ГЕОДЕЗИЯ

УДК 528.063

ОБОБЩЕНИЕ ВАРИАЦИОННОГО МЕТОДА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ НА ОСНОВЕ LP-ОЦЕНОК ПРИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКЕ ПЛАНОВЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

д-р техн. наук, доц. В.И. МИЦКЕВИЧ, Н.С. СЫРОВА
(Полоцкий государственный университет)

Предложена методика уравнивания нуль-свободных плановых геодезических построений без исходных пунктов (в нефиксированной системе координат). Приведены формулы, решающие поставленную задачу с учетом закона распределения погрешности измерений. Возможности методики продемонстрированы на трех известных тестовых примерах.

При уравнивании и оценке точности нуль-свободных геодезических сетей вариационным методом А.Н. Тихонова используют следующие формулы [1, 4]:

$$\hat{X} = X_0 + \delta X \; ; \tag{1}$$

$$\delta X = \left(R^2 + \alpha E\right)^{-1} RB \, , \tag{2}$$

где X_0 – вектор начальных координат всех пунктов, полученный по правилам, опубликованным в [2]; α – параметр регуляризации;

$$R = A^T PA \, ; \quad B = A^T PL \, , \tag{3}$$

в которых A – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок; L – вектор свободных членов параметрических уравнений. При оценке точности используется формула:

$$Q = \left(R^2 + \alpha E\right)^{-1} R \, . \tag{4}$$

Для случая Lp-оценок вариационный метод регуляризации реализуется следующим образом:

$$\hat{X} = X_0 + FL \, ; \tag{5}$$

$$F = \left(R^2 + \alpha E\right)^{-1} RA^T C \, ; \tag{6}$$

$$R = A^T CA \, ; \tag{7}$$

$$C = P_n \left(diag \left|L\right|^{n-2}\right) , \tag{8}$$

где диагональная матрица весов

$$P_{n,i} = \left(\frac{1}{\sigma_i}\right)^n . \tag{9}$$

Здесь n – показатель степени; если $n = 2$, то уравнивание выполняется по методу МНК (метод наименьших квадратов), при $n = 1$ – МНМ (метод наименьших модулей) и т.д.

Вместо формулы (4) для обратной весовой матрицы имеем

$$Q = FP_n^{-1} F^T \, . \tag{10}$$

Зная матрицу Q можно выполнить оценку точности по известным формулам:

$$m_F = \mu \sqrt{\frac{1}{P_F}} \, ; \quad \frac{1}{P_F} = fQf^T \, ,$$

где f – вектор коэффициентов весовой функции, а

$$\mu = \sqrt{\frac{V^T P_n V}{r}} \, . \tag{11}$$

Важным вопросом при уравнивании нуль-свободной сети является выбор вектора X_0. Методика его вычисления для метода Lp-оценок остается такой же, как и в работе [2]. Разница методик заключается лишь в том, что вектор предварительных координат получают методом Lp-оценок, уравнивая по этому алгоритму свободную (опирающуюся на два любых исходных пункта) геодезическую сеть. Как отмечалось в [2] для нивелирных сетей и сетей триангуляции для полученного начального вектора X_0 δX из выражения (2) будет равен нулю.

Цель работы – показать в каких случаях выполняется или не выполняется равенство $\hat{X} = X_0$.

Если геодезическая сеть опирается на два исходных пункта, т.е. является свободной, то ниже будет показано, что координаты свободной сети окажутся и нуль-свободными, соответствующими алгоритму А.Н. Тихонова.

Пример 1. Исходные данные – [3, с. 93], результаты счета в табл. 1.

Пример 2. Исходные данные – [3, с. 217]. Результаты вычислений представлены в табл. 2.

В примерах 1, 2 геодезическая сеть опирается на 2 исходных пункта.

Таблица 1

Уравненные координаты для нуль-свободной сети триангуляции с оценкой точности

	n = 1,5	n = 2,01	n = 2,4
X_3	74 014,197	74 014,186	74 014,185
Y_3	26 533,240	26 533,239	26 533,237
X_4	66 008,136	66 008,132	66 008,135
Y_4	25 624,116	25 624,114	25 624,114
X_5	68 403,834	68 403,830	68 403,830
Y_5	18 238,859	18 238,857	18 238,856
X_1	63 750,541	63 750,540	63 750,538
Y_1	12 889,102	12 889,100	12 889,099
X_2	75 710,979	75 710,981	75 710,983
Y_2	15 387,269	15 387,270	15 387,269
μ	1,03	0,683	0,869
M_3	0,028	0,022	0,024
M_4	0,031	0,027	0,027
M_5	0,024	0,026	0,021
M_1	0,035	0,030	0,031
M_2	0,035	0,030	0,030
α	0,088	$3{,}2 \cdot 10^{-9}$	$9{,}85 \cdot 10^{-4}$

Таблица 2

Уравненные координаты для нуль-свободной линейно-угловой сети с оценкой точности

	n = 1,5	n = 2,1	n = 2,5
X_3	32 993,900	32 993,901	32 993,901
Y_3	13 000,399	13 000,401	13 000,401
X_5	34 800,604	34 800,603	34 800,605
Y_5	14 200,698	14 200,700	14 200,698
X_4	30 89 5,195	30 895,165	30 895,198
Y_4	14 570,301	14 570,301	14 570,303
X_1	31 250,246	31 250,247	31 250,244
Y_1	11 500,410	11 500,410	11 500,411
X_2	33 256,573	33 256,575	33 256,573
Y_2	10 900,840	10 900,839	10 900,837
μ	1,20	1,30	1,83
M_3	0,008	0,004	0,023
M_5	0,018	0,006	0,025
M_4	0,017	0,006	0,040
M_1	0,014	0,006	0,026
M_2	0,012	0,006	0,010
α	10,294	1,147	$1{,}2 \cdot 10^{-7}$

Если в плановой геодезической сети исходных пунктов три и более, то необходимо вычислять начальные координаты всех пунктов (исходных и определяемых) по правилам, опубликованным в [2]. В табл. 3 – 5 рассмотрен пример триангуляции, содержащей три исходных и два определяемых пункта, с результатами измерений [4].

