

УДК 624.012.44

**О РАСЧЕТЕ КОНТАКТНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ БЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
ПРИ МЕСТНОМ СЖАТИИ***канд. техн. наук, доц. Н.А. РАК**(Белорусский национальный технический университет, Минск)*

Рассмотрены особенности расчета контактных деформаций бетонных элементов при различных схемах приложения местной сжимающей нагрузки. Выполнен анализ экспериментальных данных об контактных деформациях бетона при местной сжимающей нагрузке. Дана оценка предложений по определению осадки штампа для упругодеформируемых тел ограниченного объема. Предложена методика расчета бетонных элементов при местном сжатии, основанная на принятии условия о равномерном распределении вертикальных напряжений в пределах области бетона, ограниченной усеченной пирамидой, верхним основанием которой является площадь штампа, а боковые грани наклонены под углом $26^{\circ}30'$ к вертикали. Приведены зависимости для определения величины вертикальных напряжений при различных схемах приложения нагрузки к торцу бетонного элемента, а также зависимости для определения величины контактных деформаций. Оценена корректность предложенной методики расчета путем сопоставления величин рассчитанных по ней контактных деформаций с результатами расчетов, выполненных с использованием метода конечных элементов.

Введение. Анализ результатов экспериментальных исследований бетона при местном сжатии показал, что в большинстве исследований изучалась только прочность бетона [1]. Лишь в отдельных исследованиях было уделено внимание деформациям бетона при местном сжатии [2 – 12]. Причем эти исследования можно условно разделить на две группы.

В исследованиях [2, 3], относящихся к первой группе, изучались относительные деформации бетона в области действия сжимающих напряжений в местах расположения несовершенных шарниров. А.С. Курылло и В.Г. Кваша [2] изучали деформации бетона в зоне расположения несовершенного шарнира железобетонной арки. Модели арок сечением 20×15 см были изготовлены из бетона с призменной прочностью 44 МПа. Несовершенные шарниры образовывались путем уменьшения сечения арки до 5×15 см. В опытах при напряжениях в бетоне 136 МПа (более трех раз превышающих его призменную прочность) относительные деформации бетона достигли $11,7 \cdot 10^{-3}$, что превышает предельную сжимаемость бетона при осевом сжатии более чем в пять раз.

A. Griezic, W. Cook, D. Mitchell [3] исследовали опытные образцы несовершенных шарниров колонн в зонах их примыкания к фундаментам. Опытные образцы были изготовлены из бетонов с цилиндрической прочностью 35...39 МПа с односторонней и двусторонней подрезкой сечения. При испытаниях фиксировались относительные деформации бетона в сечении с шарниром, в том числе на ниспадающей ветви диаграммы деформирования. Результаты испытаний показали, что напряжения в бетоне шарнира при разрушении значительно превышают призменную прочность бетона, а относительные деформации бетона в шарнирах с двусторонней подрезкой достигают $20 \cdot 10^{-3}$, что превышает предельные относительные деформации бетона при осевом сжатии в 8...10 раз. На основании исследований разработаны зависимости для расчета прочности и деформаций бетона в области шарнира.

В исследованиях [4 – 11], относящихся ко второй группе, изучались так называемые контактные деформации, под которыми принято понимать перемещения жесткого штампа относительно некоторой условной плоскости, расположенной на удалении от плоскости контакта, равном глубине активной зоны деформаций.

В.М. Поздникин [4] исследовал контактные деформации при кратковременном местном сжатии круглыми штампами фундаментных блоков, изготовленных из бетонов с прочностью на сжатие не более 25 МПа. При испытаниях измерялись полные контактные деформации штампа относительно точек нагружаемой плоскости блока, расположенных на значительном расстоянии от штампа.

Ю.В. Коваль и И.А. Русинов [5] исследовали контактные деформации при концентричном кратковременном и длительном местном сжатии на призмах и кубах, изготовленных из бетонов различной структуры (бетон на фосфорном щебне с прочностью на сжатие 40 МПа, тяжелый трехкомпонентный бетон с прочностью на сжатие 35...58 МПа). Кроме того, в небольшом количестве исследовались контактные деформации на кубах, изготовленных из мелкозернистого бетона с прочностью на сжатие 67 МПа и тяжелого трехкомпонентного бетона с прочностью на сжатие 73...81 МПа. Поперечные размеры образ-

цов 100×100, 150×150 и 200×200 мм. Размеры штампов 50×50, 75×75, 92×92 мм. При испытаниях измерялись контактные деформации штампов по отношению к точкам, расположенным по периметру нагружаемой плоскости образца, а также по отношению к точкам этой плоскости, расположенным непосредственно около граней штампа. Измерения деформаций показали, что полная контактная деформация складывается из двух составляющих – деформации вдавливания штампа в бетон и деформации искривления нагружаемой плоскости образца за пределами штампа. На основе статистической обработки результатов измерений были предложены многофакторные регрессионные зависимости для определения составляющих полной контактной деформации.

