3)\mu_2(0)^3 - \mu_2(0) \sum_{i=0}^2 \omega(3+i)C_{4\ 2i} = 1/252,$$

что после подстановки в (19.19) дает

$$\begin{pmatrix} C_{60} \\ C_{62} \\ C_{64} \\ C_{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 15 \\ 1 & 3 & 15 & 105 \\ 3 & 15 & 105 & 945 \\ 15 & 105 & 945 & 10395 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/252 \end{pmatrix} = \frac{1}{96 \cdot 126} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3/3 \\ 1/15 \end{pmatrix} \quad (19.21)$$

Полученные результаты (см. (19.20), (19.21) позволяют заметить простую (биномиальную) закономерность и выразить коэффициенты $C_{2k\ 2i}$ полиномов $\varphi_{2k}(\zeta)$ (см. (19.9) через числа сочетаний C_k^i

$$C_{2k\ 2i} = \frac{b(k)(-1)^{k+i} C_k^i}{\rho(k)\omega(i)} \quad \begin{pmatrix} k = 2, 4, \dots \\ i = 0, 1, \dots, k \end{pmatrix}, \quad (19.22)$$

где

$$\rho(k) = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k. \quad (19.23)$$

В справедливости (19.22) можно убедиться непосредственно. В частности,

$$C_{4\ 0} = \frac{b(2)(-1)^{2+0} C_2^0}{\rho(2)\omega(0)} = \frac{1}{-120} \cdot \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{1} = \frac{-1}{96 \cdot 10},$$

$$C_{6\ 6} = \frac{b(3)(-1)^{3+3} C_6^6}{\rho(3)\omega(3)} = \frac{1}{252} \cdot \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{96 \cdot 126 \cdot 15},$$

как и должно быть (см. (19.20), (19.21).

Решение (19.22) позволяет исключить из описанной ранее рекуррентной процедуры (19.17)–(19.19) формулу (19.19). Подставив (19.22) в (19.18), получим рекуррентное соотношение для определения фигурирующих в (19.22) чисел $b(k)$:

$$b(n) = \mu_{2n}(0) - \omega(n)\mu_2(0)^n - \sum_{k=2}^{n-1} \mu_2(0)^{n-k} \frac{(-1)^k b(k)}{\rho(k)} \sum_{i=0}^k \omega(n+i) \frac{(-1)^i C_k^i}{\omega(i)}. \quad (19.24)$$

На первом шаге $n=3$, при этом справа в (19.24) возникает $b(2) = -1/120$ (см. (19.17)). Продолжая рекуррентные вычисления, с помощью (19.24) можно выразить любое $b(n)$ через все $b(k)$ ($k=2, \dots, n-1$), полученные на предыдущих шагах. Таким образом возникает последовательность

$$b(n) = (-1)^{n+1} / a(n), \quad (19.25)$$

знаменатели которой $a(2)=120$, $a(3)=252$, $a(4)=576$, $a(5)=1584$, ... рекуррентно связаны соотношением значительно более простым, чем (19.24):

$$a(n) = 2 \cdot (a(n-1) + 6^{n-2}) \quad (n=3, 4, \dots). \quad (19.26)$$

С помощью (19.25), (19.26), (19.22), (19.7)–(19.9), (19.1), (19.3) легко построить разложение $f(\xi, \tau)$ по обратным степеням $\sigma(\tau)$, учтя, таким образом, вклад в плотность вероятности эксцессов высших порядков.

Заметим, что попутно нами доказаны нетривиальные свойства чисел сочетаний

$$\sum_{i=0}^k \frac{\omega(l+i)}{\omega(i)} C_k^i (-1)^i = 0 \quad (l=0, 1, \dots, k-1), \quad (19.27)$$

$$\sum_{i=0}^k \frac{\omega(k+i)}{\omega(i)} C_k^i (-1)^i = (-1)^k \rho(k), \quad (19.28)$$

которые получаются подстановкой (19.22) в (19.12), (19.15).

В заключение обсудим вопрос о сходимости ряда (19.7) и выясним, какие времена могут считаться большими. Ограничимся $\xi=0$, где модуль $\Delta(\xi, \tau)$ максимален (рисунок 18.1 предыдущего раздела). В соответствии с признаком Даламбера, для сходимости достаточно неравенства $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{n+1}(0, \tau) / f_n(0, \tau) < 1$. Согласно (19.2), (19.7)–(19.9), (19.20) и (19.21)

$$\frac{f_2(0, \tau)}{f_1(0, \tau)} = \frac{C_{60}}{\sigma(\tau)^2 C_{40}} = \frac{10}{\sigma(\tau)^2 \cdot 126} = \frac{10 \cdot 12}{(24\tau + 1) \cdot 126} \leq 0,952.$$

Аналогично

$$\frac{f_3(0, \tau)}{f_2(0, \tau)} = \frac{C_{80}}{\sigma(\tau)^2 C_{60}}, \quad \frac{f_4(0, \tau)}{f_3(0, \tau)} = \frac{C_{100}}{\sigma(\tau)^2 C_{80}},$$

где согласно (19.22), (19.23)

$$C_{80} = \frac{b(4)(-1)^{4+0} C_4^0}{\rho(4)\omega(0)} = \frac{-1}{96 \cdot 2304}, \quad C_{100} = \frac{b(5)(-1)^{5+0} C_5^0}{\rho(5)\omega(0)} = \frac{-1}{96 \cdot 63360}.$$

Поэтому

$$\frac{f_3(0, \tau)}{f_2(0, \tau)} = \frac{126 \cdot 12}{(24\tau + 1) \cdot 2304} \leq 0,656, \quad \frac{f_4(0, \tau)}{f_3(0, \tau)} = \frac{2304 \cdot 12}{(24\tau + 1) \cdot 63360} \leq 0,436,$$

то есть, фигурирующее в достаточном условии отношение, будучи меньше единицы для любых $\tau \geq 0$, с ростом n монотонно убывает. Это позволяет предположить, что для $\xi = 0$ ряд (19.22) сходится даже при $\tau = 0$. Аналогично $|f_1(0, \tau)|/f_0(0, \tau) \ll 1$, когда (см. (19.1), (19.7), (19.20)) $\sigma(\tau)^4 = (2\tau + 1/12)^2 > 1/96$, т.е. большими могут считаться времена $\tau > 0,01$. Для них график $f_1(\xi, \tau)$ в определяемом правилом трех сигм ($\sigma(0,01) \approx 0,3$) актуальном диапазоне ξ хорошо вписывается в зависимость $\Delta(\xi, \tau)$ от обезразмеренной координаты (рисунок 19.1). При этом уже учет $f_2(\xi, \tau)$ обеспечивает построение $f(\xi, \tau)$ в актуальном диапазоне ξ с абсолютной погрешностью порядка 0,01 (рисунок 19.2).

Найденные с помощью (19.22)–(19.24) коэффициенты $\phi_8(\zeta)$, позволяют определить поправку третьего порядка $f_3(\xi, \tau)$ (см. (19.7) и в актуальном диапазоне ξ построить $f(\xi, \tau)$ с погрешностью $3 \cdot 10^{-3}$, что, в отличие от изображенного на рисунке 18.1 предыдущего раздела, уже неразличимо на глаз (рисунок 19.3).

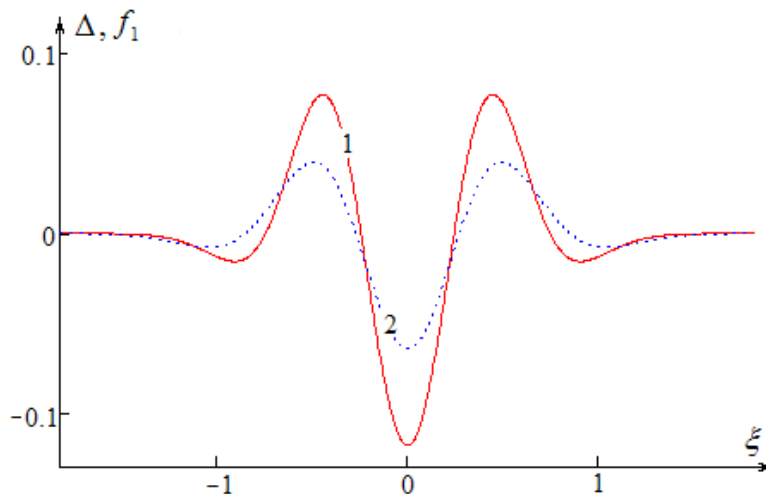


Рисунок 19.1. – Отклонение $f(\xi, \tau)$ от своего асимптотического выражения (кривая 1) и поправка порядка σ^{-4} (кривая 2) для $\tau = 0,025$

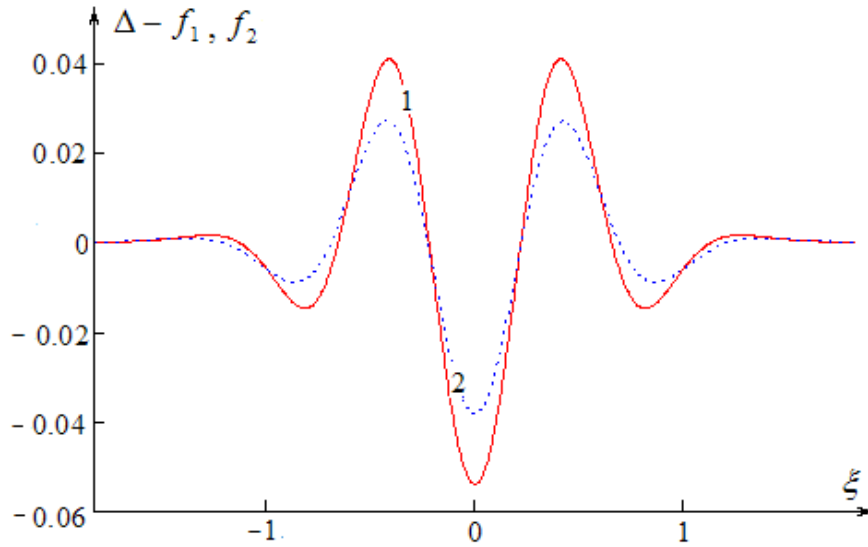


Рисунок 19.2. – Отклонение поправки порядка σ^{-6} (кривая 2) от погрешности первого приближения для $\tau = 0,025$

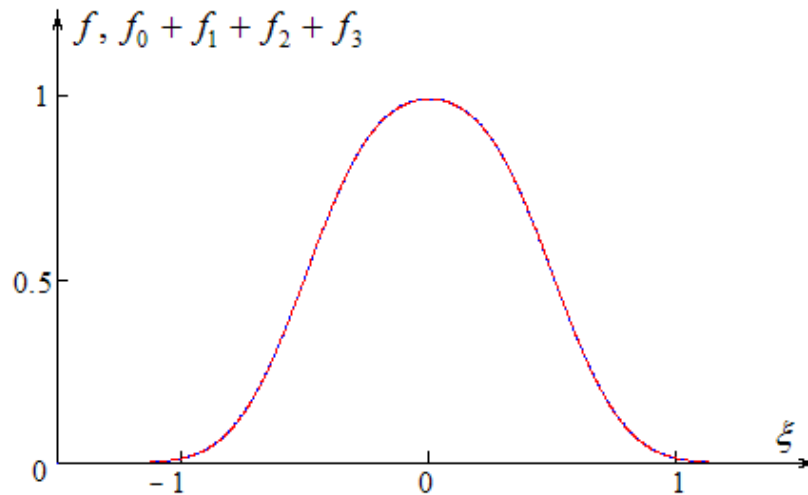


Рисунок 19.3. – Точная и приближенная зависимости плотности вероятности для $\tau = 0,025$

Таким образом, развита идеология решения уравнений математической физики, описывающих явления переноса. Рассмотрено диффузионное расползание однородного концентрационного пятна. С помощью уравнения диффузии получено рекуррентное соотношение для определения статистических моментов случайной координаты диффундирующей молекулы. Показано, что со временем формируется ее нормальное распределение. Погрешность при замене плотности вероятности координаты асимптотическим выражением представлена в виде суммы полиномиальных поправок, связанных с учетом эксцессов соответствующих порядков. При этом задача

математической физики сведена к системам линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов упомянутых полиномов. Коэффициенты полиномов пропорциональны числам сочетаний, деленным на произведения нечетных чисел, в которых число сомножителей определяется степенью приведенной координаты. Коэффициенты пропорциональности разных полиномов рекуррентно связаны, что позволяет пошагово учесть вклад в диффузионное расползание концентрационного пятна эксцессов произвольных порядков.

20. НЕЗАВИСИМЫЕ ПОВТОРНЫЕ ИСПЫТАНИЯ КАК АСИМПТОТИЧЕСКИ ГАУССОВСКИЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС [33]

Методом статистических моментов определим вклад асимметрий и эксцессов в отклонение распределения Бернулли от асимптотической формулы, фигурирующей в локальной теореме Лапласа. Покажем, что последнюю нельзя применять для вычисления вероятностей чисел успехов далеких от своих наиболее вероятных значений.

Вероятность m успехов в n независимых испытаниях определяется формулой Бернулли [23]

$$P(n, m) = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m}, \quad (20.1)$$

где C_n^m – числа сочетаний;

p – вероятность успеха в одном опыте.

Для больших n вычисление C_n^m становится проблемой. В частности, MathCAD не может работать с числами, превышающими 10^{307} . Чтобы обойти эту трудность, используют предельные теоремы Лапласа, которые, однако, не всегда обеспечивают требуемую точность и вовсе неприменимы для m , далеких от своих наиболее вероятных значений.

Вместе с тем, если n растет, схему Бернулли можно рассматривать как случайный процесс с дискретным временем. При этом эволюцию закона распределения m удобно исследовать методом моментов. Это позволяет не только выяснить асимптотику процесса, но и определить поправки к ней, обусловленные асимметриями и эксцессами закона распределения.

Как известно, вся информация о законе распределения m содержится в начальных моментах

$$v_k(n) = \sum_{m=0}^n m^k \cdot P(n, m) \quad (k=0, 1, \dots). \quad (20.2)$$

В частности,

$$v_1(n) = np, \quad \sigma(n)^2 = v_2(n) - v_1(n)^2 = np(1-p) \quad (20.3)$$

являются соответственно математическим ожиданием и дисперсией m .

Чтобы определить асимптотику процесса, исследуем асимметрию и эксцессы m произвольных порядков:

$$A_{2k-1}(n) = \frac{\mu_{2k-1}(n)}{\sigma(n)^{2k-1}}, \quad E_{2k}(n) = \frac{\mu_{2k}(n)}{\sigma(n)^{2k}} - \omega(k) \quad (k=2, 3, \dots), \quad (20.4)$$

где

$$\omega(k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1) \quad (20.5)$$

(см. формулу 14.17), а

$$\mu_k(n) = \sum_{m=0}^n (m - v_1(n))^k \cdot P(n, m) \quad (20.6)$$

представляют собой центральные моменты. Их удобно вычислять с помощью характеристической функции

$$\theta(\tau, n) = \sum_{m=0}^n e^{i\tau(m-np)} \cdot P(n, m) = \left(p e^{i\tau q} + q e^{-i\tau p} \right)^n, \quad (20.7)$$

$$\mu_k(n) = i^{-k} \theta^{(k)}(0, n), \quad (20.8)$$

где i – мнимая единица;

(k) – порядок производной по параметру τ .

Из (20.4)–(20.8) следует, что

$$A_{2k-1}(n, p) = \sum_{l=1}^{k-1} \frac{f_{2l-1, 2k-1}(p)}{\sigma(n)^{2l-1}}, \quad E_{2k}(n, p) = \sum_{l=1}^{k-1} \frac{f_{2l, 2k}(p)}{\sigma(n)^{2l}}, \quad (20.9)$$

где

$$f_{1,3}(p) = 1 - 2p, \quad f_{2,4}(p) = 6p^2 - 6p + 1, \quad f_{1,5}(p) = 10(1 - 2p), \quad \dots \quad (20.10)$$

независящие от n коэффициенты разложения. Согласно (20.3), (20.9) при $n \rightarrow \infty$ асимметрия и эксцесс исчезают, что характерно для гауссовского процесса

$$P_0(n, m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(n)}} e^{-\frac{x(n, m)^2}{2}}, \quad x(n, m) = \frac{m - np}{\sigma(n)}. \quad (20.11)$$

Выясним вклад в

$$\Delta(n, m) = P(n, m) - P_0(n, m) \quad (20.12)$$

асимметрий и эксцессов произвольных порядков. С учетом (20.9) запишем

$$\Delta(n, m) = P_0(n, m) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\Phi_l(x(n, m))}{\sigma(n)^l} = \Delta_1(n, m) + \Delta_2(n, m) + \dots, \quad (20.13)$$

где старшая степень полиномов

$$\Phi_{2l-1}(x) = \sum_{i=0}^l x^{2i+1} C_{2l-1, 2i+1}, \quad \Phi_{2l}(x) = \sum_{i=0}^{l+1} x^{2i} C_{2l, 2i} \quad (l=1, 2, \dots) \quad (20.14)$$

равна количеству линейно независимых уравнений, получаемых с помощью вытекающего из (20.6), (20.11)–(20.13) тождества

$$\frac{\mu_k(n)}{\sigma(n)^k} = \sum_{m=0}^n x(n, m)^k \cdot P_0(n, m) \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\Phi_l(x(n, m))}{\sigma(n)^l} \right) \quad (k=0, 1, \dots), \quad (20.15)$$

для вычисления фигурирующих в (20.14) коэффициентов $C_{l,i}$. При $n \rightarrow \infty$ сумма по m в (20.15) становится интегральной:

$$\Delta x(n, m) = x(n, m+1) - x(n, m) = \sigma(n)^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

$$x(n, 0) = -\sqrt{np/q} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty \quad x(n, n) = \sqrt{nq/p} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty,$$

поэтому

$$\frac{\mu_k(n)}{\sigma(n)^k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\Phi_l(x)}{\sigma(n)^l} \right) dx. \quad (20.16)$$

Уравнения относительно $C_{l,i}$ получаются приравниванием в (20.16) выражений при одинаковых степенях $\sigma(n)$. Поскольку интеграл от нечетной функции в симметричных пределах равен нулю, четные и нечетные k будем рассматривать отдельно:

$$\frac{\mu_{2k+1}(n)}{\sigma(n)^{2k+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\Phi_{2l-1}(x)}{\sigma(n)^{2l-1}} dx, \quad (20.17)$$

$$\frac{\mu_{2k}(n)}{\sigma(n)^{2k}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varphi_{2l}(x)}{\sigma(n)^{2l}} \right) dx. \quad (20.18)$$

Из (20.17) с учетом (20.5), (20.14) следует

$$\frac{\mu_{2k+1}(n)}{\sigma(n)^{2k+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma^{2l-1}} \sum_{i=0}^l C_{2l-1,2i+1} \omega(k+i+1), \quad (20.19)$$

откуда для $k=0$ с учетом вытекающего из (20.2), (20.6) тождества $\mu_1(n) \equiv 0$ получим

$$\sum_{i=0}^l C_{2l-1,2i+1} \omega(i+1) = 0 \quad (l=1, 2, \dots). \quad (20.20)$$

Для остальных k с помощью (20.4), (20.9) преобразуем левую часть (20.19):

$$\sum_{l=1}^k \frac{f_{2l-1,2k+1}(p)}{\sigma^{2l-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma^{2l-1}} \sum_{i=0}^l C_{2l-1,2i+1} \omega(k+i+1) \quad (k=1, 2, \dots). \quad (20.21)$$

Пусть в (20.21) $k=1$, тогда

$$\sum_{i=0}^1 C_{1,2i+1} \omega(i+2) = f_{13}(p), \quad \sum_{i=0}^l C_{2l-1,2i+1} \omega(i+2) = 0 \quad (l=2, 3, \dots). \quad (20.22)$$

Аналогично для $k=2$ из (20.21) следует

$$\sum_{i=0}^1 C_{1,2i+1} \omega(i+3) = f_{15}(p), \quad \sum_{i=0}^2 C_{3,2i+1} \omega(i+3) = f_{35}(p), \quad (20.23)$$

$$\sum_{i=0}^l C_{2l-1,2i+1} \omega(i+3) = 0 \quad (l=3, 4, \dots).$$

Действуя так и далее, можно записать уравнения для определения коэффициентов любого нечетного полинома. В частности, объединив первые уравнения (20.20), (20.22) в систему, найдем

$$\left. \begin{array}{l} C_{11} + 3C_{13} = 0 \\ 3C_{11} + 15C_{13} = f_{13}(p) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{13} \end{pmatrix} = \frac{f_{13}(p)}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1/3 \end{pmatrix}. \quad (20.24)$$

Согласно (20.10) первое уравнение (20.23) удовлетворяется теми же значениями коэффициентов

$$15C_{11} + 105C_{13} = \frac{f_{13}(p)}{2} \left(15 \cdot (-1) + 105 \cdot \frac{1}{3} \right) = 10f_{13}(p) \equiv f_{15}(p),$$

то есть является линейно зависимым с фигурирующими в (20.24). Так же можно убедиться в линейной зависимости вытекающих из (20.16) уравнений относительно коэффициентов $\varphi_l(x)$, если количество этих уравнений больше числа коэффициентов в (20.14). Значит, (20.14) правильно определяет старшие степени полиномов в разложении (20.13).