Таблица 3

Получение начальных координат при n = 1,6

Пункты	Исходные пункты			Среднее арифметическое
	4, 5	3, 4	3, 5	
1	2	3	4	5
X_1	83 182,730	83 182,658	83 182,639	83 182,676
Y_1	51 400,505	51 400,623	51 400,567	51 400,565
X_2	75 890,293	75 890,278	75 890,291	75 890,287
Y_2	55 930,315	55 930,502	55 930,409	55 930,409
X_3	82 700,009	82 699,830	82 699,830	82 699,890
Y_3	40 904,483	40 904,620	40 904,620	40 904,574
X_4	93 556,720	93 556,720	93 556,631	93 556,690
Y_4	59 750,640	59 750,640	59 750,555	59 750,612
X_5	82 489,340	82 489,371	82 489,340	82 489,350
Y_5	61 340,410	61 340,522	61 340,410	61 340,447

Таблица 4

Получение начальных координат при n = 2,1

Пункты	Исходные пункты			Среднее арифметическое
	4, 5	3, 4	3, 5	
1	2	3	4	5
X_1	83 182,758	83 182,655	83 182,650	83 182,688
Y_1	51 400,511	51 400,610	51 400,549	51 400,557
X_2	75 890,334	75 890,269	75 890,307	75 890,303
Y_2	55 930,319	55 930,502	55 930,413	55 930,411
X_3	82 700,046	82 699,830	82 699,830	82 699,902
Y_3	40 904,530	40 904,620	40 904,620	40 904,590
X_4	93 556,720	93 556,720	93 556,653	93 556,698
Y_4	59 750,640	59 750,640	59 750,531	59 750,604
X_5	82 489,340	82 489,342	82 489,340	82 489,341
Y_5	61 340,410	61 340,530	61 340,410	61 340,450

Таблица 5

Получение начальных координат при n = 2,5

Пункты	Исходные пункты			Среднее арифметическое
	4, 5	3, 4	3, 5	
1	2	3	4	5
X_1	83 182,763	83 182,654	83 182,656	83 182,691
Y_1	51 400,520	51 400,606	51 400,546	51 400,557
X_2	75 890,350	75 890,270	75 890,315	75 890,312
Y_2	55 930,329	55 930,499	55 930,417	55 930,415
X_3	82 700,046	82 699,830	82 699,830	82 699,902
Y_3	40 904,554	40 904,620	40 904,620	40 904,598
X_4	93 556,720	93 556,720	93 556,666	93 556,702
Y_4	59 750,640	59 750,640	59 750,529	59 750,603
X_5	82 489,340	82 489,330	82 489,340	82 489,337
Y_5	61 340,410	61 340,526	61 340,410	61 340,449

В таблице 6 приведены уравненные координаты нуль-свободной сети триангуляции [4] с начальными координатами, полученными в табл. 3 – 5. В таблице 6 также указаны параметры регуляризации и оценка точности для рассмотренного примера. По данным табл. 6 видно, что координаты для нуль-свободной сети триангуляции практически не отличаются от координат в столбцах 5 таблиц 3 – 5.

Таблица 6

Уравненные координаты для нуль-свободной сети триангуляции с оценкой точности

	n = 1,6	n = 2,1	n = 2,5
X_1 Y_1	83 182,675 51 400,562	83 182,688 51 400,556	83 182,694 51 400,557
X_2 Y_2	75 890,289 55 930,408	75 890,303 55 930,411	75 890,311 55 930,415
X_3 Y_3	82 699,892 40 904,576	82 699,902 40 904,589	82 699,908 40 904,598
X_4 Y_4	93 556,692 59 750,609	93 556,698 59 750,604	93 556,701 59 750,603
X_5 Y_5	82 489,347 61 340,449	82 489,340 61 340,450	82 489,337 61 340,451
μ	3,59	3,23	3,02
M_1	0,124	0,115	0,120
M_2	0,146	0,132	0,140
M_3	0,152	0,144	0,148
M_4	0,145	0,134	0,140
M_5	0,118	0,105	0,112
α	0,015	$5{,}0 \cdot 10^{-9}$	$1{,}12 \cdot 10^{-6}$

В заключение отметим, что предложенная методика является универсальной для любых геодезических построений с любым количеством исходных пунктов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карпушин Ю.Г. Выбор параметра при регуляризированном решении некорректных геодезических задач // Изв. вузов. Сер. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1985. – № 2. – С. 19 – 23.
2. Мицкевич В.И., Левданский П.М., Стержанов В.Г. О вычислении начальных координат пунктов для последующего уравнивания нуль-свободных геодезических сетей // Автоматизированные технологии изысканий и проектирования. – 2001. – № 2 (4). – С. 35 – 36.
3. Практикум по высшей геодезии (вычислительные работы) / Н.В. Яковлев, Н.А. Беспалов, В.П. Глумов и др.: Учеб. пособие для вузов. – М.: Недра. – 1982. – 368 с.
4. О вариационном методе регуляризации при уравнивании свободных геодезических сетей / А.Н. Тихонов, В.Д. Большаков, В.А. Бывшев и др. // Изв. вузов. Сер. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1978. – № 3. – С. 3 – 10.