УДК 528.063

ПРИМЕНЕНИЕ РЕКУРРЕНТНОГО СПОСОБА ДЛЯ УРАВНИВАНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ БЕЗ ИСХОДНЫХ ПУНКТОВ

д-р техн. наук, доц. В.И. МИЦКЕВИЧ, А.А. СКРИПЛЕНОК, Г.М. ДВОЕНКО
(Полоцкий государственный университет),
канд. техн. наук П.М. ЛЕВДАНСКИЙ
(Пирамида строй, Минск)

Рекуррентный способ, широко использующийся в уравнительных вычислениях, предлагается применять и при уравнивании геодезических построений в нефиксированной системе отсчета.

Как неоднократно отмечалось [2 – 6], рекуррентное уравнивание геодезических сетей, основанное на последовательном учете некоррелированных измерений с уравнением поправок [4]

$$V_i = a_i \Delta x_i + l_i \tag{1}$$

с весом p_i позволяет не только последовательно получать обратную матрицу весов, но и эффективно учитывать ошибки исходных данных, а также обнаружить грубые ошибки как в самих измерениях, так и в исходных данных по величине свободного члена избыточного измерения. При этом используют формулу:

$$Q_i = Q_{i-1} - \left(\frac{1}{q_i}\right) Z_i^T Z_i; \tag{2}$$

$$Z_i^T = Q_{i-1} a_i^T; \tag{3}$$

$$Q_i = \left(\frac{1}{p_i}\right) + a_i Z_i^T. \tag{4}$$

Цель нашей работы – раскрыть еще одну область применения рекуррентного способа, связанную с уравниванием геодезических сетей без исходных пунктов. В этом случае система уравнений (1) имеет столбцевой дефект больше нуля [2]. При уравнивании свободных сетей к условию метода наименьших квадратов подключают дополнительное условие $\Delta x^T \Delta x = \min$, которое приводит к единственному решению $\Delta x = -N^+ L$, где $N^+ = (A^T P A)^+$ – соответствующая псевдообратная матрица. В этом случае получаются несмещенные оценки параметров относительно принятой системы отсчета, которая задается известными координатами пунктов сети.

Матрицу N^+ можно определить из выражения [1]

$$N^+ = (N + R^T R)^{-1} - R^T (RR^T RR^T)^{-1} R, \tag{5}$$

где $N = A^T P A$, а

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ -Y_1 & X_1 & Y_2 & X_2 & \dots & -Y_m & X_m \\ & & & & & & \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Формула (6) со временем была уточнена М.Д. Герасименко:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ Y_1 & -X_1 & Y_2 & -X_2 & \dots & Y_t & -X_t \\ X_1 & Y_1 & X_2 & Y_2 & \dots & X_t & Y_t \end{pmatrix}, \tag{7}$$

в которой $X_i = x_i - x_{cp}$; $Y_i = y_i - y_{cp}$ – уклонения от среднего арифметического, полученного по координатам всех пунктов геодезической сети.

Записывая формулу (5) в виде

$$N^+ = G_1 - G_2, \tag{8}$$

отметим, что рекуррентным способом вычисляется только матрица $G_1 = (N + R^T R)^{-1}$ путем дополнения матрицы коэффициентов параметрических уравнений поправок A (строки которой обозначены через a_i) строками из матрицы (7). Таким образом, для уравнивания свободной нивелирной сети матрица A дополняется строкой

$$R = \mathrm{I} = (1\ \ 1\ \ 1\ \ ...\ \ 1), \tag{9}$$

число столбцов в которой соответствует числу столбцов матрицы A, а при уравнивании плановых сетей матрица A дополняется четырьмя строками матрицы R. Матрица G_2 при уравнивании нивелирных сетей будет такой:

$$G_2 = \frac{1}{t^2} I^T I\,, \tag{10}$$

где t – число параметров или число столбцов в матрицах A и R.

Приведем п р и м е р ы . На рис. 1. показана свободная нивелирная сеть, для которой матрица A с дополнительной строкой R будет иметь следующий вид:

$$\left(\frac{A}{R}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

поэтому формулы (2) – (4) будут применяться четыре раза (по числу строк в вышеуказанной матрице).

Свободная сеть триангуляции представлена на рис. 2.