Для определения $\varphi_3(x)$ положим в (20.20), (20.22) $l=2$ и дополним полученную систему вторым уравнением (20.23)

$$\left. \begin{aligned} C_{31} + 3C_{33} + 15C_{35} &= 0 \\ 3C_{31} + 15C_{33} + 105C_{35} &= 0 \\ 15C_{31} + 105C_{33} + 945C_{35} &= f_{35}(p) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} C_{31} \\ C_{33} \\ C_{35} \end{pmatrix} = \frac{f_{35}(p)}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ -2/3 \\ 1/15 \end{pmatrix}. \quad (20.25)$$

Решения (20.24), (20.25) позволяют заметить общую закономерность

$$C_{2l-1,2i+1} = \frac{f_{2l-1,2l+1}(p)}{\rho(l)} \cdot \frac{(-1)^{i+l} C_l^i}{\omega(i+1)}, \quad \begin{pmatrix} l=1, 2, \dots \\ i=0, 1, \dots, l \end{pmatrix} \quad (20.26)$$

где

$$\rho(l) = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2l \quad - \quad (20.27)$$

произведения четных чисел, C_l^i – числа сочетаний.

Аналогично рассмотрим в (20.16) четные k . Из (20.18) с учетом (20.5), (20.14) следует

$$\frac{\mu_{2k}(n)}{\sigma(n)^{2k}} - \omega(k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma^{2l}} \sum_{i=0}^{l+1} C_{2l,2i} \omega(k+i). \quad (20.28)$$

Полагая в (20.28) $k=0$ и $k=1$, с учетом тождеств $\mu_0(n) \equiv 1$, $\mu_2(n) \equiv \sigma(n)^2$ и равенств $\omega(0) = 1 = \omega(1)$ (см. (20.5) получим

$$\sum_{i=0}^{l+1} C_{2l,2i} \omega(i) = 0, \quad \sum_{i=0}^{l+1} C_{2l,2i} \omega(i+1) = 0 \quad (l=1, 2, \dots). \quad (20.29)$$

Для остальных k с помощью (20.4), (20.5), (20.9) преобразуем левую часть (20.28):

$$\sum_{l=1}^{k-1} \frac{f_{2l,2k}(p)}{\sigma^{2l}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma^{2l}} \sum_{i=0}^{l+1} C_{2l,2i} \omega(k+i) \quad (k=2, 3, \dots). \quad (20.30)$$

Пусть в (20.30) $k=2$, тогда

$$\sum_{i=0}^2 C_{2,2i} \omega(i+2) = f_{2,4}(p), \quad \sum_{i=0}^{l+1} C_{2l,2i} \omega(i+2) = 0 \quad (l=2, 3, \dots). \quad (20.31)$$

Аналогично для $k=3$ из (20.30) следует

$$\sum_{i=0}^2 C_{2,2i} \omega(i+3) = f_{2,6}(p), \quad \sum_{i=0}^3 C_{4,2i} \omega(i+3) = f_{4,6}(p), \quad (20.32)$$

$$\sum_{i=0}^{l+1} C_{2l,2i} \omega(i+3) = 0 \quad (l=3, 4, \dots). \quad (20.33)$$

Полагая в (20.29) $l=1$, дополним полученную систему первым уравнением (20.31)

$$\left. \begin{array}{l} C_{20} + C_{22} + 3C_{24} = 0 \\ C_{20} + 3C_{22} + 15C_{24} = 0 \\ 3C_{20} + 15C_{22} + 105C_{24} = f_{24}(p) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} C_{20} \\ C_{22} \\ C_{24} \end{pmatrix} = \frac{f_{24}(p)}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1/3 \end{pmatrix}. \quad (20.34)$$

Для получения $\Phi_4(x)$ положим в (20.29), (20.31) $l=2$ и дополним полученную систему вторым уравнением (20.32):

$$\left. \begin{array}{l} C_{40} + C_{42} + 3C_{44} + 15C_{46} = 0 \\ C_{40} + 3C_{42} + 15C_{44} + 105C_{46} = 0 \\ 3C_{40} + 15C_{42} + 105C_{44} + 945C_{46} = 0 \\ 15C_{40} + 105C_{42} + 945C_{44} + 945 \cdot 11C_{46} = f_{46}(p) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} C_{40} \\ C_{42} \\ C_{44} \\ C_{46} \end{pmatrix} = \frac{f_{46}(p)}{48} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 1/15 \end{pmatrix}. \quad (20.35)$$

Полученные решения позволяют заметить общую закономерность для четных полиномов

$$C_{2l,2i} = \frac{f_{2l,2(l+1)}(p)}{\rho(l+1)} \cdot \frac{(-1)^{i+l+1} C_{l+1}^i}{\omega(i)}, \quad \begin{pmatrix} l=1, 2, \dots \\ i=0, 1, \dots, l+1. \end{pmatrix} \quad (20.36)$$

Таким образом, формулы (20.3), (20.11)–(20.14), (20.26), (20.27), (20.36) позволяют заменить трудно вычисляемое при больших n выражение для вероятности m успехов в схеме Бернулли. Результаты выполненных по ним расчетов в графической форме представлены на рисунке 20.1. Видно, что даже для $n = 5$ ошибка нулевого приближения (рисунок 20.1, а) практически полностью исчезает (рисунок 20.1, б) при учете асимметрии и эксцесса минимальных порядков ($P_2(n, m) = P_0(n, m) + \Delta_1(n, m) + \Delta_2(n, m)$, см. (20.12), (20.13).

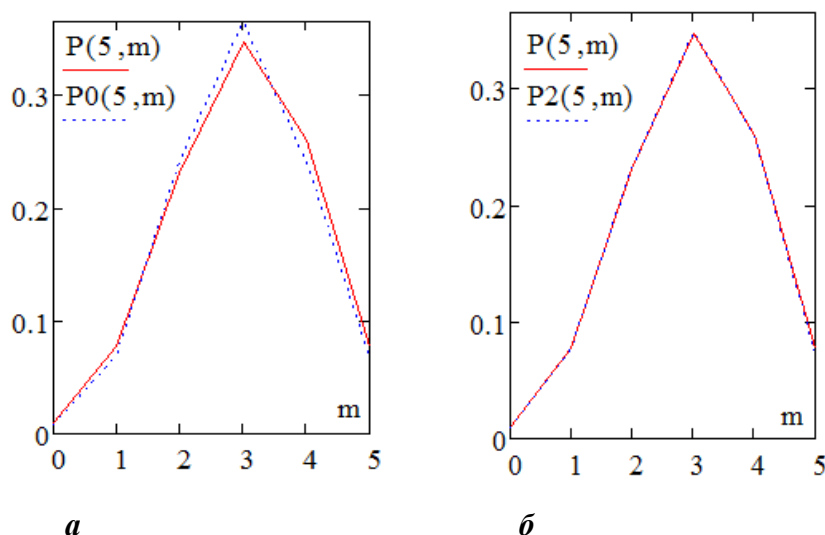


Рисунок 20.1. – Влияние асимметрии и эксцесса минимальных порядков на вероятность m успехов в 5 опытах схемы Бернулли с $p = 0,6$

В частности, если интересоваться максимальной вероятностью числа успехов ($x(n, m) = 0$), как функцией числа опытов, на основании (20.10)–(20.14), (20.34) в том же приближении получим

$$P(n, np) \approx P_2(n, np) = P_0(n, np) + \Delta_2(n, np) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(n)}} \left(1 + \frac{6p^2 - 6p + 1}{8\sigma(n)} \right).$$

Соответствующие зависимости в графической форме представлены на рисунке 20.2. Видно, что ошибка нулевого приближения заметна и для $n = 20$, но при учете эксцесса минимального порядка становится визуально неопределимой уже для $n = 5$.

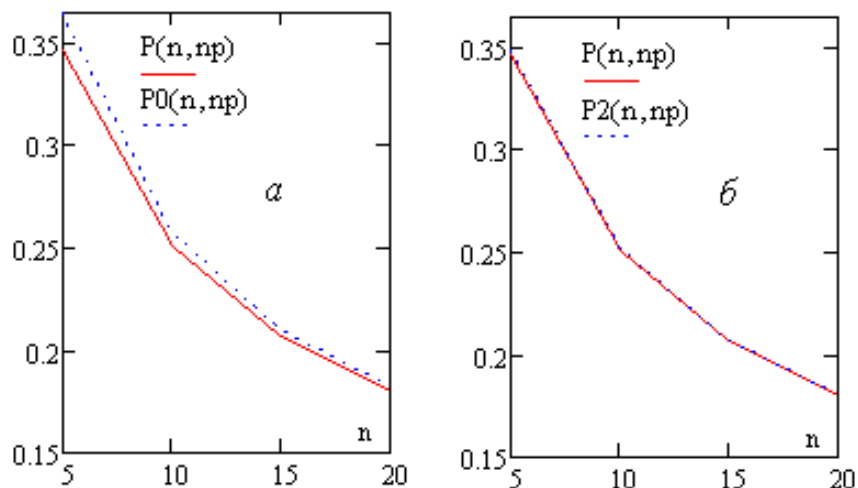


Рисунок 20.2. – Максимальная вероятность числа успехов в n опытах схемы Бернулли с $p = 0,6$

Пользоваться локальной теоремой Лапласа (отвечающей нулевому приближению в разложении (20.12), (20.13) нельзя, если $|\Delta(m, n)| \neq o(P_0(n, m))$. В частности, для m , далеких от наиболее вероятного числа успехов, $|x(n, m)|$ при увеличении числа опытов растет пропорционально \sqrt{n} (см. (20.3), (20.11). При этом согласно (20.13), (20.14) главная часть общего члена ряда для $|\Delta(m, n)|/P_0(n, m)$ пропорциональна n ($x(n, m)^{l+2}/\sigma(n)^l \sim n \rightarrow \infty$). Т.е. относительная погрешность асимптотической формулы (20.11), фигурирующей в локальной теореме Лапласа, неограниченно возрастает (рисунок 20.3) и пользоваться ею нельзя, что, однако, не всегда оговаривается [34].

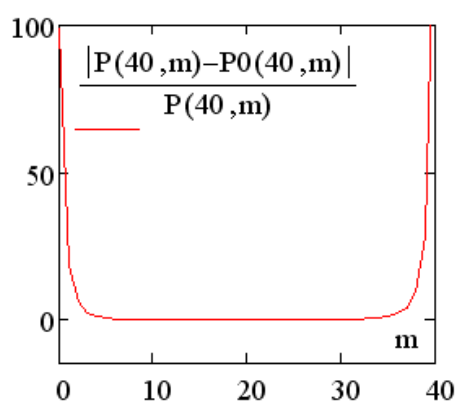


Рисунок 20.3. – Относительная погрешность нулевого приближения для $p = 0,6$

Таким образом, независимые повторные испытания можно рассматривать как случайный процесс с дискретным временем. Методом моментов

установлена гауссовская асимптотика процесса и определен вклад асимметрий и эксцессов произвольных порядков в отклонение распределения Бернулли от асимптотической формулы, фигурирующей в локальной теореме Лапласа. Показано, что последнюю нельзя применять для вычисления вероятностей чисел успехов, далеких от своих наиболее вероятных значений.

21. ПРЕИМУЩЕСТВО СМЕЩЕННЫХ ОЦЕНОК В УСЛОВИЯХ ПОЛНОТЫ ДОСТАТОЧНОЙ СТАТИСТИКИ [35]

Задача о статистическом оценивании неизвестного параметра закона распределения считается идеально решенной, если оценка как случайная величина является несмещенной и эффективной. Это обеспечивает минимальность ее среднеквадратической погрешности. Однако в условиях полноты достаточной статистики [31] существует лишь одна несмещенная оценка любого параметра. Если она не обладает свойством эффективности, оценку с минимальной среднеквадратической погрешностью при данном объеме выборки имеет смысл искать на классе смещенных оценок. Проиллюстрируем данное утверждение на примере схемы Бернулли.

Вероятность m успехов в n независимых испытаниях определяется формулой Бернулли

$$P(n, m) = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m}, \quad (21.1)$$

где C_n^m – числа сочетаний из n объектов по m ;

p – вероятность успеха в одном опыте [36].

Популярность распределения (21.1) объясняется тем, что пространство элементарных исходов любого опыта, (независимо от их количества и соответствующих вероятностей) всегда можно разделить на две части, одна из которых, исходя из смысла решаемой задачи, будет соответствовать успеху, а вторая – нет. Аналогично область возможных значений случайной величины (при любом законе ее распределения) можно разделить на две части, одна из которых в зависимости от смысла решаемой задачи будет соответствовать успеху. Например, при исследовании динамической сорбционной активности регенеративного патрона изолирующего дыхательного аппарата удобно пользоваться законом распределения растущей в направлении фильтрации координаты элементарного акта сорбции молекулы CO_2 [37]. Будучи непрерывной случайной величиной, эта координата имеет плотность вероятности, существенно отличающуюся от нуля в так называемом работающем слое хемосорбента (кислородсодержащего продукта на основе

надпероксида щелочных металлов). Перед ним плотность вероятности практически равна нулю в связи с исчерпанием поглотительного ресурса лобовых слоев кислородсодержащего продукта, а за ним – в связи с отсутствием углекислого газа, практически полностью поглощенного работающим слоем. При наличии стационарных граничных условий на входе в продукт его работающий слой равномерно смещается вглубь однородно снаряженного регенеративного патрона по мере исчерпания поглотительного ресурса предыдущих слоев. При этом в зависимости от вида изотермы сорбции эволюционирует структура и ширина работающего слоя. Однако по мере удаления работающего слоя от входа в фильтр его структура стабилизируется [37], ибо в соответствии с правилом трех сигм [36] область возможных значений координаты элементарного акта сорбции из полубесконечной превращается как бы в бесконечную. А на бесконечном промежутке максимум энтропии обеспечивается нормальным распределением (см. [23; 24] или раздел 14). После чего для определения срока защитного действия дыхательного аппарата (времени критического проскока CO_2) фактически достаточно знать положение работающего слоя и его ширину как функции времени t , ибо у нормального закона всего два параметра – математическое ожидание $a(t)$ и среднеквадратическое отклонение $\delta(t)$ координаты элементарного акта сорбции. Займемся обоснованием процедуры их экспериментального определения в схеме независимых повторных испытаний.

Корректное применение схемы Бернулли требует обеспечения воспроизводимости условий опыта. То есть за время измерения проскока углекислого газа распределение связанного углерода в толще кислородсодержащего продукта и концентрация CO_2 на входе в регенеративный патрон не должны существенно измениться. Это не противоречит обоснованной в [38] концепции квазистационарного профиля концентрации CO_2 в работающем аппарате.

С точки зрения практики, знание функций $a(t)$ и $\delta(t)$ важно для расчета феноменологических констант модели рабочего процесса изолирующего дыхательного аппарата, характеризующих скорость и ресурс хемосорбции CO_2 . Кроме того, их знание важно для предсказания эволюции мощности внутренних источников экзотермического тепла, выделяющегося при связывании углекислого газа кислородсодержащим продуктом [39]:



В связи с симметрией нормального закона при определении положения математического ожидания в данный момент времени успехом следует считать более чем двукратное уменьшение концентрации CO_2 в регенерируемом воздухе. Если по результатам обследования выборки, состоящей

из n одинаковых регенеративных патронов, оценка вероятности успеха m/n близка к $1/2$, то середина работающего слоя в данный момент времени находится в месте контроля концентрации. На некотором расстоянии x слева от него можно с помощью одновременных измерений получить меньшее значение вероятности поглощения CO_2 $p = p(x) < 1/2$ и с помощью уравнения

$$\int_{a(t)-x}^{a(t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta(t)}} e^{-\frac{(y-a(t))^2}{2\delta(t)^2}} dy = p(0) - p(x) = \frac{1}{2} - p(x) \quad (21.2)$$

вычислить среднеквадратическое отклонение координаты элементарного акта сорбции в данный момент.

Точность полученных таким образом значений $a(t)$ (а значит, и $\delta(t)$) зависит от величины среднеквадратической погрешности оценки вероятности $p(x)$ поглощения молекул CO_2 на расстоянии x слева от середины работающего слоя. Такая погрешность определяется дисперсией оценки, которая (поскольку вероятность успеха – единственный параметр в схеме Бернулли) сама по себе аппроксимируется оценкой функции неизвестного параметра $p(x)$. Чтобы понять, должна ли оценка такой функции быть несмещенной, рассмотрим более подробно схему Бернулли.

Согласно [30] вся информация о законе распределения случайной величины m содержится в ее начальных

$$v_k(n, p) = M \{ m^k \} = \sum_{m=0}^n m^k \cdot P(n, m) \quad (k=0, 1, \dots) \quad (21.3)$$

или центральных моментах

$$\mu_k(n, p) = M \{ (m - v_1(n, p))^k \} = \sum_{m=0}^n (m - v_1(n, p))^k \cdot P(n, m) \quad (21.4)$$

где $M \{ y \}$ – символ математического ожидания случайной величины y .

В частности, из (21.1), (21.3) и биномиального разложения следует условие нормировки

$$v_0(n, p) = \sum_{m=0}^n P(n, m) = \sum_{m=0}^n C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = (p + (1-p))^n = 1$$

и формула для математического ожидания числа успехов m в схеме Бернулли

$$\begin{aligned}
 v_1(n, p) &= \sum_{m=0}^n m C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = 0 + \sum_{m=1}^n \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m} = \\
 &= \|k = m-1\| = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n(n-1)!}{k!(n-1-k)!} p p^k (1-p)^{n-1-k} = \\
 &= np \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k p^k (1-p)^{n-1-k} = np(p + (1-p))^{n-1} = np. \quad (21.5)
 \end{aligned}$$

Обычно последний результат получают проще, используя свойства математического ожидания

$$M\{m\} = M\left\{\sum_{i=1}^n m_i\right\} = \sum_{i=1}^n M\{m_i\} = \sum_{i=1}^n (1 \cdot p + 0 \cdot (1-p)) = \sum_{i=1}^n p = np,$$

где m_i – число успехов в одном (i -м) опыте.

С учетом (21.1) выражение (21.4) может быть представлено в виде

$$\mu_k(n, p) = \sum_{l=0}^{k-2} C_k^{k-l} (-1)^l v_{k-l}(n, p) v_1^l(n, p) + v_1^k(n, p) (-1)^k (1-k), \quad (21.6)$$

являющемся обобщением известной формулы для вычисления дисперсии

$$D\{m\} = \mu_2(n, p) = v_2(n, p) - v_1(n, p)^2 = \sigma\{m\}^2, \quad (21.7)$$

где $\sigma\{m\}$ – среднеквадратическое отклонение m от своего математического ожидания.

Аналогично из (21.6) следует

$$\mu_3(n, p) = v_3(n, p) - 3v_2(n, p)v_1(n, p) + 2v_1(n, p)^3, \quad (21.8)$$

$$\mu_4(n, p) = v_4(n, p) - 4v_3(n, p)v_1(n, p) + 6v_2(n, p)v_1(n, p)^2 - 3v_1(n, p)^4. \quad (21.9)$$

Моменты высших порядков удобно вычислять с помощью характеристических функций

$$\theta(\omega, n, p) = \sum_{m=0}^n e^{i\omega m} \cdot P(n, m) = (pe^{i\omega} + 1 - p)^n, \quad (21.10)$$

$$\vartheta(\omega, n, p) = \sum_{m=0}^n e^{i\omega(m-np)} \cdot P(n, m) = \left(p e^{i\omega(1-p)} + (1-p)e^{-i\omega p} \right)^n. \quad (21.11)$$

При этом

$$v_k(n, p) = i^{-k} \theta_{\omega}^{(k)}(0, n, p), \quad (21.12)$$

$$\mu_k(n, p) = i^{-k} \vartheta_{\omega}^{(k)}(0, n, p), \quad (21.13)$$

где i – мнимая единица;

(k) – порядок производной по параметру ω .

Непосредственно можно убедиться в том, что при вычислении центральных моментов формулы (21.11), (21.13) приводят к тому же результату, что и (21.10), (21.12) с использованием (21.6):

$$\vartheta'_{\omega}(\omega, n, p) = n \left(p e^{i\omega(1-p)} + (1-p)e^{-i\omega p} \right)^{n-1} ip(1-p) \left(e^{i\omega(1-p)} - e^{-i\omega p} \right), \quad (21.14)$$

$$\begin{aligned} \vartheta''_{\omega}(\omega, n, p) = n \left[-(n-1) \left(p e^{i\omega(1-p)} + (1-p)e^{-i\omega p} \right)^{n-2} p^2(1-p)^2 \left(e^{i\omega(1-p)} - e^{-i\omega p} \right)^2 - \right. \\ \left. - \left(p e^{i\omega(1-p)} + (1-p)e^{-i\omega p} \right)^{n-1} \left(p(1-p)^2 e^{i\omega(1-p)} + p^2(1-p)e^{-i\omega p} \right) \right], \quad (21.15) \end{aligned}$$

$$\mu_2(n, p) = -\vartheta_{\omega}^{(2)}(0, n, p) = np(1-p) = v_2(n, p) - v_1(n, p)^2, \quad (21.16)$$

(см. (21.7), ибо согласно (21.10), (21.12))

$$\theta'_{\omega}(\omega, n, p) = n \left(p e^{i\omega} + 1 - p \right)^{n-1} p e^{i\omega} i, v_1(n, p) = i^{-1} \theta'_{\omega}(0, n, p) = np, \quad (21.17)$$

$$\theta''_{\omega}(\omega, n, p) = inp \left[(n-1) \left(p e^{i\omega} + 1 - p \right)^{n-2} p i e^{2i\omega} + \left(p e^{i\omega} + 1 - p \right)^{n-1} e^{i\omega} i \right], \quad (21.18)$$

$$v_2(n, p) = -\theta''_{\omega}(0, n, p) = np(np + 1 - p). \quad (21.19)$$

Аналогично можно получить

$$v_3(n, p) = np \left((n-1)(n-2)p^2 + 3(n-1)p + 1 \right) \quad (21.20)$$

и

$$v_4(n, p) = np \left((n-1)(n-2)(n-3)p^3 + 6(n-1)(n-2)p^2 + 7(n-1)p + 1 \right), \quad (21.21)$$

после чего с помощью (21.8), (21.9) найти

$$\mu_3(n, p) = np(2p^2 - 3p + 1), \quad (21.22)$$

$$\mu_4(n, p) = 3(np(1-p))^2 + np(-6p^4 + 12p^3 - 7p^2 + p) \quad (21.23)$$

и вычислить асимметрию и эксцесс закона распределения числа успехов как функцию числа испытаний

$$A(n, p) = \frac{\mu_3(n, p)}{\sigma\{m\}^3} = \frac{2p^2 - 3p + 1}{(1-p)\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad (21.24)$$

$$E(n, p) = \frac{\mu_4(n, p)}{\sigma\{m\}^4} - 3 = \frac{-6p^4 + 12p^3 - 7p^2 + p}{n(p(1-p))^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (21.25)$$

В связи с громоздкостью последних вычислений, в качестве проверки их правильности можно легко убедиться, что при $p = 0$ или при $p = 1$ центральные моменты равны нулю (разброс исчезает), как и должно быть при отсутствии случайности. Кроме того, при $p = 0,5$ равна нулю асимметрия, как и должно быть в ситуации, когда закон распределения обладает свойством четности относительно математического ожидания. Действительно, при $p = 1 - p$ согласно (21.1) имеет место равенство

$$P(n, m) = P(n, n - m), \quad (21.26)$$

причем фигурирующие в нем числа успехов находятся по разные стороны от математического ожидания на равных от него расстояниях

$$np - m = n - m - np = n(1 - p) - m. \quad (21.27)$$

Согласно (21.4), (21.9) при $n \rightarrow \infty$ асимметрия и эксцесс исчезают, т.е. в актуальном диапазоне аргументов (ограниченной несколькими $\sigma\{m\}$ окрестности математического ожидания) распределение (21.1) переходит в нормальное, как и в случае с динамикой сорбции при больших временах. Что позволяет, связав число поглощаемых частиц с количеством опытов применить полученные выражения для начальных и центральных моментов при сопоставлении теоретических моделей сорбционной активности с экспериментальными данными.

В соответствии с критерием факторизации [31], достаточной статистикой для схемы Бернулли является сумма чисел успехов m_i в n опытах

$$m = \sum_{i=1}^n m_i, \quad (21.28)$$

ибо в ней содержится вся имеющаяся в выборке информация о параметре p закона распределения (21.1), в чем можно убедиться, составив функцию правдоподобия

$$L(m_1, m_2, \dots, m_n; p) = P(m_1, p) \cdot P(m_2, p) \cdot \dots \cdot P(m_n, p), \quad (21.29)$$

в которой

$$P(m_i, p) = p^{m_i} \cdot (1-p)^{1-m_i} \quad (21.30)$$

закон распределения числа успехов в i -м опыте.¹⁶ Подставив (21.30) в (21.29) получим

$$L(m_1, m_2, \dots, m_n; p) = p^{\sum_{i=1}^n m_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^n m_i} = p^m (1-p)^{n-m}, \quad (21.31)$$

то есть для определения p из условия экстремума $L(m_1, m_2, \dots, m_n; p)$ не существенно, в каких именно опытах реализовались m успехов.

Найдем математическое ожидание произвольной функции m

$$\begin{aligned} M\{g(m)\} &= \sum_{m=0}^n g(m) \cdot P(n, m) = \sum_{m=0}^n g(m) \cdot C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = \\ &= (1-p)^n \sum_{m=0}^n g(m) \cdot C_n^m \left(\frac{p}{1-p}\right)^m = (1-p)^n \sum_{m=0}^n g(m) \cdot C_n^m z^m, \end{aligned}$$

где $z = p/(1-p) \in [0, \infty)$.

Согласно основной теореме алгебры фигурирующий в правой части последнего равенства многочлен n -й степени тождественно равен нулю $\forall z$ (или, что то же самое, $\forall p$), только если все $g(m) = 0$. Иными словами, из того, что $\forall p$ выполняется равенство $M\{g(m)\} = 0$ следует, что

¹⁶ Согласно (21.30) $P(1, p) = p$, а $P(0, p) = 1 - p$, как это и должно быть.

$P(g(m) = 0) = 1$. Такая достаточная статистика m называется полной [31]. С практической точки зрения свойство полноты означает, что две несмещенные оценки некоторой функции параметра закона распределения $f(p)$ тождественно совпадают. Действительно, если $M\{g_1(m)\} = f(p) = M\{g_2(m)\}$, то $M\{g_1(m) - g_2(m)\} = 0$, а это при полноте m означает, что $P(g_1(m) = g_2(m)) = 1$ или $g_1(m) \equiv g_2(m)$. Иными словами, из полноты m следует, что у любой функции $f(p)$ параметра p распределения Бернулли существует единственная несмещенная оценка.

С учетом асимптотики распределения Бернулли середина работающего слоя хемосорбента находится в точке, до которой добирается половина имевшейся на входе концентрации CO_2 . В схеме независимых повторных испытаний этому соответствует $p = 0,5 = 1 - p$. В такой ситуации дисперсия (см. (21.16) определяется величиной p^2 . Единственной несмещенной оценкой этой функции является дробь $\frac{m}{n} \cdot \frac{m-1}{n-1}$:

$$\begin{aligned} M\left\{\frac{m}{n} \cdot \frac{m-1}{n-1}\right\} &= \frac{1}{n(n-1)} M\{m^2 - m\} = \frac{1}{n(n-1)} \left[M\{m^2\} - M\{m\} \right] = \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \left[v_2(n, p) - v_1(n, p) \right] = p^2, \end{aligned} \quad (21.32)$$

где последнее равенство получено с помощью (21.5), (21.19).

Покажем, что смещенная оценка $(m/n)^2$

$$M\left\{\left(\frac{m}{n}\right)^2\right\} = \frac{1}{n^2} M\{m^2\} = \frac{v_2(n, p)}{n^2} = p^2 + \frac{p(1-p)}{n} \neq p^2 \quad (21.33)$$

(см. (21.19) обладает тем не менее меньшей среднеквадратической погрешностью $\Delta(n, p)$. Действительно,

$$\Delta(n, p)^2 = M\left\{\left(\left(\frac{m}{n}\right)^2 - p^2\right)^2\right\} = D\left\{\left(\frac{m}{n}\right)^2\right\} + \frac{p^2(1-p)^2}{n^2}, \quad (21.34)$$

для сравнения

$$M\left\{\left(\frac{m}{n} \cdot \frac{m-1}{n-1} - p^2\right)^2\right\} = D\left\{\frac{m}{n} \cdot \frac{m-1}{n-1}\right\} = \frac{1}{n^2(n-1)^2} D\{m^2 - m\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n^2(n-1)^2} \left[D\{m^2\} + D\{m\} \right] = \frac{1}{n^2(n-1)^2} \left[n^4 D\left\{ \left(\frac{m}{n} \right)^2 \right\} + np(1-p) \right] = \\
&= \frac{n^2}{(n-1)^2} D\left\{ \left(\frac{m}{n} \right)^2 \right\} + \frac{p(1-p)}{n(n-1)^2} = D(n, p), \quad (21.35)
\end{aligned}$$

то есть

$$\begin{aligned}
&\Delta(n, p)^2 - D\left\{ \frac{m}{n} \cdot \frac{m-1}{n-1} \right\} = D\left\{ \left(\frac{m}{n} \right)^2 \right\} \left(1 - \frac{n^2}{(n-1)^2} \right) + \\
&+ \frac{p(1-p)}{n} \left(\frac{p(1-p)}{n} - \frac{1}{(n-1)^2} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\frac{2}{n} D\left\{ \left(\frac{m}{n} \right)^2 \right\} + \frac{p^2(1-p)^2}{n^2} \quad (21.36)
\end{aligned}$$

и для ответа на вопрос, какая из погрешностей меньше, осталось с учетом (21.19), (21.21) и свойств дисперсии вычислить

$$\begin{aligned}
&D\left\{ \left(\frac{m}{n} \right)^2 \right\} = n^{-4} D\{m^2\} = \\
&= n^{-4} \left[M\{m^4\} - M\{m^2\}^2 \right] = n^{-4} \left[v_4(n, p) - v_2(n, p)^2 \right] = \\
&= \frac{-4p^4 + 4p^3}{n} + \frac{10p^4 - 16p^3 + 6p^2}{n^2} + \frac{-6p^4 + 12p^3 - 7p^2 + p}{n^3}. \quad (21.37)
\end{aligned}$$

В связи с громоздкостью последних вычислений в качестве проверки их правильности можно убедиться, что при $p = 0$ или $p = 1$ разброс исчезает ($D\left\{ \left(\frac{m}{n} \right)^2 \right\} = 0$), как и должно быть при отсутствии случайности.

Подставив выражение (21.37) для $D\left\{ \left(\frac{m}{n} \right)^2 \right\}$ в (21.36) и опустив слагаемые более высокого порядка малости, чем n^{-2} , получим

$$\Delta(n, p)^2 - D\left\{ \frac{m}{n} \cdot \frac{m-1}{n-1} \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{p^2(1-p)}{n^2} (1-9p) < 0, \quad (21.38)$$

при $p > 1/9$, что, в частности, имеет место, если успехом является достижение частицей сорбтива середины работающего слоя фильтра. В этом случае пользование несмещенной оценкой приводит к большей среднеквадратической погрешности при значительных объемах выборки.

Построенный с помощью формул (21.36), (21.37) в среде пакета MathCAD рисунок 21.1. демонстрирует, что при малых n последний вывод сохраняется (причем и для сколь угодно малых p).

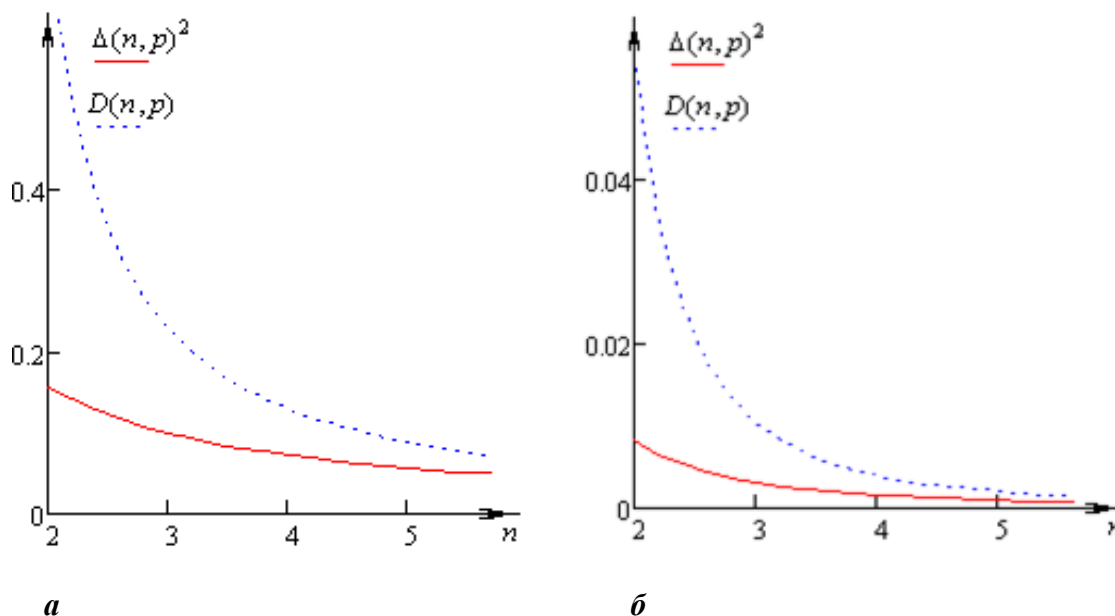


Рисунок 21.1. – Зависимость от объема выборки n квадрата среднеквадратической погрешности $\Delta(n, p)$ смещенной оценки дисперсии числа успехов и дисперсии ее несмещенной оценки $D(n, p)$: при $p = 0,5$ (а); при $p = 0,05$ (б)

Значит, при данном объеме выборки (ограниченном в связи с высокой стоимостью хемосорбента) формулы (21.33), (21.34) позволят определить математическое ожидание $a(t)$ координаты элементарного акта сорбции с более высокой точностью. Аналогично влияющая на точность определения среднеквадратического отклонения $\delta(t)$ смещенная оценка $m(n - m)/n^2$ функции $p(1 - p) = p - p^2$, фигурирующей в дисперсии оценки вероятности $p(x)$ поглощения молекул CO_2 на расстоянии x слева от середины работающего слоя, лучше несмещенной $\frac{m}{n} \cdot \frac{n - m}{n - 1}$, ибо

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{n - m}{n} = \frac{m}{n} - \left(\frac{m}{n}\right)^2, \quad \frac{m}{n} \cdot \frac{n - m}{n - 1} = \frac{m}{n} \cdot \frac{n - 1 - (m - 1)}{n - 1} = \frac{m}{n} - \frac{m}{n} \cdot \frac{m - 1}{n - 1} \quad (21.39)$$

и все опять свелось (см. (21.32), (21.33) к сравнению среднеквадратических погрешностей оценок p^2 .

22. ОБОСНОВАНИЕ ОБЪЕМА ВЫБОРКИ И КРИТИЧЕСКОГО ЗНАЧЕНИЯ КРИТЕРИЯ СОГЛАСИЯ ПРИ ПРОВЕРКЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ [40]

Покажем, что истиной независимой переменной, определяющей объем выборки, вид критерия согласия и его критическое значение, является приемлемый риск ошибок при принятии (отклонении) проверяемой гипотезы. И нет соображений, позволяющих минимизировать риск, если для альтернативной гипотезы не конкретизирован закон распределения критерия. При таком подходе уровень значимости и мощность критерия возникают на стадии промежуточных вычислений в качестве побочного продукта и как самостоятельные понятия не требуются для решения задачи о проверке статистических гипотез.

Как известно, статистической называют гипотезу о виде закона распределения случайной величины и его параметрах. Принять или отвергнуть гипотезу нужно на основе данных выборки, что вносит элемент случайности и может привести к ошибкам (принятию неверной гипотезы или неприятию верной). Поэтому можно говорить лишь о некоторой вероятности того, что гипотеза имеет (или не имеет) место.

Для принятия решения из данных выборки составляют некоторую случайную величину (критерий), возможные значения которой в зависимости от требуемой вероятности делят на две части. Внутри одной из них гипотезу принимают, во второй – отвергают.

Пример. Пусть гипотеза состоит в том, что матожидание некоторого признака генеральной совокупности равно m . Критерием в этом случае является выборочное среднее, областью принятия – некоторая δ -окрестность m , отвечающая доверительной вероятности γ .

Следует подчеркнуть, что при этом, во-первых, остается конечная вероятность $\alpha = 1 - \gamma$ отклонить правильную гипотезу, называемая уровнем значимости. Во-вторых, само принятое решение может измениться при увеличении объема выборки (δ -окрестность уменьшится, и критерий перестанет в нее попадать).

Таким образом, сразу возникает три вопроса:

1. Из каких соображений выбирать γ (а значит и границы окрестности, являющиеся критическими значениями критерия)?
2. Каким объемом следует ограничить выборку?
3. Какой из критериев предпочесть остальным?

С ответами на них непосредственно связан метод минимума риска, излагаемый, однако, в литературе вне данного контекста [36].

Метод минимума риска. Пусть ущерб, связанный с ошибкой первого рода (отклонение правильной гипотезы) равен C_1 , а второго рода (принятие неправильной) – C_2 . Определение C_1 и C_2 – задача специалистов той отрасли, которая прибегает к услугам математической статистики.

Тогда математическое ожидание ущерба C , называемое риском, равно

$$r = M(C) = P_1 \cdot C_1 + P_2 \cdot C_2, \quad (22.1)$$

где

$$P_1 = P(H) \cdot P_H(\bar{A}) \quad - \quad (22.2)$$

вероятность ошибки первого рода, в которой $P(H)$ – априорная (найденная до обследования выборки) вероятность проверяемой гипотезы, а $P_H(\bar{A})$ – вероятность эту гипотезу отклонить при условии, что она имеет место.

Аналогично вероятность совершения ошибки второго рода представим в виде

$$P_2 = P(\bar{H}) \cdot P_{\bar{H}}(A), \quad (22.3)$$

где \bar{H} – альтернативная гипотеза;

A – ее принятие.

Заметим, что гипотез может быть много, однако все они, кроме H , могут быть объединены в альтернативную.

Фигурирующие в (22.2), (22.3) условные вероятности зависят от того, какой критерий согласия используется, чему равно его критическое значение и каков объем выборки. Естественно при данном объеме выборки критическое значение критерия выбирать так, чтобы риск был минимален. Если даже в этом случае он оказывается неприемлемо велик, следует увеличивать выборку, принимая, однако, во внимание растущие затраты на сбор и обработку статистических данных. Последнее обстоятельство может не позволить снизить обусловленные ошибками издержки до приемлемых. Поэтому из нескольких критериев предпочтительнее обеспечивающий данный риск минимальным объемом выборки.

Пример. Изделия одинаковыми партиями поступают с двух заводов. Вероятности выпуска бракованной продукции первым и вторым заводами равны соответственно p_1 и p_2 . Известны доли всех партий, поступающих с первого и второго заводов. Требуется на основании данных выборочного контроля принять решение о том, на каком заводе изготовлена данная партия.

Решение. Пусть n – объем выборки. Значит, число бракованных изделий m – случайная величина с возможными значениями $0, 1, 2, \dots, n$. Очевидно, m можно использовать в качестве критерия согласия. Положим для определенности $p_1 > p_2$. Тогда, если $m > m^*$, считаем, что партия изготовлена на первом заводе. Здесь m^* – критическое значение критерия, которое предстоит определить.

Нетривиальность задачи состоит в том, что из плохой партии (изготовленной первым заводом) можно случайно осуществить выборку качественных изделий¹⁷, а из хорошей – бракованных. Поэтому партию первого завода можно счесть изготовленной на втором и наоборот. Коротко эти ошибки будем называть первой и второй соответственно. Найдем их вероятности.

По схеме Бернулли имеем следующие законы распределения m для первого ($i = 1$) и второго ($i = 2$) заводов

$$P_n^i(m) = C_n^m p_i^m q_i^{n-m}, \quad (22.4)$$

где $q_i = 1 - p_i$ – вероятность выпуска качественной продукции i -м заводом.

Пусть гипотеза H заключается в том, что выставленная на продажу партия изготовлена на первом заводе (\bar{H} – на втором). В соответствии с ранее изложенным вероятность отклонить H при условии, что она верна, равна сумме вероятностей хороших выборок ($m \leq m^*$) из плохой партии ($i = 1$):

$$P_H(\bar{A}) = \sum_{m \leq m^*} P_n^1(m). \quad (22.5)$$

Случайное событие \bar{A} заключается в том, что гипотеза H отвергается. Аналогично для альтернативной гипотезы имеем

$$P_{\bar{H}}(A) = \sum_{m > m^*} P_n^2(m) = 1 - \sum_{m \leq m^*} P_n^2(m), \quad (22.6)$$

где A означает отклонение \bar{H} (принятие H).

В (22.6) учтено, что полная вероятность равна единице.

¹⁷ Более того, первый завод может случайно выпустить даже хорошую партию ($p_1^* \leq p_2$, где p_1^* – фактическая доля брака). Однако это крайне маловероятно (партия намного больше выборки) и никак не учитывается.

По условию априорные вероятности гипотез известны (это доли партий, поступающих с первого и второго заводов), поэтому, подставив (22.5), (22.6) в (22.1), найдем риск как функцию m^* :

$$r(m^*) = C_1 P(H) \sum_{m \leq m^*} P_n^1(m) + C_2 P(\bar{H}) \sum_{m > m^*} P_n^2(m) = C_1 P(H) \sum_{m \leq m^*} P_n^1(m) + C_2 P(\bar{H}) \left(1 - \sum_{m \leq m^*} P_n^2(m) \right) = C_2 P(\bar{H}) + \sum_{m \leq m^*} f(m), \quad (22.7)$$

где

$$f(m) = C_1 P(H) P_n^1(m) - C_2 P(\bar{H}) P_n^2(m). \quad (22.8)$$

Если n достаточно велико, то $f(0) < 0$, а $f(n) > 0$, в чем легко убедиться с помощью (22.4), (22.8), приняв во внимание, что $p_1 > p_2$:

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= C_1 P(H) q_1^n - C_2 P(\bar{H}) q_2^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -C_2 P(\bar{H}) q_2^n \\ f(n) &= C_1 P(H) p_1^n - C_2 P(\bar{H}) p_2^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} C_1 P(H) p_1^n \end{aligned} \right\} \quad (22.9)$$

Чтобы при данном n риск был минимален, суммировать в (22.7) нужно до тех пор, пока $f(m)$ отрицательно. Из условия $f(m) = 0$ определим критическое значение критерия согласия

$$m^* = \frac{\ln \frac{\eta q_1^n}{q_2^n}}{\ln \frac{p_2 q_1}{p_1 q_2}} \equiv m^*(n), \quad (22.10)$$

где

$$\eta = \frac{C_1 P(H)}{C_2 P(\bar{H})}. \quad (22.11)$$

На этом решение задачи о проверке статистической гипотезы «данная партия изготовлена первым заводом» можно считать завершенным. Если по результатам выборочного контроля $m > m^*$ гипотезу следует принимать, а при $m < m^*$ – отвергать. Точку $m = m^*$ ¹⁸ можно отнести как к критической области, так и к области принятия гипотезы. На величину риска это не влияет, ибо $f(m^*) = 0$. Подчеркнем, что мы никак не задавали уровень значимости и мощность критерия (и даже не вводили эти понятия).