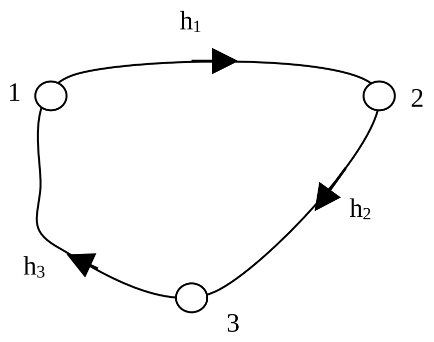

Рис. 1. Свободная нивелирная сеть

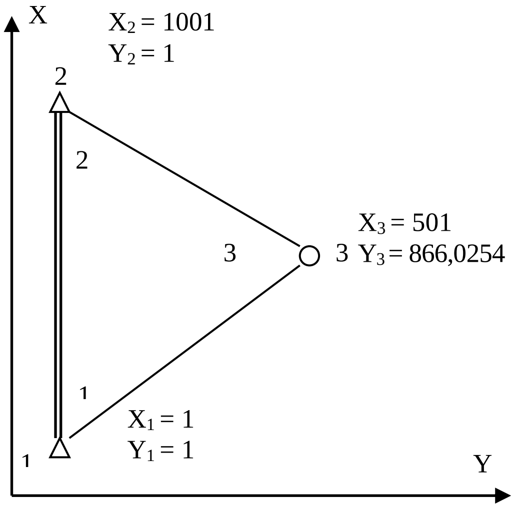

Рис. 2. Свободная сеть триангуляции

Для свободного треугольника триангуляции (см. рис. 2) будем иметь

$$\frac{A}{R} = \left(\begin{array}{cccccc} 178{,}63 & 103{,}13 & 0 & -206{,}26 & -178{,}63 & 103{,}13 \\ 0 & -206{,}26 & -178{,}63 & 103{,}13 & 178{,}63 & 103{,}13 \\ -178{,}63 & 103{,}13 & 178{,}63 & 103{,}13 & 0 & -206{,}26 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -288{,}34 & 500 & -288{,}34 & -500 & 578{,}68 & 0 \\ -500 & -288{,}34 & 500 & -288{,}34 & 0 & 576{,}68 \end{array}\right)$$

Матрицы G_1, N^+ будут такими:

$$\begin{pmatrix} b_1 & 0 & b_2 & -b_3 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_1 & b_3 & b_2 & -b_3 & b_2 \\ b_2 & b_3 & b_1 & 0 & b_2 & -b_3 \\ -b_3 & b_2 & 0 & b_1 & b_3 & b_2 \\ b_2 & -b_3 & b_2 & b_3 & b_1 & 0 \\ b_3 & b_2 & -b_3 & b_2 & 0 & b_1 \end{pmatrix},$$

при $b_1 = 0{,}11111318$; $b_2 = 0{,}11111008$; $b_3 = 1{,}22 \cdot 10^{-6}$ для G_1
и $b_1 = 1{,}74 \cdot 10^{-6}$; $b_2 = -8{,}6 \cdot 10^{-7}$; $b_3 = 1{,}51 \cdot 10^{-6}$ для N^+ соответственно.

В заключение отметим, что предложенная новая методика является простой и универсальной при обработке обширных плановых и спутниковых геодезических сетей, приводящей к сокращению времени вычислений на ЭВМ по сравнению с известными и традиционными методами обработки нуль-свободных геодезических построений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Герасименко М.Д., Шароглазова Г.А. Определение современных движений земной коры из повторных измерений // Геодезия и картография. – 1985. – № 7. – С. 25 – 29.
2. Маркузе Ю.И. Алгоритм для уравнивания геодезических сетей на ЭВМ. – М.: Недра, 1989. – 248 с.
3. Маркузе Ю.И. Основы уравнительных вычислений. – М.: Недра, 1990. – 240 с.
4. Маркузе Ю.И. Поиск грубых ошибок при рекуррентном уравнивании наземных и спутниковых геодезических сетей // Геодезия и картография. – 1995. – № 11. – С. 8 – 15.
5. Маркузе Ю.И. Способ подвижного треугольника уравнивания обширных геодезических сетей // Изв. вузов. Сер. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1992. – № 1. – С. 3 – 16.
6. Маркузе Ю.И., Welsch W.M. Два алгоритма объединения наземных и спутниковых геодезических сетей // Изв. вузов. Сер. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1995. – № 2. – С. 45 – 64.