¹⁸ Такое равенство возможно не всегда (только если m^* окажется целым числом).

Проинтерпретируем полученные результаты. Вначале выясним, каким должен быть объем выборки. Для малых n может оказаться, что m^* отрицательно или больше n , если очень велик ущерб, связанный соответственно с первой и второй ошибками, или велики соответствующие априорные вероятности. В этом легко убедиться, рассмотрев в (22.10) предельные ситуации с η , стремящимся к бесконечности или к нулю. В первом случае, чтобы меньше рисковать, партию нужно считать худшей (принимать H), даже если оказалось, что $m=0$. А во втором – качественной даже при $m=n$. Очевидно, что такие выборки неинформативны и делать их бессмысленно. В связи с этим определим минимальное n , при котором результаты выборочного контроля влияют на принимаемое решение. Заметим для этого, что логарифм в знаменателе (22.10) отрицателен. Поэтому первая ситуация ($m^* < 0$) не возникнет, если

$$\frac{\eta q_1^n}{q_2^n} \leq 1,$$

откуда

$$n \geq \frac{\ln \eta}{\ln \frac{q_2}{q_1}}. \quad (22.12)$$

А чтобы не возникла вторая ситуация ($m^* > n$), требуется (см. (22.10)) выполнение неравенства

$$\frac{\ln \frac{\eta q_1^n}{q_2^n}}{\ln \frac{p_2 q_1}{p_1 q_2}} \leq n,$$

из которого следует

$$n \geq \frac{\ln \eta}{\ln \frac{p_2}{p_1}}. \quad (22.13)$$

Видно, что при $p_1 \rightarrow p_2$, когда различие между партиями разных заводов нивелируется, объем информативной выборки неограниченно возрастает. В случае строгого равенства $p_1 = p_2$ ни одно из условий (22.12), (22.13) не может быть выполнено, то есть выборочный контроль не позволяет установить происхождение партии.

В зависимости от конкретных $C_1, C_2, p_1, p_2, P(H)$ и $P(\bar{H})$ при определении минимального объема информативной выборки пользоваться нужно тем из условий (22.12), (22.13), которое нарушено для малых n (напомним, что по смыслу $n > 0$). Знаменатели в (22.12), (22.13) разных знаков, поэтому оба условия сразу нарушены быть не могут.

Выясним теперь, как риск зависит от объема выборки. Для малых n (неинформативных выборок) он определяется априорными вероятностями гипотез. В случае равенства (22.12) имеем $m^* = 0$, то есть неравенство $m < m^*$ невозможно, и гипотеза H не будет отклонена ни при каких результатах выборочного контроля, что исключает ошибку первого рода. Следовательно $r = C_2 P(\bar{H})$, в чем можно убедиться и непосредственно, приняв во внимание, что сумма в правой части (22.7) состоит из одного слагаемого $m = m^* = 0$, к тому же равного нулю $f(m^*) = 0$.

Аналогично в случае равенства (22.13) имеем $m^* = n$, то есть приниматься всегда будет \bar{H} , что делает невозможной ошибку второго рода, поэтому $r = C_1 P(H)$. В последнем нетрудно убедиться непосредственно,

заметив в (22.7), что $\sum_{m=0}^n P_n^i(m) = 1$.

Для информативных n при оптимальном выборе m^* следует пользоваться соотношением (22.7) с $m^* = m^*(n)$, определяемым формулой (22.10):

$$r(m^*(n)) = C_2 P(\bar{H}) + \sum_{m=0}^{m^*(n)} f(m). \quad (22.14)$$

Задавшись приемлемым значением риска, с помощью (22.14) можно найти достаточный для него объем выборки. Естественно, объем будет тем меньше, чем больше отличие между p_1 и p_2 . В предельной ситуации, когда первый завод выпускает сплошной брак, а второй – только качественную продукцию ($p_1 - p_2 = 1$), происхождение партии достоверно определяется контролем единственного изделия (то есть $r = 0$ уже для $n = 1$). Последнее совершенно очевидно, однако с целью проверки развитого формализма убедимся в этом аналитически.

Подставив в (22.10) p_1 и p_2 , равные соответственно $1 - \varepsilon$ и ε , для бесконечно малых ε получим

$$m^*(n) = \frac{\ln \eta + n \ln \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}}{\ln \frac{\varepsilon^2}{(1 - \varepsilon)^2}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{n}{2}.$$

Таким образом, для $n = 1$ целочисленное по смыслу m может принять в сумме (22.7) только нулевое значение:

$$r(0) = C_2 \cdot P(\bar{H}) + C_1 \cdot P(H) \cdot P_1^1(0) - C_2 \cdot P(\bar{H}) \cdot P_1^2(0).$$

В результате с учетом (22.4) получим

$$\begin{aligned} r(0) &= C_2 \cdot P(\bar{H}) + C_1 \cdot P(H) \cdot \varepsilon - C_2 \cdot P(\bar{H}) \cdot (1 - \varepsilon) = \\ &= \varepsilon \left(C_1 \cdot P(H) + C_2 \cdot P(\bar{H}) \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Для очень больших n риск сводится к нулю при любом конечном различии между p_1 и p_2 . Доказательство проведем с помощью следующей из (22.10) асимптотической формулы

$$m^*(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} n \frac{\ln \frac{q_1}{q_2}}{\ln \frac{p_2 q_1}{p_1 q_2}} < n. \quad (22.15)$$

При этом имеет место двойное неравенство

$$np_2 < m^*(n) < np_1, \quad (22.16)$$

в справедливости которого нетрудно убедиться непосредственно (методами дифференциального исчисления)¹⁹, или приняв во внимание, что расстояние между максимумами на рисунке 22.1 пропорционально n , а их ширина, характеризуемая среднеквадратическим отклонением, растет как \sqrt{n} [34].

¹⁹ Подставив (22.15) в (22.16) и приняв во внимание отрицательность логарифма в знаменателе, перепишем правое неравенство в эквивалентном виде

$$\ln q_1 + p_1 \ln \frac{p_1}{q_1} > \ln(1 - p_2) + p_1 \ln \frac{p_2}{1 - p_2} \equiv y(p_2). \text{ Равенство достигается на правой гра-}$$

нице области определения $y(p_2)$ (напомним, что $p_2 \in (0, p_1)$). С учетом последнего обстоятельства для доказательства неравенства достаточно убедиться в монотонном воз-

растании его правой части $y(p_2)' = \frac{p_1 - p_2}{p_2 q_2} > 0$. Аналогично доказывается левое нера-

$$\text{венство (22.16): } \ln q_2 + p_2 \ln \frac{p_2}{q_2} > \ln(1 - p_1) + p_2 \ln \frac{p_1}{1 - p_1} \equiv y(p_1), \quad y(p_1)' = \frac{p_2 - p_1}{p_1 q_1} < 0,$$

и этого достаточно, так как равенство теперь достигается на левой границе ($p_1 \in (p_2, 1)$).

По этой причине площадь заштрихованных областей с ростом n будет уменьшаться. То есть качественная выборка из плохой партии и некачественная из хорошей должны стать событиями маловероятными. Но при $m^* < np_2$ не будет малой $P_{\bar{H}}(A)$ (рисунок 1), а при $m^* > np_1$ соответственно $P_H(\bar{A})$.

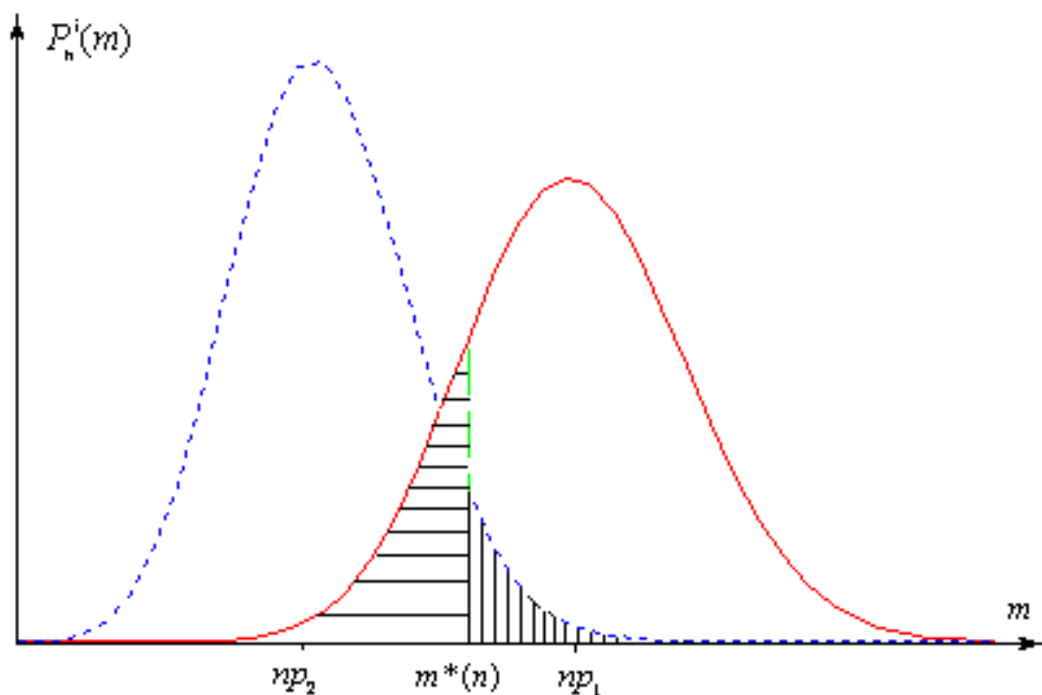


Рисунок 22.1. – Площади горизонтально и вертикально заштрихованных областей равны вероятностям $P_H(\bar{A})$ и $P_{\bar{H}}(A)$ соответственно

Оценка (21.16) означает, что разность между критическим значением критерия и математическим ожиданием числа бракованных деталей (для обоих заводов) пропорциональна n . Значит,

$$\left. \begin{aligned} x_1(m^*(n)) &= \frac{m^*(n) - np_1}{\sigma_1} \rightarrow -\infty \\ x_2(m^*(n)) &= \frac{m^*(n) - np_2}{\sigma_2} \rightarrow +\infty \end{aligned} \right\}, \quad (22.17)$$

где $\sigma_i = \sqrt{np_i q_i}$ – среднеквадратические отклонения m для первого ($i=1$) и второго ($i=2$) заводов.

Асимптотика (22.17) означает, что в соответствии с интегральной теоремой Лапласа при больших n бесконечно малыми становятся $P_H(\bar{A})$ и $P_{\bar{H}}(A)$:

$$P_H(\bar{A}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,5 - (\Phi(0) - \Phi(x_1)) = 0,5 + \Phi(x_1) \xrightarrow{x_1 \rightarrow -\infty} 0, \quad (22.18)$$

$$P_H(\bar{A}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,5 - (\Phi(x_2) - \Phi(0)) = 0,5 - \Phi(x_2) \xrightarrow{x_2 \rightarrow +\infty} 0, \quad (22.19)$$

а с ними – и риск (см. (22.1)–(22.3)). Что и требовалось доказать. В (22.18), (22.19)

$$\Phi(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

является табулированной первообразной для плотности вероятности приведенной нормально распределенной случайной величины [34]. Согласно условию нормировки и симметрии нормального распределения $\Phi(\infty) = -\Phi(-\infty) = 0,5$.

На практике затраты на осуществление выборочного контроля не позволяют неограниченно увеличивать n . Будем считать затраты пропорциональными объему выборки, добавим их к риску и таким образом определим средние издержки, связанные с однократным принятием решения об истинности (ложности) проверяемой статистической гипотезы

$$I(n) = r(m^*(n)) + zn, \quad (22.20)$$

где z – затраты на обследование одного объекта выборки.

Первое слагаемое в (22.20), как показано выше, с ростом n монотонно стремится к нулю, а второе – неограниченно увеличивается. Значит, существует оптимальное n , обеспечивающее минимум $I(n)$, которое можно найти из условия

$$r(m^*(n))' = -z. \quad (22.21)$$

Если даже найденное из (22.21) n не обеспечивает приемлемое $I(n)$, нужно пользоваться более эффективным критерием согласия, а если его нет – совершенствовать технологию производства и выборочного контроля (уменьшать C_1 , C_2 и z).

Обсудим теперь проблему выбора уровня значимости. Его определение, приведенное выше, не совсем удачно, ибо правильной по воле случая может оказаться любая из альтернативных гипотез. Чтобы избежать двусмысленности, уровнем значимости данной гипотезы назовем условную вероятность ее отвергнуть при условии, что она (данная гипотеза) верна. В рамках такого определения уровни значимости гипотез вычисляются по формулам (22.5), (22.6), в которых фигурирует m^* , определяемое с помощью (22.10) для n , найденного из условия (22.21). Впрочем, сделать это можно лишь из чистого

любопытства, т.к. для принятия (отклонения) проверяемой гипотезы эти вычисления не нужны. В рамках подхода, основанного на минимизации $I(n)$, истинными независимыми переменными, задающими объем выборки и критическое значение критерия согласия, являются η , p_1 , p_2 и z .

Укажем в этой связи, что учебные задачи, в которых в той или иной форме предлагается с помощью готовых таблиц проверить, укладываются ли данные n , α и некоторое значение критерия согласия в рамки определенной гипотезы [34], являются профанацией, поскольку нет соображений, позволяющих выбрать уровень значимости α , если для альтернативной гипотезы не конкретизирован закон распределения критерия. В частности, в рассмотренном примере отсутствие информации о p_2 не позволяет даже убедиться в информативности выборки (см. условия (22.12), (22.13)). Без чего статистическая проверка гипотезы не может считаться корректной.

23. ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ ДИНАМИЧЕСКОЙ СОРБЦИОННОЙ АКТИВНОСТИ

Рекуррентные полиномы в задаче динамики сорбции [41]

Согласно [42] при постоянстве концентрации примеси на входе в фильтр доля ее непоглощенных молекул ω описывается уравнением

$$-\omega'_\xi = e^{-\tau} \left(e^{-\xi} + \int_0^\tau e^\tau d_\tau \omega \right), \quad (23.1)$$

где

$$\xi = x\beta/v, \quad \tau = \beta\gamma t \quad (23.2)$$

являются обезразмеренными переменными, в которых v – скорость фильтрации, x – расстояние от входа в фильтр, t – время, β и γ – феноменологические постоянные, задающие скорость сорбции и ее ресурс.

В соответствии со смыслом ω

$$\omega(0, \tau) = 1. \quad (23.3)$$

В начальный момент времени ($\tau = 0$) из (23.1), (23.3) следует

$$\omega(\xi, 0) = e^{-\xi}, \quad (23.4)$$

что допускает простую интерпретацию. Пока поглотительный ресурс не тронут, вероятность элементарного акта сорбции в данном слое фильтра пропорциональна его длине и не зависит от ξ .

С учетом (23.4) решение (23.1) будем искать в виде

$$\omega(\xi, \tau) = e^{-\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} P_n(\xi), \quad (23.5)$$

где $P_n(\xi)$ – некоторые функции координат. Для их определения подставим (23.5) в (23.1) и после почленного интегрирования приравняем выражения при одинаковых степенях τ :

$$-P'_n(\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} P_k(\xi). \quad (23.6)$$

Рекуррентное соотношение (23.6) дополним вытекающими из (23.3), (23.4) граничными условиями

$$P_0(0) = 1; \quad P_n(0) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (23.7)$$

С помощью (23.6), (23.7) можно последовательно найти все P_n до какого угодно номера. В частности, для $n = 0$ имеем $P_0(\xi) = 1$. Полагая в (23.6) $n = 1$ и подставив в его правую часть полученное ранее выражение для $P_0(\xi)$, найдем с учетом (23.7) $P_1(\xi) = \xi$. Действуя по указанной схеме, легко убедиться, что $P_2(\xi) = \xi^2/2 - \xi$, $P_3(\xi) = \xi^3/6 - \xi^2 + \xi$ и т.д. до какого угодно номера.

Как известно, полиномы полностью задаются своими коэффициентами. Поэтому для численных расчетов $\omega(\xi, \tau)$ удобно (чтобы исключить процедуру интегрирования (23.6) рекуррентную связь полиномов заменить соответствующим соотношением между их коэффициентами P_{nk} , введенными согласно формуле

$$P_n(\xi) = \sum_{k=0}^n P_{nk} \xi^k. \quad (23.8)$$

Из (23.8) и условий (23.7) следует, что

$$P_{n0} = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0. \end{cases} \quad (23.9)$$

Для определения остальных коэффициентов подставим (23.8) в (23.6):

$$\sum_{l=1}^n P_{nl} l \xi^{l-1} = - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} \sum_{l=0}^k P_{kl} \xi^l. \quad (23.10)$$

Изменив порядок суммирования в левой и правой частях формулы (23.10)²⁰

$$\left. \begin{aligned} \sum_{l=1}^n P_{nl} l \xi^{l-1} &= \sum_{l=0}^{n-1} P_{n,l+1} (l+1) \xi^l \\ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} \sum_{l=0}^k P_{kl} \xi^l &= \sum_{l=0}^{n-1} \xi^l \sum_{k=l}^{n-1} (-1)^{n-k} P_{kl} \end{aligned} \right\}, \quad (23.11)$$

получим после подстановки в нее результата (23.11)

$$\sum_{l=0}^{n-1} \xi^l P_{n,l+1} (l+1) = - \sum_{l=0}^{n-1} \xi^l \sum_{k=l}^{n-1} (-1)^{n-k} P_{kl}, \quad (23.12)$$

откуда, приравняв выражения при одинаковых степенях ξ , выведем искомое рекуррентное соотношение между коэффициентами различных полиномов

$$P_{n,l+1} (l+1) = - \sum_{k=l}^{n-1} (-1)^{n-k} P_{kl} \quad \left(\begin{array}{l} n = 1, 2, \dots \\ l = 0, 1, 2, \dots, n-1. \end{array} \right). \quad (23.13)$$

Для $n=1$ имеем $l=0$ и

$$P_{11} = - \sum_{k=0}^0 (-1)^{1-k} P_{k0} = P_{00} = 1. \quad (23.14)$$

Положив в (23.13) $n=2$ (при этом $l=0;1$), выразим неизвестные коэффициенты второго полинома (согласно (23.9) $P_{20} = 0$) через уже найденные коэффициенты нулевого и первого:

$$(l=0) \quad P_{21} = - \sum_{k=0}^1 (-1)^{2-k} P_{k0} = -P_{00} + P_{10} = -1, \quad (23.15)$$

²⁰ Для любого конкретного n в справедливости второй формулы (23.11) легко убедиться непосредственно. Причина в том, что слева во второй формуле (23.11) складываются результаты суммирования элементов строк матрицы с нулевыми элементами выше главной диагонали, а в правой – наоборот (в конце складываются результаты суммирования элементов столбцов той же матрицы).

$$(l=1) 2P_{22} = -\sum_{k=1}^1 (-1)^{2-k} P_{k1} = P_{11} = 1 \Rightarrow P_{22} = 1/2. \quad (23.16)$$

Аналогично для $n = 3$ получим

$$P_{31} = P_{00} - P_{10} + P_{20} = 1, \quad (23.17)$$

$$2P_{32} = -P_{11} + P_{21} = -2 \Rightarrow P_{32} = -1, \quad (23.18)$$

$$3P_{33} = P_{22} = 1/2 \Rightarrow P_{33} = 1/6. \quad (23.19)$$

Нетрудно убедиться, что найденные коэффициенты совпадают с фигурирующими в вышеприведенных выражениях для полиномов. Действуя так и далее, можно определить их в количестве, достаточном для численных расчетов $\omega(\xi, \tau)$ с любой необходимой точностью.

Непосредственно можно убедиться, что найденные коэффициенты совпадают с вычисленными по формуле

$$P_{nk} = \frac{1}{k!} \sum_{l=k}^n C_n^l (-1)^{n-l}, \quad (23.20)$$

в которой

$$C_n^l = \frac{n!}{l!(n-l)!} \quad (23.21)$$

представляет собой число сочетаний из n объектов по l .

Результаты компьютерных вычислений коэффициентов старших ($n > 3$) полиномов $P_n(\xi)$, выполненные с помощью рекуррентной процедуры (23.9), (23.13) и непосредственно по формуле (23.20), также совпадают.

Характерно, что временные затраты на реализацию компьютером рекуррентной процедуры примерно в $n/2$ раз ниже, ибо по формуле (23.20), каждый коэффициент вычисляется заново, а рекуррентная процедура основана на использовании результатов предыдущих вычислений.

Тем не менее формула (23.20) имеет глубокий смысл и будет использована в теоретико-вероятностном подходе к моделированию динамики сорбции, описываемой уравнением (23.1). Покажем в этой связи, что выражение в правой части (23.20) – точное решение рекуррентного соотношения (23.13), записанное в аналитической форме. Для этого подставим (23.20) в (23.13):

$$\sum_{i=l+1}^n C_n^i (-1)^i = -\sum_{k=l}^{n-1} \sum_{J=l}^k C_k^j (-1)^j \quad \left(\begin{array}{l} n = 1, 2, \dots \\ l = 0, 1, \dots, n-1 \end{array} \right). \quad (23.22)$$

Из определения C_n^i (см. (23.21)) следует справедливость равенства

$$C_n^i = C_{n-1}^{i-1} + C_{n-1}^i.$$

Применив его $n-1$ раз и приняв во внимание, что $C_i^i = 1 = C_{i-1}^{i-1}$, получим

$$C_n^i = C_{n-1}^{i-1} + C_{n-2}^{i-1} + \dots + C_i^{i-1} + 1 = \sum_{k=i-1}^{n-1} C_k^{i-1}.$$

С учетом последнего равенства преобразуем левую часть (23.22):

$$\sum_{i=l+1}^n C_n^i (-1)^i = - \sum_{j=l}^{n-1} (-1)^j \sum_{k=j}^{n-1} C_k^j.$$

Подставив результат в (23.22), получим

$$\sum_{j=l}^{n-1} (-1)^j \sum_{k=j}^{n-1} C_k^j = \sum_{k=l}^{n-1} \sum_{j=l}^k C_k^j (-1)^j. \quad (23.23)$$

Слева складываются результаты суммирования элементов столбцов, а справа – строк той же матрицы, которая для наглядности выписана явно в предположении, что l – нечетное, а n – четное:

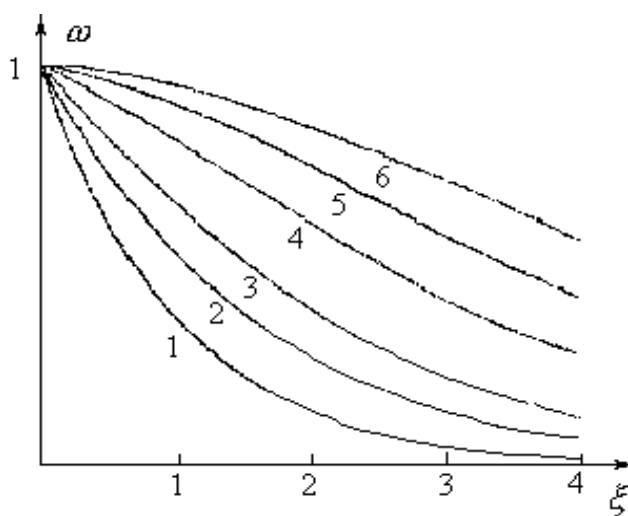
$$\begin{pmatrix} -C_l^l & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -C_{l+1}^l & C_{l+1}^{l+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -C_{l+2}^l & C_{l+2}^{l+1} & -C_{l+2}^{l+2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -C_{n-2}^l & C_{n-2}^{l+1} & -C_{n-2}^{l+2} & \dots & C_{n-2}^{n-2} & 0 \\ -C_{n-1}^l & C_{n-1}^{l+1} & -C_{n-1}^{l+2} & \dots & C_{n-1}^{n-2} & -C_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

Таким образом, из коммутативности суммы следует, что (23.23) – тождество.

Результаты компьютерных вычислений по формулам (23.5), (23.8), (23.20) в графической форме представлены на рисунке 23.1.

Видно, что в начале работы фильтра, пока его поглотительный ресурс практически не тронут, концентрация примеси как функция координаты спадает по экспоненциальному закону. Затем, по мере отработки лобовых

слоев, процесс сорбции примеси смещается вглубь фильтра. Срок его действия τ_k завершается в момент наступления критического проскока примеси ω_k и определяется из условия $\omega(\eta, \tau_k) = \omega_k$, в котором η – безразмерная длина фильтра ($0 \leq \xi \leq \eta$). Величина ω_k определяется природой примеси и предельно допустимыми нормами ее концентрации. Видно (рисунок 23.2), что срок защитного действия линейно связан с длиной патрона. Если он слишком короток, проскок примеси с самого начала превышает критический ($e^{-\eta} > \omega_k$) и срок защитного действия равен нулю. Поэтому прямая на рисунке 23.2 не проходит через начало координат.



1) $\tau = 0,01$; 2) $\tau = 0,5$; 3) $\tau = 1$; 4) $\tau = 2$; 5) $\tau = 3$; 6) $\tau = 4$

Рисунок 23.1. – Снижение концентрации примеси по мере удаления от входа в фильтр в различные моменты времени

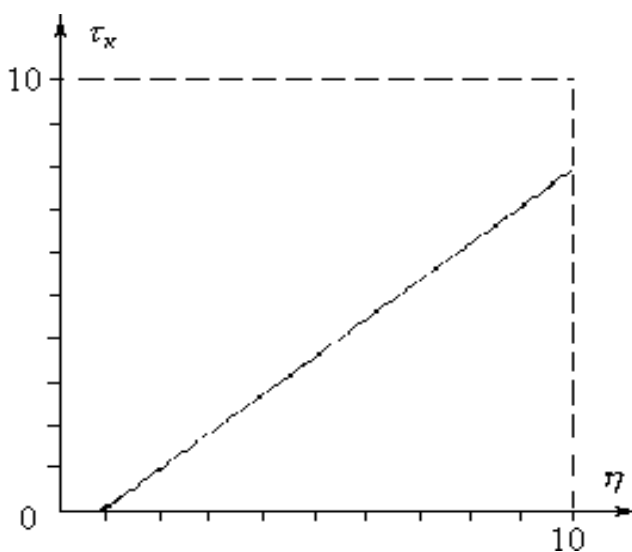


Рисунок 23.2. – Срок защитного действия фильтра, как функция его безразмерной длины

Симметрия плотности вероятности координаты элементарного акта сорбции [43]

Соотношения (23.5), (23.8), (23.20) позволяют достоверно предсказать концентрацию примеси в любой момент времени в любом месте фильтра. Вместе с тем координата любого элементарного акта сорбции – величина существенно случайная. Исходя из смысла $\omega(\xi, \tau)$ как доли молекул примеси, к моменту времени τ проникающих в фильтр на глубину ξ , разность $1 - \omega(\xi, \tau)$ можно трактовать как статистическую вероятность того, что в указанный момент времени молекула примеси будет поглощена не дальше, чем на расстоянии ξ от входа в фильтр. При этом

$$f(\xi, \tau) = -\omega'_\xi(\xi, \tau), \quad (23.24)$$

плотность вероятности координаты элементарного акта сорбции.

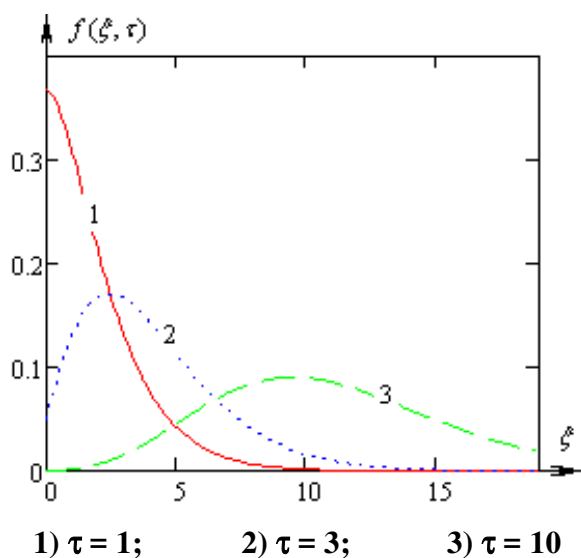
Продифференцировав (23.1) по ξ и τ , получим с учетом (23.24)

$$f''_{\xi\tau} + f'_\xi + f'_\tau = 0. \quad (23.25)$$

Уравнение (23.25) симметрично относительно перестановки аргументов, поэтому

$$f(\xi, \tau) = f(\tau, \xi), \quad (23.26)$$

что иллюстрируется рисунками 23.3, 23.4 и позволяет выразить $\omega(\xi, \tau)$ через семейство временных рекуррентных полиномов, связанных с начальными статистическими моментами случайной координаты элементарного акта сорбции.



**Рисунок 23.3. – Зависимость $f(\xi, \tau)$ от координаты
в различные моменты времени**

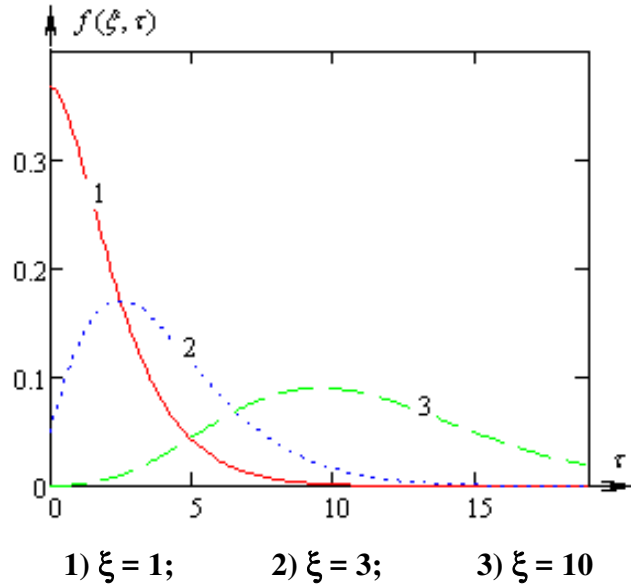


Рисунок 23.4. – Зависимость $f(\xi, \tau)$ от времени при различных значениях координаты

Подставив (23.5), (23.8), (23.20) в (23.24) получим

$$f(\xi, \tau) = - \left\{ e^{-\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} P_n(\xi) \right\}'_{\xi} = e^{-\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} (P_n(\xi) - P_n(\xi)'),$$

или с учетом (23.25)

$$f(\xi, \tau) = e^{-\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} (P_n(\tau) - P_n(\tau)') = e^{-\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} Q_n(\tau), \quad (23.27)$$

где согласно (23.8)

$$P_n(\tau) = \sum_{k=0}^n P_{nk} \tau^k \quad (23.28)$$

являются полиномами по τ с коэффициентами (23.20).

То есть для

$$Q_n(\tau) = P_n(\tau) - P_n(\tau)'$$

с помощью вышеприведенных выражений для $P_0(\xi)$, $P_1(\xi)$, $P_2(\xi)$, $P_3(\xi)$, можно получить

$$Q_0(\tau) = 1 - 1' = 1, \quad Q_1(\tau) = \tau - \tau' = \tau - 1,$$

$$Q_2(\tau) = \frac{\tau^2}{2} - \tau - \left(\frac{\tau^2}{2} - \tau \right)' = \frac{\tau^2}{2} - 2\tau + 1,$$

$$Q_3(\tau) = \frac{\tau^3}{6} - \tau^2 + \tau - \left(\frac{\tau^3}{6} - \tau^2 + \tau \right)' = \frac{\tau^3}{6} - \frac{3\tau^2}{2} + 3\tau - 1,$$

что позволяет заметить общую закономерность

$$Q_n(\tau) = \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{k!} (-1)^{n-k} \tau^k. \quad (23.29)$$

Подчеркнем, что для этого не потребовалось весьма нетривиальное обобщение (23.20) для коэффициентов рекуррентных полиномов.

Подставив (23.29) в (23.27), получим

$$f(\xi, \tau) = e^{-\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} \tau^k}{(n-k)!(k!)^2}. \quad (23.30)$$

Полиномы $Q_n(\tau)$ также являются рекуррентными. Чтобы выяснить это, подставим (23.27) в (23.24) и выполним интегрирование по ξ :

$$1 - \omega(\xi, \tau) = \int_0^{\xi} f(\xi, \tau) d\xi = e^{-\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^{n+1}}{(n+1)!} Q_n(\tau), \quad (23.31)$$

что позволяет долю поглощенных частиц примеси представить в виде, аналогичном (23.5)

$$\omega(\xi, \tau) = 1 - e^{-\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} Q_{n-1}(\tau). \quad (23.32)$$

Подставив (23.32) в (23.1), выполнив интегрирование по τ , разложив $e^{-\xi}$ в ряд Маклорена и приравняв слева и справа коэффициенты при одинаковых степенях ξ , получим искомое рекуррентное соотношение

$$Q_n(\tau) = Q_{n-1}(0) - Q_{n-1}(\tau) - (-1)^{n-1} + \int_0^{\tau} Q_{n-1}(\tau) d\tau,$$

которое можно упростить

$$Q_n(\tau) = -Q_{n-1}(\tau) + \int_0^\tau Q_{n-1}(\tau) d\tau \quad (n=1, 2, \dots), \quad (23.33)$$

приняв во внимание, что согласно (23.29) $Q_n(0) = (-1)^n$. Непосредственно легко убедиться, что найденные ранее $Q_0(\tau)$, $Q_1(\tau)$, $Q_2(\tau)$, $Q_3(\tau)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению (23.33).

Связь плотности вероятности случайной величины с ее начальными моментами произвольных порядков [44; 45]

Выясним смысл введенных полиномов и природу симметрии плотности вероятности относительно перестановки аргументов. Для этого с помощью (23.1), не решая самого уравнения, найдем начальные статистические моменты координаты элементарного акта сорбции

$$v_n(\tau) = \int_0^\infty \xi^n f(\xi, \tau) d\xi. \quad (23.34)$$

С учетом (23.24) выполним в (23.34) интегрирование по частям:

$$U = \xi^n, \quad V = \int f(\xi, \tau) d\xi = -\omega(\xi, \tau),$$

$$v_n(\tau) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \left(-\xi^n \cdot \omega(\xi, \tau) \right) + n \cdot J_{n-1}(\tau), \quad (23.35)$$

где

$$J_k(\tau) = \int_0^\infty \xi^k \cdot \omega(\xi, \tau) d\xi. \quad (23.36)$$

Для вычисления несобственного интеграла $J_k(\tau)$, кроме вытекающего из общефизического смысла соотношения (23.24), потребуется еще одна (учитывающая специфику модели) связь между $f(\xi, \tau)$ и $\omega(\xi, \tau)$. Подставив (23.24) в (23.1) и выполнив дифференцирование по τ , получим

$$\omega'_\tau(\xi, \tau) = f(\xi, \tau) + f'_\tau(\xi, \tau). \quad (23.37)$$

С учетом (23.37) скорость изменения $J_k(\tau)$ представим в виде

$$J'_k(\tau) = \int_0^\infty \xi^k \omega'_\tau(\xi, \tau) d\xi = \int_0^\infty \xi^k [f(\xi, \tau) + f'_\tau(\xi, \tau)] d\xi = v_k(\tau) + v'_k(\tau). \quad (23.38)$$

Подставив (23.4) в (23.36) и выполнив n -кратное интегрирование по частям, найдем начальное условие для уравнения (23.38)

$$J_k(0) = k!. \quad (23.39)$$

С помощью (23.38), (23.39) вычислим

$$J_k(\tau) = \int_0^\tau v_k(\tau) d\tau + v_k(\tau) - v_k(0) + k!, \quad (23.40)$$

то есть несобственный интеграл в (23.36) сходится. Это значит, что в подынтегральном выражении $\omega(\xi, \tau)$ при больших ξ убывает быстрее, чем ξ^{-n} , и предел в (23.35) равен нулю. Согласно (23.35), (23.40) имеет место рекуррентное соотношение

$$\frac{1}{n} \cdot v_n(\tau) = \int_0^\tau v_{n-1}(\tau) d\tau + v_{n-1}(\tau) - v_{n-1}(0) + (n-1)!. \quad (23.41)$$

При $\tau=0$ из него следует $v_n(0) = n!$, т.е. последние два слагаемых в правой части (23.41) взаимно уничтожаются:

$$v_n(\tau) = n \cdot \left[v_{n-1}(\tau) + \int_0^\tau v_{n-1}(\tau) d\tau \right]. \quad (23.42)$$

Вместе с условием нормировки

$$v_0(\tau) = \int_0^\infty f(\xi, \tau) d\xi = 1 \quad (23.43)$$

соотношение (23.42) позволяет последовательно определить все $v_n(\tau)$ до любого номера:

$$v_1(\tau) = \tau + 1, \quad v_2(\tau) = \tau^2 + 4\tau + 2, \dots \quad (23.44)$$

Чтобы выявить общую закономерность, воспользуемся ранее полученным семейством полиномов (23.29), удовлетворяющих рекуррентному соотношению (23.33). Соотношения (23.33) и (23.42) имеют сходную структуру, что позволяет установить связь полиномов (23.29) с начальными моментами

$$Q_n(\tau) = \frac{1}{n!} v_n(-\tau) (-1)^n. \quad (23.45)$$

Подставив (23.29) в (23.45), получим зависимость от времени всех начальных моментов координаты элементарного акта сорбции

$$v_n(\tau) = (n!)^2 \sum_{k=0}^n \frac{\tau^k}{(k!)^2 (n-k)!}. \quad (n=0,1,2,\dots). \quad (23.46)$$

Непосредственно легко убедиться, что из (23.46) следуют частные случаи (23.44).

Из теории вероятностей известно, что знание всех моментов эквивалентно знанию закона распределения случайной величины. Подставив (23.45) в (23.27), в рассматриваемой задаче в этом можно убедиться непосредственно:

$$f(\xi, \tau) = e^{-\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\xi)^n}{(n!)^2} v_n(-\tau). \quad (23.47)$$

Разложения (23.5), (23.27) не позволяют непосредственно убедиться в нетривиальном свойстве (23.26). Симметрией относительно перестановки аргументов обладает их сумма, поэтому решение (23.1) будем искать в виде

$$\omega(\xi, \tau) = e^{-\xi-\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} g_n(\xi), \quad (23.48)$$

где $g_n(\xi)$ – новые (неизвестные) полиномы.

В частности, из (23.3), (23.4) следует, что

$$g_n(0) = 1, \quad g_0(\xi) = 1. \quad (23.49)$$

Для определения остальных подставим (23.48) в (23.1), выполним дифференцирование по ξ и τ , после чего сократим обе части равенства на $e^{-\xi-\tau}$:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} (g_n(\xi) - g_n'(\xi)) = \\ & = 1 + \int_0^{\tau} \left[-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} g_n(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} g_n(\xi) \right] d\tau. \end{aligned} \quad (23.50)$$

Очевидно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} g_n(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} g_{n+1}(\xi),$$

что после подстановки в левую часть (23.50) и интегрирования дает

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} (g_n(\xi) - g'_n(\xi)) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^{n+1}}{(n+1)!} (g_{n+1}(\xi) - g_n(\xi)). \quad (23.51)$$

С помощью (23.49) преобразуем сумму в левой части (23.51)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} (g_n(\xi) - g'_n(\xi)) &= g_0(\xi) - g'_0(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} (g_n(\xi) - g'_n(\xi)) = \\ &= 1 - 0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^{n+1}}{(n+1)!} (g_{n+1}(\xi) - g'_{n+1}(\xi)). \end{aligned} \quad (23.52)$$

Из равенства правых частей (23.51), (23.52) следует рекуррентное уравнение

$$g'_{n+1}(\xi) = g_n(\xi) \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (23.53)$$

позволяющее с помощью (23.49) последовательно вычислять любые $g_n(\xi)$.

Предварительно проинтегрируем (23.53) от 0 до ξ

$$g_{n+1}(\xi) - g_{n+1}(0) = \int_0^{\xi} g_n(\xi) d\xi,$$

или, с учетом первого равенства (23.49),

$$g_{n+1}(\xi) = 1 + \int_0^{\xi} g_n(\xi) d\xi. \quad (23.54)$$

Старт рекуррентной процедуре дает подстановка под интеграл в (23.54) $g_0(\xi) = 1$ (см. (23.49)). В результате найдем $g_1(\xi) = 1 + \xi$, которое проинтегрируем в (23.54) на втором шаге $g_2(\xi) = 1 + \xi + \xi^2/2$. Аналогично $g_3(\xi) = 1 + \xi + \xi^2/2 + \xi^3/6$, что позволяет заметить общую закономерность

$$g_n(\xi) = \sum_{k=0}^n \frac{\xi^k}{k!}. \quad (23.55)$$

Подставив (23.55) в (23.48) найдем

$$\omega(\xi, \tau) = e^{-\xi-\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{\xi^k}{k!} \quad (23.56)$$

и

$$\begin{aligned} f(\xi, \tau) &= -\omega'(\xi, \tau) = e^{-\xi-\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} \left(\sum_{k=0}^n \frac{\xi^k}{k!} - \sum_{k=1}^n \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!} \right) = \\ &= e^{-\xi-\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} \left(\sum_{k=0}^n \frac{\xi^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\xi^k}{k!} \right) = e^{-\xi-\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} \frac{\xi^n}{n!} = e^{-\xi-\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\tau \xi)^n}{(n!)^2}, \end{aligned} \quad (23.57)$$

явно выразив симметрию плотности вероятности $f(\xi, \tau)$ координаты ξ элементарного акта сорбции в момент времени τ относительно перестановки аргументов. При этом согласно (23.56) $\omega(\xi, \tau) \neq \omega(\tau, \xi)$.

То, что в правой части (23.57) получился одинарный ряд, а не двойной как в (23.30), существенно повышает скорость численных экспериментов.

Заметим, что в связи с постоянством скорости фильтрации координата элементарного акта сорбции пропорциональна времени жизни частицы примеси в фильтре. Очевидно, оно зависит от положения работающего слоя фильтра, характеризуемого математическим ожиданием $M\{\xi\} = v_1(\tau) = \tau + 1$ координаты элементарного акта сорбции (см. (23.44)). С учетом этого обстоятельства, если под $\xi \geq 0$ понимать смещение работающего слоя $M\{\xi\} - 1$, задаваемую правой частью (23.57) функцию $f(\theta/\gamma, \xi)/\gamma$ можно трактовать как плотность вероятности обезразмеренного времени жизни частицы примеси $\theta = \beta\gamma x/v = \xi\gamma$ в фильтре с данной степенью послойной отработки поглощительного ресурса. При этом γ^{-1} показывает, сколько порций заполняющей фильтр сплошной среды он может очистить.

С учетом симметрии $f(\tau, \xi)$ относительно перестановки аргументов (см. (23.57) начальные статистические моменты перемасштабированного обезразмеренного времени жизни частицы примеси $\tau = \theta/\gamma$ примут вид (23.46), в котором τ в соответствии с изложенным нужно заменить на ξ :

$$v_n(\xi) = (n!)^2 \sum_{k=0}^n \frac{\xi^k}{(k!)^2 (n-k)!} \quad (n=0,1,2,\dots). \quad (23.58)$$

Плотность вероятности τ связана с $v_n(\xi)$ соотношением, аналогичным (23.47):

$$f(\tau, \xi) = e^{-\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\tau)^n}{(n!)^2} v_n(-\xi), \quad (23.59)$$

что позволяет (см. (23.27)) связать начальные статистические моменты $v_n(\xi)$ с рекуррентными полиномами $P_n(\xi)$:

$$P_n(\xi) - P_n'(\xi) = \frac{1}{n!} v_n(-\xi) (-1)^n. \quad (23.60)$$

В справедливости (23.60) при конкретных n легко убедиться с помощью вышеприведенных выражений для $P_0(\xi)$, $P_1(\xi)$, $P_2(\xi)$, $v_0(\xi)$, $v_1(\xi)$, $v_2(\xi)$. Для всех $n \neq 0$ решение линейного дифференциального уравнения (23.60), удовлетворяющее начальным условиям (23.7), получается методом вариации произвольной постоянной

$$P_n(\xi) = -e^{\xi} \int_0^{\xi} e^{-\xi} \frac{1}{n!} v_n(-\xi) (-1)^n d\xi. \quad (23.61)$$

Если подставить разложение (23.58) $v_n(\xi)$ по степеням ξ под интеграл в (23.61), можно еще раз убедиться в справедливости выражения (23.20) для фигурирующих в (23.8) коэффициентов полиномов $P_n(\xi)$:

$$P_n(\xi) = \sum_{k=0}^n P_{nk} \xi^k = -n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n+k}}{(k!)^2 (n-k)!} e^{\xi} \int_0^{\xi} \xi^k e^{-\xi} d\xi. \quad (23.62)$$

Выполнив в (23.62) интегрирование по частям для $k = 0, 1, 2, 3$, можно заметить общую закономерность

$$e^{\xi} \int_0^{\xi} \xi^k e^{-\xi} d\xi = k! \left(e^{\xi} - \sum_{l=0}^k \frac{\xi^l}{l!} \right). \quad (23.63)$$

Подставив (23.63) в (23.62), получим

$$\sum_{k=0}^n P_{nk} \xi^k = -(-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{n! (-1)^k}{k! (n-k)!} \left(e^{\xi} - \sum_{l=0}^k \frac{\xi^l}{l!} \right) = -(-1)^n e^{\xi} \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k +$$

$$+\sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^{n+k} \sum_{l=0}^k \frac{\xi^l}{l!} = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^{n+k} \sum_{l=0}^k \frac{\xi^l}{l!}, \quad (23.64)$$

где учтено вытекающее из биномиального разложения свойство чисел сочетаний

$$\sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k 1^{n-k} = (1-1)^n = 0.$$

Правая часть (23.64) содержит $n-k$ слагаемых, содержащих ξ^k с коэффициентами $C_n^l (-1)^{n-l} / k!$ ($l = k, k+1, \dots, n$), поэтому

$$P_{nk} = \frac{1}{k!} \sum_{l=k}^n C_n^l (-1)^{n-l},$$

что совпадает с (23.20), но получено не путем не вполне прозрачного обобщения нескольких частных случаев, а в результате обоснованных и логически последовательных действий.

И в заключение запишем долю частиц примеси ν , доживающих в фильтре с $M\{\xi\} = \xi + 1$ до приведенного момента времени не меньшего τ :

$$\begin{aligned} \nu(\tau, \xi) &= 1 - \int_0^{\tau} f(\tau, \xi) d\tau = 1 - e^{-\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{(n!)^2} \int_0^{\tau} \tau^n e^{-\tau} d\tau = \\ &= 1 - e^{-\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{(n!)^2} n! \left(1 - e^{-\tau} \sum_{l=0}^n \frac{\tau^l}{l!} \right), \end{aligned} \quad (23.65)$$

где второе равенство следует из (23.57), а последнее получено с использованием (23.63). Продолжив упрощение (23.65) с помощью тождественных преобразований, получим для $\nu(\tau, \xi)$ выражение

$$\begin{aligned} \nu(\tau, \xi) &= 1 - e^{-\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \left(1 - e^{-\tau} \sum_{l=0}^n \frac{\tau^l}{l!} \right) = 1 - e^{-\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} + \\ &+ e^{-\xi-\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \sum_{l=0}^n \frac{\tau^l}{l!} = e^{-\xi-\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \sum_{l=0}^n \frac{\tau^l}{l!}, \end{aligned} \quad (23.66)$$

получающееся из (23.56) перестановкой аргументов ($\nu(\tau, \xi) = \omega(\xi, \tau)$), чего и следовало ожидать, в связи с симметрией последнего выражения в (23.57) и аналогичностью исходных равенств в (23.65) и (23.31).

**Асимптотика динамической сорбционной активности
при больших временах [37; 46–48]**

Согласно (23.4), (23.24) в начальный момент времени ($\tau = 0$) плотность вероятности координаты элементарного акта сорбции убывает по мере удаления от входа в фильтр по экспоненциальному закону

$$f(\xi, 0) = e^{-\xi}. \quad (23.67)$$

Чтобы выяснить, во что эволюционирует распределение (23.67) с ростом τ , используем зависимость (23.46) от времени начальных моментов координаты элементарного акта сорбции

$$\begin{aligned} v_1(\tau) &= 1 + \tau, & v_2(\tau) &= 2 + 4\tau + \tau^2, \\ v_4(\tau) &= 24 + 96\tau + 72\tau^2 + 16\tau^3 + \tau^4, \end{aligned} \quad (23.68)$$

$$v_3(\tau) = 6 + 18\tau + 9\tau^2 + \tau^3,$$

$$v_5(\tau) = 120 + 600\tau + 600\tau^2 + 200\tau^3 + 25\tau^4 + \tau^5. \quad (23.69)$$

Зная начальные моменты $v_n(\tau)$, нетрудно найти соответствующие центральные моменты, отвечающие искомому закону распределения ξ

$$\mu_n(\tau) = \int_0^{\infty} (\xi - v_1(\tau))^n f(\xi, \tau) d\xi. \quad (23.70)$$

Выполнив под знаком интеграла в (23.70) биномиальное разложение, получим после интегрирования и приведения подобных

$$\mu_n(\tau) = \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i C_n^{n-i} \cdot v_{n-i}(\tau) \cdot v_1^i(\tau) + (-1)^n (1-n) v_1^n(\tau). \quad (23.71)$$

В частности, из (23.68), (23.69) и (23.71) следует

$$\mu_3(\tau) = 2 + 6\tau, \quad \mu_4(\tau) = 9 + 36\tau + 12\tau^2, \quad (23.72)$$

$$\mu_2(\tau) = 1 + 2\tau, \quad \mu_5(\tau) = 44 + 220\tau + 120\tau^2. \quad (23.73)$$

Согласно (23.68) и (23.73)

$$v_1(\tau) = 1 + \tau = m(\tau), \quad (23.74)$$

$$\mu_2(\tau) = 1 + 2\tau = \sigma^2(\tau), \quad (23.75)$$

где $m(\tau)$ и $\sigma(\tau)$ – математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение координаты элементарного акта сорбции ξ .

Согласно (23.74), (23.75), при $\tau = 0$ среднее квадратическое отклонение совпадает с математическим ожиданием, как это и должно быть при экспоненциальном распределении случайной величины (см. (23.67)). Далее σ растет. Это означает, что график $f(\xi, \tau)$ не смещается как целое по мере отработки слоев продукта. Иными словами, меняется сам вид функции распределения. Существенно при этом, что $\sigma(\tau)$ растет медленнее, чем $m(\tau)$. Критическим является условие

$$3\sigma(\tau) \leq m(\tau), \quad (23.76)$$

по достижении которого патрон из полубесконечного превращается как бы в бесконечный, ибо левее точки $\xi = m(\tau) - 3\sigma(\tau)$ в соответствии с правилом трех сигм функция $f(\xi, \tau)$ практически не отличается от нуля. Такие времена будем называть большими. Согласно (23.74)–(23.76) наступают они при $\tau \geq 18$. Выполнение (23.18) приводит к новому качеству, так как экстремальность энтропии на всей числовой оси обеспечивается уже не экспоненциальным, а нормальным распределением случайной величины (см. раздел 14 и рисунок 23.5).

$$f(\xi, \tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} f_N(\xi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(\tau)}} e^{-\frac{(\xi - m(\tau))^2}{2\sigma(\tau)}}. \quad (23.77)$$

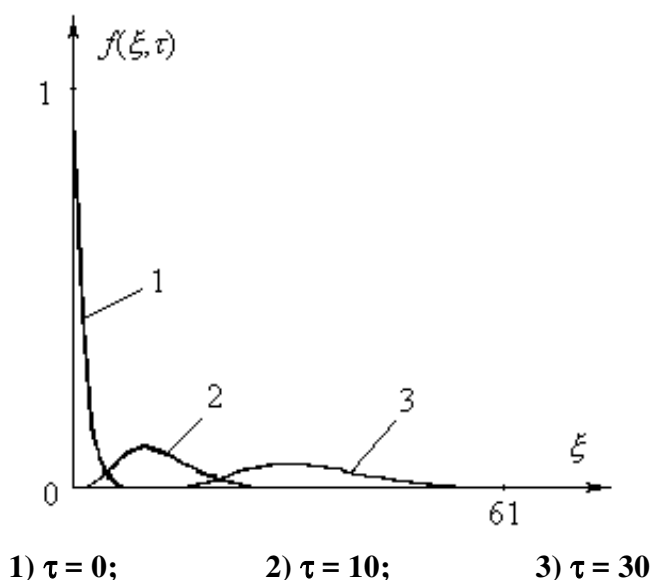


Рисунок 23.5. – Эволюция плотности вероятности элементарного акта сорбции CO_2

В справедливости последних рассуждений можно убедиться и непосредственно, вычислив с помощью (23.72), (23.75) асимметрию и эксцесс функции распределения:

$$A(\tau) = \frac{\mu_3(\tau)}{\sigma^3(\tau)} = \frac{6\tau + 2}{(2\tau + 1)^{3/2}} = \frac{3}{\sigma(\tau)} - \frac{1}{\sigma^3(\tau)}, \quad (23.78)$$

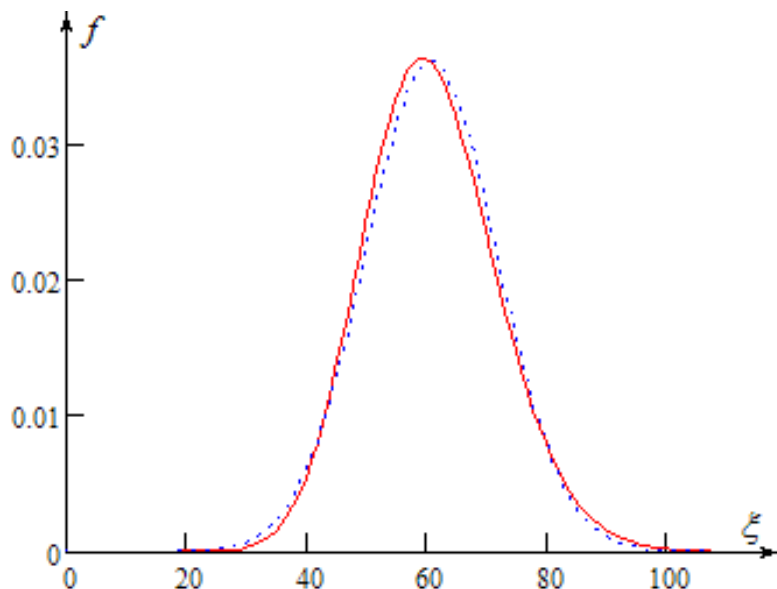
$$E(\tau) = \frac{\mu_4(\tau)}{\sigma^4(\tau)} - 3 = \frac{9 + 36\tau + 12\tau^2}{(2\tau + 1)^2} - 3 = \frac{24\tau + 6}{(2\tau + 1)^2} = \frac{12}{\sigma^2(\tau)} - \frac{6}{\sigma^4(\tau)}. \quad (23.79)$$

Видно, что асимметрия и эксцесс являются бесконечно малыми при $\tau \rightarrow \infty$, как это и должно быть в случае нормального распределения случайной величины.

Определим отклонение (рисунок 23.6) асимптотического выражения (23.77) от дифференциальной функции распределения при конечных временах:

$$f(\xi, \tau) = f_N(\xi, \tau)(1 + \varphi(\xi, \tau)), \quad (23.80)$$

где $\varphi(\xi, \tau)$ – относительная погрешность, возникающая при замене $f(\xi, \tau)$ нормальным законом.



$f(\xi, 60)$ – сплошная кривая; $f_N(\xi, 60)$ – пунктир

Рисунок 23.6. – Асимптотика дифференциальной функции распределения координаты элементарного акта сорбции при больших временах

Прежде всего получим уравнение относительно $\varphi(\xi, \tau)$. Подставив (23.80) в (23.25), получим с учетом (23.77) после сокращения на $f_N(\xi, \tau)$

$$\begin{aligned} & \varphi_{\xi\tau}'' + \varphi_{\xi}' \left(1 - \sigma^{-2}(\tau) + \sigma^{-2}(\tau)(\xi - m(\tau)) + \sigma^{-4}(\tau)(\xi - m(\tau))^2 \right) + \\ & \quad + \varphi_{\tau}' \left(1 - \sigma^{-2}(\tau)(\xi - m(\tau)) \right) + \\ & \quad + (1 + \varphi) \left(3\sigma^{-4}(\tau)(\xi - m(\tau)) - \sigma^{-6}(\tau)(\xi - m(\tau))^3 \right) = 0. \end{aligned} \quad (23.81)$$

Выражения в квадратных скобках таковы, что удобно перейти в систему координат, связанную с работающим слоем сорбента и в качестве характерного размера использовать среднеквадратическое отклонение

$$x(\xi, \tau) = (\xi - m(\tau)) / \sigma(\tau). \quad (23.82)$$

При этом в (23.81) останется явная зависимость только от x и σ :

$$\begin{aligned} & \varphi_{\xi\tau}'' + \varphi_{\xi}' \left(1 - \sigma^{-2}(\tau) + \sigma^{-1}(\tau)x + \sigma^{-2}(\tau)x^2 \right) + \\ & \quad + \varphi_{\tau}' \left(1 - \sigma^{-1}(\tau)x \right) + (1 + \varphi) \sigma^{-3}(\tau) (3x - x^3) = 0, \end{aligned} \quad (23.83)$$

т.е. в движущейся системе координат вся эволюция φ обусловлена только изменением σ :

$$\varphi_{\tau}' = \varphi_x' x_{\tau}' + \varphi_{\sigma}' \sigma_{\tau}' = \varphi_x' (-\sigma^{-1} - x\sigma^{-2}) + \varphi_{\sigma}' \sigma^{-1}, \quad (23.84)$$

где последнее равенство записано с учетом (23.82). Согласно (23.82) также имеет место равенство

$$\varphi_{\xi}' = \varphi_x' x_{\xi}' = \varphi_x' \sigma^{-1}. \quad (23.85)$$

Подставив (23.82), (23.84) и (23.85) в (23.83), получим

$$\begin{aligned} & -\varphi_{xx}'' \left(\sigma^{-2} + x\sigma^{-3} \right) + \varphi_{x\sigma}'' \sigma^{-2} + \varphi_x' \left(-2\sigma^{-3} + 2x^2\sigma^{-3} + x\sigma^{-2} \right) + \\ & \quad + \varphi_{\sigma}' \left(\sigma^{-1} - x\sigma^{-2} \right) = (1 + \varphi) \sigma^{-3} \left(x^3 - 3x \right). \end{aligned} \quad (23.86)$$

Решение (23.86) удобно искать в виде

$$\varphi(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x(\xi, \tau))}{\sigma^n(\tau)}, \quad (23.87)$$

где $\varphi_n(x)$ – некоторые функции, подлежащие определению.

Подставив (23.87) в (23.86) и сгруппировав слагаемые одинаковых порядков по σ^{-1} , приравняем их, по отдельности, нулю

$$\left. \begin{array}{l} \sigma^{-3} \left| \begin{array}{l} -\varphi_1'' + x\varphi_1' - \varphi_1 = x^3 - 3x \\ \sigma^{-4} \left| \begin{array}{l} -\varphi_2'' + \varphi_2'x - 2\varphi_2 = \varphi_1(x^3 - 4x) - \varphi_1'(2x^2 - 3) + x\varphi_1'' \\ \sigma^{-5} \left| \begin{array}{l} -\varphi_3'' + \varphi_3'x - 3\varphi_3 = \varphi_2(x^3 - 5x) - \varphi_2'(2x^2 - 4) + x\varphi_2'' \\ \sigma^{-6} \left| \begin{array}{l} -\varphi_4'' + \varphi_4'x - 4\varphi_4 = \varphi_3(x^3 - 6x) - \varphi_3'(2x^2 - 5) + x\varphi_3'' \end{array} \right. \\ \dots\dots\dots \\ \sigma^{-n-2} \left| \begin{array}{l} -\varphi_n'' + \varphi_n'x - n\varphi_n = \varphi_{n-1}(x^3 - (n+2)x) - \varphi_{n-1}'(2x^2 - n - 1) + x\varphi_{n-1}'' \end{array} \right. \\ \dots\dots\dots \end{array} \right. \end{array} \right\} \quad (23.88)$$

Полученная бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений позволяет развить итерационную процедуру, основанную на подстановке решения предыдущего уравнения в правую часть следующего. Из этого, а также структуры первого уравнения следует, что функции $\varphi_n(x)$ являются полиномами, старшая степень которых кратна трем:

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{3n} c_{nk} x^k, \quad (23.89)$$

где c_{nk} – неизвестные числовые коэффициенты.

Полезно также учесть, что согласно (23.87), (23.78), (23.79), (23.80) полиномы $\varphi_{2n+1}(x)$ содержат только нечетные степени x и дают вклад в асимметрию $f(\xi, \tau)$. В противном случае они бы давали вклад и в эксцесс, который, однако, не содержит нечетных степеней σ^{-1} (см. (23.79)).

Аналогично $\varphi_{2n}(x)$ – являются четными функциями x и обеспечивают эксцесс $f(\xi, \tau)$:

$$\varphi_{2n-1}(x) = \sum_{k=0}^{3n-2} c_{2n-1, 2k+1} x^{2k+1}, \quad \varphi_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{3n} c_{2n, 2k} x^{2k}. \quad (23.90)$$

В этом можно убедиться и непосредственно, подставив выражения (23.90) в соответствующие уравнения (23.88). Выполнив дифференцирование и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях n -го уравнения, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно искомых c_{nk} . К сожалению, получаемая таким образом система не определена и имеет бесконечное множество решений, отличающихся значениями одного произвольного параметра. По-видимому, эта неопределенность – следствие дифференцирования (23.1) при получении (23.25), что привело к потере информации, о граничном условии, использованном при выводе (23.1) (подробнее см. [42]). Чтобы определить систему уравнений относительно c_{nk} , ее надо дополнить еще одним линейно независимым уравнением, для получения которого можно использовать имеющуюся информацию о центральных моментах (см. (23.46), (23.71)). Проиллюстрируем изложенное двумя шагами упомянутой итерационной процедуры.

В соответствии с (23.90) $\varphi_1(x)$ содержит только нечетные степени x не старше третьей:

$$\varphi_1(x) = c_{11}x + c_{13}x^3. \quad (23.91)$$

Подставим это выражение в первое уравнение (23.88) и, выполнив дифференцирование, приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа:

$$\left. \begin{array}{l|l} x^3 & -c_{13} + 3c_{13} = 1 \\ x^1 & -6c_{13} - c_{11} + c_{11} = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow c_{13} = 0,5. \quad (23.92)$$

Видно, что полученная система состоит из линейно зависимых уравнений и имеет бесчисленное множество решений, отличающихся значением c_{11} . Его подберем так, чтобы матожидание x , которое можно интерпретировать как приведенный центральный момент первого порядка случайной

величины ξ (см. (23.82), (23.70)), тождественно равнялось нулю в соответствии со смыслом этой переменной:

$$\begin{aligned}
 0 = M(\tau) &= \int_0^{\infty} f_N(\xi, \tau) \left(1 + \sigma^{-1}(0,5x^3(\xi, \tau) + c_{11}x(\xi, \tau)) + \dots \right) x(\xi, \tau) d\xi = \\
 &= \int_{-m(\tau)/\sigma(\tau)}^{\infty} (2\pi)^{-1/2} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(x + \sigma^{-1}(0,5x^4 + c_{11}x^2) + \dots \right) dx. \quad (23.93)
 \end{aligned}$$

При больших временах первое слагаемое в больших скобках не дает вклада в матожидание, так как $m(\tau)/\sigma(\tau) \rightarrow \infty$ (см. (23.74), (23.75)), и возникает интеграл от нечетной функции в симметричных пределах. С учетом этого обстоятельства из (23.93) следует

$$c_{11} = -0,5 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} x^4 dx \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} x^2 dx = -\frac{3}{2}. \quad (23.94)$$

Определяемая формулами (23.91), (23.92), (23.94) поправка хорошо описывает отклонение функции распределения $f(\xi, \tau)$ от нормального закона (рисунок 23.7, пунктирная кривая).

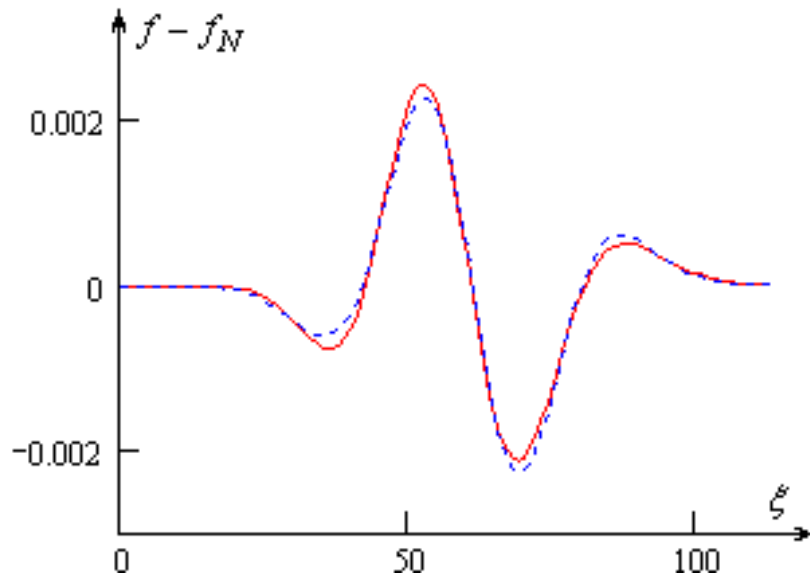


Рисунок 23.7. – Отклонение $f(\xi, 60)$ от нормального закона (сплошная кривая) и вклад в него поправки первого порядка по σ^{-1} (пунктир)

Для второго шага итерационной процедуры подставим найденную

$$\varphi_1(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^3 \quad (23.95)$$

в правую часть второго уравнения (23.88). В результате после дифференцирования и приведения подобных получим уравнение для определения

$$-\varphi_2'' + \varphi_2'x - 2\varphi_2 = 0,5(x^6 - 13x^4 + 33x^2 - 9). \quad (23.96)$$

Его решение будем искать в виде четного многочлена шестой степени. Опять применив метод неопределенных коэффициентов, получим

$$\varphi_2(x) = c_{20} + c_{22}x^2 + \frac{1}{8}x^6 - \frac{11}{8}x^4 \quad (23.97)$$

и уравнение

$$c_{20} + c_{22} = 9/4, \quad (23.98)$$

связывающее коэффициенты c_{20} и c_{22} . Дополним (23.98) следствием из определения дисперсии при $\tau \rightarrow \infty$ ²¹:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \left(c_{20}x^2 + c_{22}x^4 + \frac{1}{8}(x^8 - 11x^6) \right) dx = 0. \quad (23.99)$$

Фигурирующие в (23.99) интегралы вычисляются дифференцированием по параметру (см. (14.17))

$$I_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2m} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m-1) \quad (m=1,2,3,\dots), \quad (23.100)$$

что дает искомую связь

$$c_{20} + 3c_{22} = 15/2 \quad (23.101)$$

и позволяет, решив систему (23.98), (23.101)

$$c_{20} = -3/8, \quad c_{22} = 21/8, \quad (23.102)$$

завершить определение $\varphi_2(x)$ (см. (23.97), (23.102)).

²¹ Нулевое приближение обеспечивает точное значение дисперсии, вклад первого приближения равен нулю в силу нечетности $\varphi_1(x)$.

Если в (23.78), (23.79) и (23.87) пренебречь слагаемыми третьего и более высоких порядков по σ^{-1} , то нечетную часть относительной погрешности при замене $f(\xi, \tau)$ нормальным законом (23.77) можно связать с асимметрией, а четную – с эксцессом функции распределения

$$\begin{aligned} \varphi(\xi, \tau) \approx & \frac{A(\tau)}{6} \left(x^3(\xi, \tau) - 3x(\xi, \tau) \right) + \\ & + \frac{E(\tau)}{96} \left(-3 + 21x^2(\xi, \tau) - 11x^4(\xi, \tau) + x^6(\xi, \tau) \right). \end{aligned} \quad (23.103)$$

Благодаря фигурирующему в (23.80) быстро убывающему множителю $f_N(\xi, \tau)$, в актуальном диапазоне значений модуль x ограничен, что при больших временах (см. (23.78), (23.79)) обеспечивает малость правой части (23.103). Построенная с помощью (23.80), (23.87), (23.97), (23.102) пунктирная кривая $f_N \sigma^{-2} \varphi_2$ (рисунок 23.8) адекватно приближает отклонение Δ_1 первого приближения $f_N(1 + \sigma^{-1} \varphi_1)$ от $f(\xi, \tau)$.

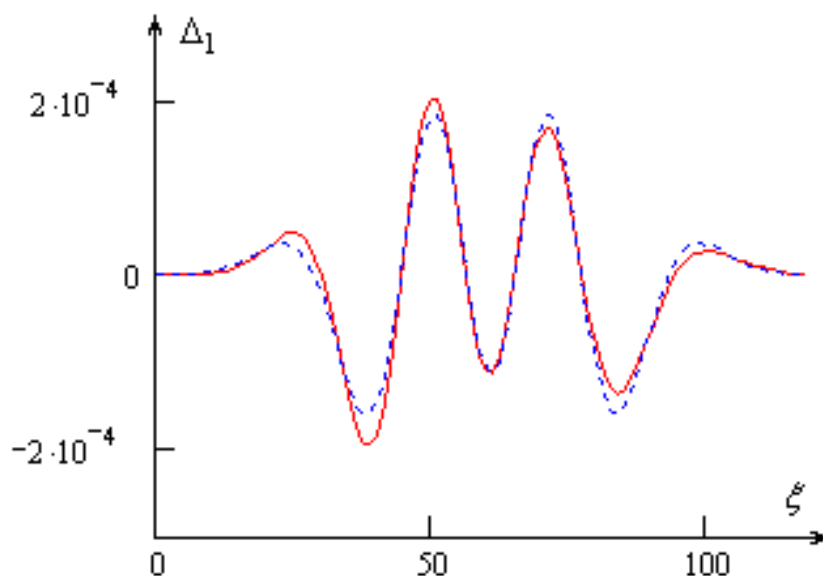


Рисунок 23.8. – Отклонение $f(\xi, 60)$ от своего первого приближения (сплошная кривая) и вклад в него эксцесса (пунктир)

Описанная итерационная процедура позволяет последовательно определить все $\varphi_n(x)$ до какого угодно номера. Ее недостатком является некоторая идеологическая непоследовательность. Развивая теоретико-вероятностный подход к моделированию динамической сорбционной активности, следует обойтись без решения дифференциальных уравнений (23.88). Тем более, что знание всех моментов случайной величины (а они нами уже определены (см. (23.46) эквивалентно знанию ее функции распределения

(см. (23.47)). То есть $\varphi_n(x)$ с любым номером должна определяться с помощью начальных или связанных с ними (см. (23.71)) центральных моментов ξ без развития итерационной процедуры. Покажем, как это делается.

Фигурирующие в (23.90) коэффициенты c_{nk} подберем так, чтобы выполнялись тождества

$$\frac{\mu_i(\tau)}{\sigma(\tau)^i} \equiv \int_0^{\infty} \left(\frac{\xi - m(\tau)}{\sigma(\tau)} \right)^i f(\xi, \tau) d\xi \quad (i = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad (23.104)$$

в левой части которых, фигурируют найденные ранее центральные моменты ξ . Подставив (23.77), (23.80), (23.87) в (23.104) и выполнив замену переменной (23.82), получим

$$\frac{\mu_i(\tau)}{\sigma(\tau)^i} \equiv \int_{\frac{m(\tau)}{\sigma(\tau)}}^{\infty} x^i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)}{\sigma^n(\tau)} \right) dx. \quad (23.105)$$

Тождество (23.105) должно выполняться в любой, в том числе и в бесконечно удаленный момент времени, удобный для вычисления фигурирующих в (23.105) несобственных интегралов. При этом на нижнем пределе возникает $-\infty$, так как математическое ожидание $m(\tau)$ координаты элементарного акта сорбции растет со временем быстрее ее среднеквадратического отклонения $\sigma(\tau)$ (см. (23.74), (23.75)). С учетом этого обстоятельства (23.105) примет вид

$$\frac{\mu_i(\tau)}{\sigma(\tau)^i} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x^i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)}{\sigma^n(\tau)} \right) dx. \quad (23.106)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\sigma(\tau)$ в левой и правой частях (23.106) будем для четных i получать по одному уравнению относительно всех $\varphi_n(x)$ с четными номерами, а при нечетных i – по одному уравнению относительно всех $\varphi_n(x)$ с нечетными номерами. Меняя i , можно для любой $\varphi_n(x)$ записать нужное количество уравнений, достаточное для определения ее коэффициентов. Иными словами, соотношение (23.106) позволяет вычислять $\varphi_n(x)$ с любым номером, не пользуясь итерационной процедурой. Например, минуя вычисление $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, найдем сразу $\varphi_3(x)$ (см. (23.90):

$$\varphi_3(x) = c_{31}x + c_{33}x^3 + c_{35}x^5 + c_{37}x^7 + c_{39}x^9. \quad (23.107)$$

Интегралы в правой части (23.106) при коэффициентах c_{3k} будут отличны от нуля для нечетных i . С учетом вида правой части (23.107) нам потребуется пять линейно независимых уравнений (23.106) с нечетными номерами ($i = 1, 3, 5, 7, 9$). При этом в левой части (23.106) удобно выделить явную зависимость центральных моментов от $\sigma(\tau)$. Например, из (23.72), (23.73), (23.75) следует

$$\frac{\mu_3(\tau)}{\sigma(\tau)^3} = \frac{3}{\sigma(\tau)} - \frac{1}{\sigma(\tau)^3}, \quad \frac{\mu_5(\tau)}{\sigma(\tau)^5} = \frac{30}{\sigma(\tau)} + \frac{50}{\sigma(\tau)^3} - \frac{36}{\sigma(\tau)^5}. \quad (23.108)$$

Аналогично, предварительно вычислив с помощью (23.46), (23.71) $\mu_7(\tau)$ и $\mu_9(\tau)$, получим

$$\frac{\mu_1(\tau)}{\sigma(\tau)^1} = 0, \quad \frac{\mu_7(\tau)}{\sigma(\tau)^7} = \frac{315}{\sigma(\tau)} + \frac{2415}{\sigma(\tau)^3} + \frac{714}{\sigma(\tau)^5} - \frac{1590}{\sigma(\tau)^7}, \quad (23.109)$$

$$\frac{\mu_9(\tau)}{\sigma(\tau)^9} = \frac{3780}{\sigma(\tau)} + \frac{74340}{\sigma(\tau)^3} + \frac{213192}{\sigma(\tau)^5} - \frac{63792}{\sigma(\tau)^7} - \frac{94024}{\sigma(\tau)^9}. \quad (23.110)$$

Приравняв в упомянутых пяти уравнениях коэффициенты при $\sigma(\tau)^{-3}$ слева и справа, получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^1 e^{-\frac{x^2}{2}} \varphi_3(x) dx = 0, & \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} \varphi_3(x) dx = -1, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^5 e^{-\frac{x^2}{2}} \varphi_3(x) dx = 50, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^7 e^{-\frac{x^2}{2}} \varphi_3(x) dx = 2415, & \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^9 e^{-\frac{x^2}{2}} \varphi_3(x) dx = 74340 \end{aligned} \right\}. \quad (23.111)$$

Подставив в (23.111) разложение (23.107) и выполнив интегрирование по x , получим записанную в матричной форме систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $c_{3\ 2k+1}$ ($k = 0, 1, \dots, 4$):

$$\begin{pmatrix} I_1 & I_2 & \dots & I_5 \\ I_2 & I_3 & \dots & I_6 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ I_5 & I_6 & \dots & I_9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{31} \\ c_{33} \\ c_{35} \\ c_{37} \\ c_{39} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 50 \\ 2415 \\ 74340 \end{pmatrix}, \quad (23.112)$$

где I_m задается (23.100).

Единственным решением (23.112) является набор чисел

$$c_{31} = \frac{23}{16}, \quad c_{33} = -\frac{31}{6}, \quad c_{35} = \frac{25}{8}, \quad c_{37} = -\frac{1}{2}, \quad c_{39} = \frac{1}{48}. \quad (23.113)$$

Подчеркнем, что система для их получения оказалась определенной, и при этом мы никак не пользовались информацией о $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$. В качестве проверки можно подставить функцию $\varphi_3(x)$, задаваемую (23.107), (23.113), в третье уравнение (23.88) и с помощью (23.97), (23.102) непосредственно убедиться, что найденная $\varphi_3(x)$ обращает его в тождество.

Аналогично определяются коэффициенты полинома $\varphi_4(x)$. В этом случае интегралы (23.106) при соответствующих коэффициентах будут отличны от нуля для четных i . Потребуется зависимость от σ семи центральных моментов $\mu_i(\tau)$ с четными номерами ($i = 0, 2, 4, \dots, 12$) и приравнять будем коэффициенты при σ^{-4} в левой и правой частях (23.106). В результате получим

$$\varphi_4(x) = \frac{49}{128} - \frac{279}{64}x^2 + \frac{1373}{128}x^4 - \frac{653}{96}x^6 + \frac{183}{128}x^8 - \frac{7}{64}x^{10} + \frac{1}{384}x^{12}. \quad (23.114)$$

В заключение осталось обсудить вопрос о максимальной степени полиномов $\varphi_n(x)$. Соотношения (23.90) были получены исходя из структуры уравнений (23.88). И эта информация использовалась при вычислении коэффициентов c_{nk} методом моментов, так как было заранее известно, сколько уравнений (23.106) потребуется для определения данной $\varphi_n(x)$. В принципе, без этой предварительной информации можно обойтись, опираясь только на алгебраические соображения. Например, при вычислении $\varphi_1(x)$ формально добавим к правой части (23.91) слагаемое более высокой нечетной степени, чем третья:

$$\varphi_1(x) = c_{11}x + c_{13}x^3 + c_{15}x^5. \quad (23.115)$$

Теперь для определения неизвестных коэффициентов потребуется три уравнения (23.106) с нечетными номерами. В их левые части попадут соответственно выражения (23.108) и первое из (23.109). Приравняв слева и справа в упомянутых уравнениях коэффициенты при $\sigma(\tau)^{-1}$, вместо (23.112) получим систему

$$\begin{pmatrix} I_1 & I_2 & I_3 \\ I_2 & I_3 & I_4 \\ I_3 & I_4 & I_5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{13} \\ c_{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 30 \end{pmatrix}. \quad (23.116)$$

Выполнив с помощью (23.100) интегрирование по x , покажем линейную зависимость строк третьего вспомогательного определителя:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 15 & 3 \\ 15 & 105 & 30 \end{vmatrix} = 3 \cdot 15 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 15 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 10 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 15 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

То есть в соответствии с теоремой Крамера $c_{15} = 0$, и мы (см. (23.115)) опять возвращаемся к выражению (23.91).

24. ПРИНЦИП ПЕСОЧНЫХ ЧАСОВ В НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ ДИНАМИКИ СОРБЦИИ [43]

Математические сложности моделирования природных и технологических процессов связаны с использованием неадекватного инструментария, плохо учитывающего суть изучаемого явления, и неправильным выбором аргументов функций, описывающих его эволюцию. Например, динамика сорбции углекислого газа при регенерации воздуха в изолирующем дыхательном аппарате должна рассматриваться как случайный процесс [47], а не только как задача математической физики [49]. Это позволяет подключить мощный дополнительный ресурс в виде основных положений теории вероятностей и информации и полностью уйти от проблемы нестационарных граничных условий. Для этого достаточно отказаться от времени как абстрактного аргумента и возраст (функциональное состояние) регенеративного патрона дыхательного мерить количеством проследовавших в него молекул CO_2 .

В начале работы дыхательного аппарата, когда поглотительный ресурс кислородсодержащего продукта практически не тронут и любая отличная от нуля концентрация углекислого газа не является равновесной, продолжительность работы регенеративного патрона определяется лишь

количеством поступивших в него молекул CO_2 . Если их нет в фильтруемом воздухе, время с точки зрения регенеративного патрона вообще стоит.

Поэтому, чтобы обойти проблему нестационарных граничных условий, для определения функционального возраста патрона можно использовать принцип песочных часов, используя в качестве аргумента количество молекул CO_2 , поступивших на вход патрона к моменту времени t :

$$N(t) = Q \int_0^t W(0,t) dt, \quad (24.1)$$

где Q – объемный расход воздуха через регенеративный патрон (постоянный при данном режиме работы аппарата, определяемом уровнем физической нагрузки человека);

$W(0,t)$ – объемная концентрация углекислого газа на входе в регенеративный патрон.

Согласно [43] (см. также раздел 23) при наличии стационарных граничных условий ($W(0,t) = W_0$) концентрация углекислого газа задается соотношениями

$$f(\xi, \tau) = e^{-\xi - \tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi \tau)^n}{(n!)^2}, \quad (24.2)$$

$$\omega(\xi, \tau) = \int_{\xi}^{\infty} f(\xi, \tau) d\xi = e^{-\xi - \tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{\xi^k}{k!}, \quad (24.3)$$

где $f(\xi, \tau)$ – плотность вероятности координаты элементарного акта сорбции;

$\omega(\xi, \tau) = W(\xi, \tau)/W_0$ – приведенная концентрация молекул CO_2 ;

ξ и τ – соответственно обезразмеренные координата и время, связанные с обычными переменными соотношениями

$$\xi = x\beta/v, \quad \tau = \beta\gamma t, \quad (24.4)$$

где v – скорость фильтрации выдыхаемого воздуха;

β и γ – феноменологические постоянные, характеризующие скорость хемосорбции CO_2 и ее ресурс [50];

x – расстояние от входа в патрон.

Как известно, распределение пробоев при данном числе стрелков не зависит от продолжительности залпа. Поэтому, чтобы использовать полученное для стационарных граничных условий решение (24.2)–(24.4),

будем считать, что концентрация CO_2 на входе в патрон была такой же, как и в последний (текущий) момент, но в течение иного промежутка времени

$$t^*(t) = \frac{N(t)}{QW(0,t)} = \frac{1}{W(0,t)} \int_0^t W(0,t) dt, \quad (24.5)$$

ибо масштабom при этом является мгновенный расход молекул CO_2 .

Таким образом, проблема неравномерности поступления CO_2 решена пересчетом по формуле (24.5) второго аргумента ω в каждый момент времени, что при наличии вида $W(0,t)$ означает полное решение задачи:

$$W(x,t) = W(0,t)\omega(\xi(x), \tau^*(t)), \quad (24.6)$$

где

$$\tau^*(t) = \tau(t^*(t)). \quad (24.7)$$

Рассуждения, с помощью которых получены формулы (24.5)–(24.7), не являются строгими, ибо скорость сорбции определяется концентрационным напором [51] и зависит от закона изменения $W(0,t)$ [38]. Однако в начале работы дыхательного аппарата погрешность в соответствии с изложенным ранее должна быть небольшой. Чтобы убедиться в этом, мысленно разделим патрон на две части в точке с координатой x . Если на входе в первую часть поддерживается постоянная концентрация CO_2 , то на входе во вторую она медленно растет по закону (24.2)–(24.4) в связи с исчерпанием ресурса первой части патрона:

$$W(x,t) = W_0 \omega(\xi(x), \tau(t)). \quad (24.8)$$

Приняв для второй части патрона x за начало отсчета координаты, вместо (24.5) получим

$$t^*(t,x) = \frac{N(t,x)}{QW(x,t)} = \frac{1}{W(x,t)} \int_0^t W(x,t) dt. \quad (24.9)$$

или, умножив (24.9) на $\beta\gamma W(x,t)/W_0$,

$$\tau^*(\tau, \xi) = \frac{1}{\omega(\xi, \tau)} \int_0^\tau \omega(\xi, \tau) d\tau, \quad (24.10)$$

где $\tau^*(\tau, \xi) = \beta\gamma t^*(t,x)$.

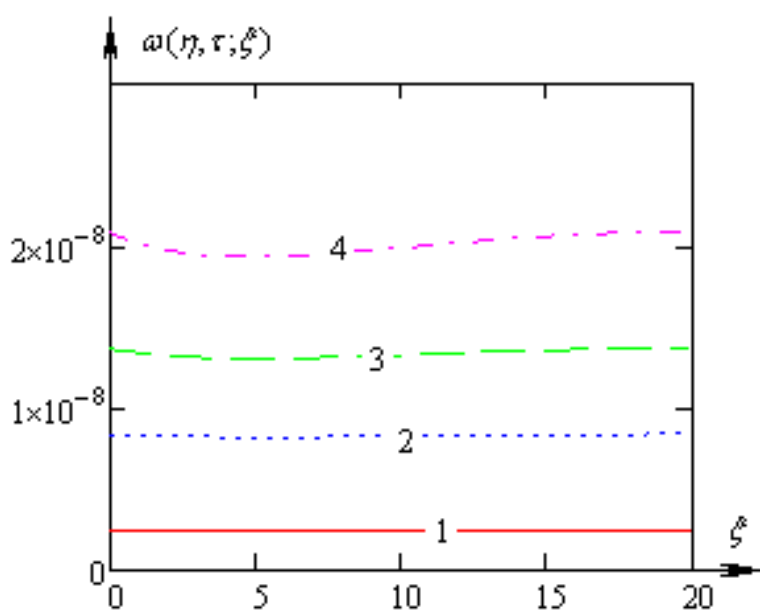
При этом проскок через регенеративный патрон, согласно (24.6), будет равен

$$W(L,t)/W_0 = \omega(\eta, \tau) = \omega(\xi, \tau)\omega(\eta - \xi, \tau^*(\tau, \xi)) = \omega(\eta, \tau; \xi), \quad (24.11)$$

где $\eta = \beta L/v$ – безразмерная длина патрона, связанная с обычной длиной L соотношением (24.3);

ξ – безразмерная координата точки, разделяющей патрон на две части.

Численные расчеты на основе формул (21.1), (21.10), (21.11) подтверждают (рисунок 24.1), что при малых τ проскок не зависит от ξ , поскольку разделение патрона на части было чисто формальным. Это значит, что в начале работы дыхательного аппарата формализм (24.5)–(24.7), основанный на принципе песочных часов, вполне применим.



1) $\tau = 0,01$; 2) $\tau = 0,1$; 3) $\tau = 0,15$; 4) $\tau = 0,2$

Рисунок 24.1. – Зависимость проскока CO_2 через патрон длиной $\eta = 20$ как функция координаты точки его разрезания в различные моменты времени

Мощность источников экзотермического тепла в патроне со скачком диаметра гранул кислородсодержащего продукта

Хемосорбция углекислого газа кислородсодержащим продуктом на основе надпероксида калия сопровождается значительным выделением экзотермического тепла [52]. Чтобы предотвратить спекание гранул в лобовых

(подвергающихся максимальному концентрационному напору) слоях кислородсодержащего продукта, необходимо снизить скорость процесса:

$$\beta \rightarrow \alpha \cdot \beta \quad (\alpha < 1), \quad (24.12)$$

для чего можно увеличить диаметр гранул d_0 до значения $d_1 = d_0 / \sqrt{\alpha}$, ибо лимитирующей стадией процесса хемосорбции является диффузия молекул CO_2 внутрь пористых гранул [53], а ее скорость обратно пропорциональна квадрату их диаметра [54]. В результате проскок через первую часть патрона возрастет:

$$\omega l(\xi, \tau) = \omega(\alpha\xi, \alpha\tau) \quad (\xi < \zeta), \quad (24.13)$$

где ζ – обезразмеренная координата скачка диаметра гранул.

Чтобы компенсировать снижение динамической сорбционной активности всего патрона, гранулы его второй части ($\xi < \zeta$) можно уменьшить:

$$(\delta > 1) d_2 \sim d_0 / \sqrt{\delta}, \quad \beta \rightarrow \delta \cdot \beta \quad (\delta > 1). \quad (24.14)$$

Это не приведет к спеканию второй части, ибо концентрационный напор углекислого газа там снижен работой лобовых слоев. По мере исчерпания их поглотительного ресурса концентрация CO_2 на входе во вторую часть патрона будет монотонно возрастать. В соответствии с (24.11), (24.14), (24.3) концентрация углекислого газа во второй части патрона ($\xi < \zeta$) будет спадать по закону

$$\omega 2(\xi, \tau) = \omega 1(\zeta, \tau) \omega(\delta(\xi - \zeta), \delta \tau l^*(\tau, \zeta)), \quad (24.15)$$

в котором в соответствии с (24.10), (24.13)

$$\tau l^*(\tau, \xi) = \frac{1}{\omega(\alpha\xi, \alpha\tau)} \int_0^\tau \omega(\alpha\xi, \alpha\tau) d\tau. \quad (24.16)$$

Сшив зависимости (24.13), (24.15) с помощью θ -функций Хевисайда, получим распределение концентрации углекислого газа во всем патроне ($0 < \xi < \eta$):

$$\begin{aligned} \omega 3(\xi, \tau) = & \theta(\zeta - \xi) \omega(\alpha\xi, \alpha\tau) + \\ & + \theta(\xi - \zeta) \omega(\alpha\zeta, \alpha\tau) \omega(\delta(\xi - \zeta), \delta \tau l^*(\tau, \zeta)). \end{aligned} \quad (24.17)$$

Продифференцировав (24.17) по ξ (см. (24.3)), получим плотность вероятности элементарного акта сорбции в патроне со скачком диаметра гранул

$$f_3(\xi, \tau) = \theta(\zeta - \xi)\alpha f(\alpha\xi, \alpha\tau) + \theta(\xi - \zeta)\omega(\alpha\zeta, \alpha\tau)\delta f(\delta(\xi - \zeta), \delta\tau l^*(\tau, \zeta)), \quad (24.18)$$

где f и ω как функции своих аргументов задаются полученными для однородно снаряженного патрона формулами (24.2) и (24.1) соответственно.

Из уравнения неразрывности $\partial U/\partial t = -v\partial W/\partial x$, в котором $U(x, t)$ – объемная концентрация поглощенных молекул CO_2 , и (24.4) следует, что $\partial U(x, t)/\partial t = \beta W_0 f(\xi(x), \tau(t))$. То есть плотность вероятности координаты элементарного акта сорбции пропорциональна мощности источников экзотермического тепла единицы объема кислородсодержащего продукта. С учетом этого обстоятельства методика определения места и величины скачка диаметра гранул сводится к следующему. Размер гранул на входе в регенеративный патрон следует увеличивать до тех пор, пока пик мощности (рисунок 24.2) не снизится до уровня предотвращения спекания в самом тяжелом режиме эксплуатации дыхательного аппарата (при максимальной физической нагрузке человека). Вычислив соответствующее такому диаметру α , значение δ подберем из условия равенства пиков мощности на входах в первую и вторую части патрона (рисунок 24.2), после чего с помощью (24.14) вычислим диаметр гранул во второй части патрона. Координата ζ скачка диаметра гранул – минимальная из обеспечивающих неспекание гранул на входе во вторую часть патрона. При этом проскок CO_2 через весь патрон (даже без учета предотвращения спекания гранул) оказывается ниже, чем в однородно снаряженном патроне.

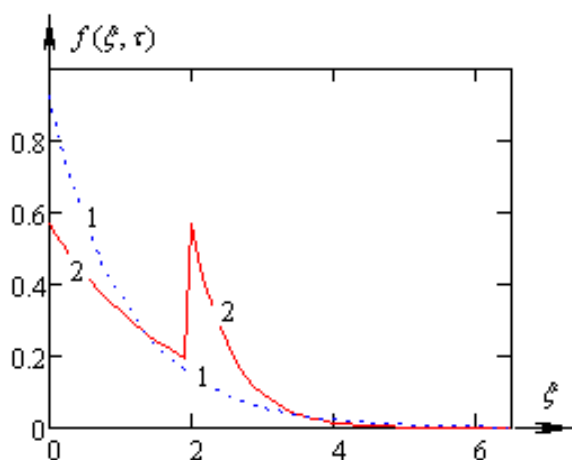


Рисунок 24.2. – Плотность мощности источников экзотермического тепла при $\tau = 0,08$ в однородно снаряженном патроне (1) и в патроне со скачком диаметра гранул (2)

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Ехилевский, С.Г. Пересечение плоскостей, формулы Крамера и теорема Кронекера-Капелли / С.Г. Ехилевский, В.В. Пак, Т.П. Фоменко // Сб. науч.-метод. работ каф. высш. математики / Донец. гос. техн. ун-т. – Донецк, 1994. – С. 15–18.
2. Ехилевский, С.Г. Исследование и построение кривых второго порядка с использованием теории инвариантов / С.Г. Ехилевский, В.В. Малащенко // Сб. науч.-метод. тр. / Донец. нац. техн. ун-т. – Донецк : ДонНТУ, 2004. – Вып. 2. – С. 81–93.
3. Ильин, В.А. Аналитическая геометрия / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М. : Наука, 1971.
4. Клетеник, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д.В. Клетеник. – М. : Гостехиздат, 1954.
5. Ехилевский, С.Г. Решение Феррари алгебраических уравнений четвертой степени / С.Г. Ехилевский, Т.П. Фоменко, А.А. Медовникова // Сб. науч.-метод. тр. / Донец. нац. техн. ун-т. – Донецк : ДонНТУ, 2004. – Вып. 2. – С. 43–46.
6. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1968.
7. Ехилевский, С.Г. Применение формулы Тейлора в области расходимости соответствующего степенного ряда / С.Г. Ехилевский, Т.П. Фоменко // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2004. – № 11. – С. 29–33.
8. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления / Н.С. Пискунов – М. : Наука, 1985. – 430 с.
9. Ехилевский, С.Г. О структуре вузовского курса высшей математики / С.Г. Ехилевский, В.В. Пак, Т.П. Фоменко // Сб. науч.-метод. работ каф. высш. математики / Донец. гос. техн. ун-т. – Донецк, 1994. – С. 3–7.
10. Ехилевский, С.Г. Построение сложных поверхностей с учетом поля градиентов / С.Г. Ехилевский, В.И. Пилюгин // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2005. – № 4. – С. 47–50.
11. Ехилевский, С.Г. Гармонический анализ экспериментальных зависимостей / С.Г. Ехилевский // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2007. – № 3. – С. 55–60.
12. Ланина, Е.Г. Ряды Фурье / Е.Г. Ланина, В.В. Подъяпольский – М. : НОУ «Современный Гуманитарный Институт», 2001. – 373 с.

13. Ехилевский, С.Г. / О спектральной плотности периодических процессов / С.Г. Ехилевский // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2007. – № 9. – С. 85–88.
14. Романовский П.П. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа / П.П. Романовский. – М. : Наука, 1973. – 336 с.
15. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике / В.С. Владимиров. – М. : Наука, 1979.
16. Дирак, П. Основы квантовой механики / П. Дирак. – М. – Л. : Онти. Глав. ред. техн.-теоретич. лит-ры, 1937. – 320 с.
17. Ехилевский, С.Г. Энергетические парадоксы в теории колебаний / С.Г. Ехилевский, И.В. Вилкова // Проблемы проектирования и производства радиоэлектронных средств : сб. материалов III Междунар. науч.-техн. конф. – Новополоцк, 2004. – С. 221–224.
18. Бабаков, И.М. Теория колебаний / И.М. Бабаков. – М. : Наука, 1968. – 650 с.
19. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика : в 10 т. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М. : Наука, 1973. – Т. 1 : Механика. – 208 с.
20. Ехилевский, С.Г. Информационные аспекты теоремы Ляпунова / С.Г. Ехилевский, В.В. Пак // Наукові праці Донецького державного технічного університету. – 2000. – Вып. 16. – С. 222–234.
21. Ехилевский, С.Г. N -мерный случай задачи о встрече / С.Г. Ехилевский, Т.С. Рудькова // Информационные технологии в науке, образовании и производстве (ИТНОП-2018) : сб. трудов VII Междунар. науч.-техн. конф., Белгород, 17–19 окт. 2018 г. – Белгород, 2018. – С. 228–231.
22. Гельгор, А.Л. Теоретико-информационные основы телекоммуникационных систем : учеб. пособие / А.Л. Гельгор, Е.А. Попов. – СПб. : Изд-во политехн. ун-та, 2013. – 288 с.
23. Гмурман, В.Е. Теория вероятности и математическая статистика / В.Е. Гмурман. – М. : Высшая школа, 2003. – 479 с.
24. Ехилевский, С.Г. Вариационный подход к получению дифференциальной функции распределения / С.Г. Ехилевский, В.В. Малашенко // Сб. науч.-метод. тр. / Донец. нац. техн. ун-т. – Донецк : ДонНТУ, 2004. – Вып. 2. – С. 112–119.
25. Ехилевский, С.Г. Экстремальность энтропии, формула Стирлинга и закон больших чисел / С.Г. Ехилевский, Т.С. Рудькова, О.В. Голубева // Прикладная математика и информатика: современные исследования в области естественных и технических наук : материалы IV науч.-практ. междунар.

конф. (школы-семинара) молодых ученых, Тольятти, 23–25 апр. 2018 г. / Тольятт. гос. ун-т. – Тольятти, 2018. – Ч. 1. – С. 461–464.

26. Ехилевский, С.Г. Получение плотности вероятности системы зависимых нормально распределенных величин / С.Г. Ехилевский, И.В. Вилкова // Сб. науч.-метод. тр. / Донец. нац. техн. ун-т. – Донецк, 2004. – Вып. 2. – С. 151–152.

27. Курс физики / Б.М. Яворский [и др.]. – М. : Высш. шк., 1965. – Т. 1 – 376 с.

28. Теоретико-вероятностный подход к решению уравнения диффузии / С.Г. Ехилевский [и др.]. – Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2015. – № 4. – С. 94–105.

29. Бугров, Я.С. Высшая математика / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М. : Наука, 1989 г. – 464 с.

30. Гихман, И.И. Теория вероятностей и математическая статистика / И.И. Гихман, А.В. Скороход, М.И. Ядренко. – 1979 г. – 408 с.

31. Пытьев, Ю.П. Курс теории вероятностей и математической статистики для физиков / Ю.П. Пытьев, И.А. Шишмарев. – М. : Изд-во Московского ун-та, 1983 г. – 252 с.

32. Вклад эксцессов высших порядков в диффузионное размывание концентрационного пятна / С.Г. Ехилевский [и др.] // Изв. Донец. горн. ин-та. – 2016. – № 2. – С. 10–14.

33. Независимые повторные испытания как асимптотически гауссовский случайный процесс / С.Г. Ехилевский [и др.] // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2016. – № 2. – С. 111–116.

34. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 1975. – 334 с.

35. Ехилевский, С.Г. Оценка положения и ширины работающего слоя регенеративного патрона изолирующего респиратора в условиях полноты достаточной статистики / С.Г. Ехилевский // Вестн. ун-та граждан. защиты МЧС Беларуси. – 2019. – Т. 3, № 3. – С. 291–300.

36. Гнеденко, Б.В. Курс теории вероятностей / Б.В. Гнеденко. – М. : Наука, 1969. – 400 с.

37. Ехилевский, С.Г. Теоретико-вероятностный подход к моделированию динамической сорбционной активности / С.Г. Ехилевский, О.В. Голубева, Д.В. Пяткин // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. В, Промышленность. Прикладные науки. – 2013. – № 11. – С. 144–151.

38. Ехилевский, С.Г. Влияние переменных краевых условий на квазистационарный профиль концентрации CO_2 в регенеративном патроне шахтного респиратора / С.Г. Ехилевский, С.А. Ольшанников, Е.П. Потапенко // Изв. вузов. Горный журн. – 2013. – № 3. – С. 46–53.

39. Ехилевский, С.Г. Повышение эффективности дыхательных аппаратов на химически связанном кислороде / С.Г. Ехилевский, С.А. Ольшанников // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. В, Промышленность. Прикладные науки. – 2013. – № 11. – С. 123–131.

40. Ехилевский, С.Г. О выборе уровня значимости при проверке статистических гипотез / С.Г. Ехилевский, В.В. Малашенко // Сб. науч.-метод. тр. / Донец. нац. техн. ун-т. – Донецк : ДонНТУ, 2004. – Вып. 2. – С. 94–100.

41. Ехилевский, С.Г. Рекуррентные полиномы в моделировании динамической сорбционной активности / С.Г. Ехилевский, В.В. Альховко // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2005. – № 4. – С. 110–116.

42. Математическая модель рабочего процесса изолирующего шахтного респиратора / С.Г. Ехилевский [и др.] // Изв. вузов. Горный журн. – 1994. – № 1. – С. 54–57.

43. Ехилевский, С.Г. Нестационарная задача динамики сорбции углекислого газа в регенеративном патроне изолирующего респиратора / С.Г. Ехилевский // Вестн. Фонда фундам. исследований. – 2019. – № 3(89) – С. 57–65.

44. Ехилевский, С.Г. Связь плотности вероятности с начальными моментами случайной величины / С.Г. Ехилевский, О.В. Голубева // Изв. Донец. горного ин-та. – 2009. – № 2. – С. 30–35.

45. Ехилевский, С.Г. Метод моментов и динамика сорбционной активности при малых временах / С.Г. Ехилевский, О.В. Голубева, С.А. Ольшанников // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. В, Промышленность. Прикладные науки. – 2013. – № 3. – С. 150–156.

46. Ехилевский, С.Г. Динамика сорбции активированными углями и закон возрастания энтропии / С.Г. Ехилевский // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2006. – № 10. – С. 174–180.

47. Ехилевский, С.Г. Вклад высших моментов случайной величины в асимптотику функции распределения // С.Г. Ехилевский, Д.В. Пяткин // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2009. – № 3. – С. 100–108.

48. Ехилевский, С.Г. Влияние асимметрии высших порядков на динамику сорбции вредной примеси / С.Г. Ехилевский, О.Н. Мурашкевич // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. В, Промышленность. Прикладные науки. – 2014. – № 3. – С. 115–122.

49. Фёдоров, Ю.И. Математические аспекты динамики сорбции газов / Ю.И. Фёдоров // Изв. Оренбург. гос. аграр. ун-та. – 2014. – № 3. – С. 46–48.

50. Значение феноменологических параметров модели хемосорбции в регенеративных патронах шахтных респираторов / Пак В.В. [и др.] // Изв. вузов. Горный журн. – 1998. – №11. – С. 108–112.

51. Мищенко, С.В. Динамика хемосорбции диоксида углерода веществами на основе супероксидов щелочных металлов / С.В. Мищенко, П.В. Балабанов, А.А. Кримштейн // Теорет. основы хим. технологии. – 2014. – Т. 48, № 3. – С. 328–334.

52. Welty, J. Fundamentals of Momentum Heat and Mass Transfer / J. Welty, G.L. Rorrer, D.G. Foster. – Wiley, 2015. – 770 p.

53. Венецианов, Е.В. Метод лимитирующей стадии в динамике сорбционных процессов. Сообщение 2. Продольная диффузия как лимитирующая стадия / Е.В. Венецианов // Изв. АН СССР. Сер. химическая. – 1980. – № 8. – С. 1714–1717.

54. Влияние формы и размеров пористой гранулы на скорость внутренней диффузии / С.Г. Ехилевский [и др.] // Изв. Донец. горного ин-та. – 2010. – № 1. – С. 105–113.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
1. Пересечение плоскостей, формулы Крамера и теорема Кронекера – Капелли	5
2. Классификация кривых второго порядка и достаточные условия гладкого экстремума функции двух переменных	8
3. Решение Феррари алгебраических уравнений четвертой степени.....	20
4. Применение формулы Тейлора в области расходимости соответствующего степенного ряда	23
5. Теорема Лагранжа, формула Ньютона – Лейбница и теорема об интегральном среднем	32
6. Полиномиальная регрессия кривых и поверхностей на основе табличных значений функции и ее производных	34
7. Разложение в ряд Фурье таблично заданных функций	38
8. Дискретность спектральной плотности периодических процессов и представление для обобщенных функций Дирака и Хэвисайда	47
9. Энергетические парадоксы в теории колебаний	52
10. Природа случайного и эргодичность	56
11. Случайная встреча N участников	58
12. Три двери	62
13. Уставший финн	65
14. Вариационный подход к получению дифференциальной функции распределения	67
15. Экстремальность энтропии, гамма–распределение и формула Стирлинга	78
16. Нормальный закон на плоскости	82
17. Экстремальность энтропии и распределение Максвелла молекул газа по скоростям	87
18. Теоретико-вероятностный подход к решению уравнения диффузии	89
19. Вклад эксцессов высших порядков в диффузионное размывание однородного концентрационного пятна	99
20. Независимые повторные испытания как асимптотически гауссовский случайный процесс	107
21. Преимущество смещенных оценок в условиях полноты достаточной статистики	115
22. Обоснование объема выборки и критического значения критерия согласия при проверке статистических гипотез	125
23. Теоретико-вероятностный подход к моделированию динамической сорбционной активности	134
24. Принцип песочных часов в нестационарной задаче динамики сорбции	162
Список использованных источников	168

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Научное издание

ЕХИЛЕВСКИЙ Степан Григорьевич

ИСКУССТВО МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРИЛОЖЕНИЙ

Редактор С. Е. Рясова
Дизайн обложки Е. А. Балабуевой

Подписано в печать 18.06.2020. Формат 60×841/16. Бумага офсетная.
Ризография. Усл. печ. л. 10,21. Уч.-изд. л. 10,08. Тираж 100 экз. Заказ 339.

Издатель и полиграфическое исполнение –
учреждение образования «Полоцкий государственный университет».

Свидетельство о государственной регистрации
издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/305 от 22.04.2014.

ЛП № 02330/278 от 08.05.2014.

Ул. Блохина, 29, 211440, г. Новополоцк.