К. Lieberum, Н. Reinhardt [6] изучали контактные деформации при концентричном кратковременном местном сжатии круглыми штампами диаметром 13...32 мм бетонных цилиндров диаметром 400 мм и высотой 450 мм, изготовленных из бетонов с прочностью на сжатие 29...57 МПа. При испытаниях измерялись полные контактные деформации штампов по отношению к точкам нагружаемой плоскости цилиндра, расположенным по его периметру. Установлено, что при напряжениях в бетоне под штампом, не превышающих более чем в пять раз прочность бетона на сжатие, зависимость контактной деформации от напряжения остается линейной.

Нами исследованы контактные деформации опорных участков железобетонных конструкции, изготовленных из бетона с прочностью на сжатие 38 МПа [7, 8]. Была проведена серия из 32 испытаний стальными штампами опытных образцов опорных участков стропильной конструкции, в которых варьировались размеры и расположение штампа, а также вид основания под штампом. При испытаниях измерялись перемещения жесткого стального штампа относительно поверхности образца и деформации бетона на боковых гранях.

Измерения показали, что общая контактная деформация состоит из двух составляющих: контактной деформации погружения и контактной деформации искривления поверхности образца. Доля указанных составляющих зависит от способа опирания штампа на бетон или стальную пластину, расположенную на бетоне, размеров штампа и его расположения на поверхности образца.

За пределами штампа осадки нагруженной поверхности образца затухают достаточно быстро, а на грани штампа наблюдается резкий скачок перемещений, т.е. происходит как бы погружение штампа в бетон. Рост перемещений точек поверхности происходил с ростом нагрузки достаточно стабильно даже при напряжениях под штампом, превышающих призмную прочность бетона. Причем значение деформации погружения штампа (разности средней осадки штампа и осадок прилегающих к нему точек поверхности) также возрастает стабильно. Доля деформаций погружения на протяжении всего испытания остается примерно постоянной, но при одном уровне напряжений существенно зависит от размеров штампа (увеличивается с его ростом).

Н. Reinhardt, R. Koch [9] исследовали прочность при концентричном кратковременном местном сжатии круглыми штампами диаметром 40, 60 и 120 мм бетонных цилиндров диаметром 190 мм и высотой 400 мм, изготовленных из бетонов с прочностью на сжатие 58...108 МПа. При испытаниях измерялись полные контактные деформации штампов по отношению к точкам нагружаемой плоскости цилиндра, расположенным по его периметру. В результате испытаний установлено, что зависимость контактной деформации от напряжения под штампом близка к линейной при нагрузках, не превышающих 80 % от разрушающих.

В проведенных на кафедре «Железобетонные и каменные конструкции» Белорусского национального технического университета экспериментальных исследованиях [10 – 12] были впервые целенаправленно изучены контактные деформации высокопрочного бетона при местном сжатии. Исследования проводились на бетонных призмах размерами 100×100×400 мм и 150×150×600 мм, изготовленных из бетона с кубиковой прочностью 83...96 МПа (I и III серии) и 62...72 МПа (II серия).

При испытании образцов I и II серий нагрузка на образцы прикладывалась на бетон через штампы, имеющие размеры:

- 10×10, 20×20, 40×40, 60×60 мм для призм размерами 100×100×400 мм;
- 15×15, 30×30, 60×60, 90×90 мм для призм 150×150×600 мм.

Отношение размера штампа к поперечному размеру призмы изменялось для каждого размера призм в диапазоне от 0,1 до 0,6. При испытании с помощью индикаторов часового типа с ценой деления 0,01 мм измерялись перемещения штампа относительно нагружаемой поверхности, а также условной равномерно деформируемой плоскости образца, расположенной от нагружаемого торца на расстоянии, равном поперечному размеру призмы.

Проведенные исследования позволили получить экспериментальные данные об изменении напряженно-деформированного состоянии бетона по мере увеличения нагрузки и показали, что зависимость контак-

ной деформации от напряжения под штампом близка к линейной. При этом экспериментальные значения контактных деформаций значительно превышают значения, получаемые при расчете в предположении упругой работы бетона. Это свидетельствует о появлении значительных пластических деформаций в бетоне, что следует учитывать в расчетах. Такой учет, по нашему мнению, может быть осуществлен только на основе деформационной модели расчетной модели, которая базируется на использовании диаграмм деформирования бетона при осевом сжатии, трансформированных с учетом сложного напряженного состояния в области действия местной нагрузки.

Однако прежде чем приступить к разработке такой модели следует предварительно разработать методику расчета контактных деформаций для условий упругой работы материала, основанную на методах механики твердого деформируемого тела.

Ранее нами был предложен один из возможных вариантов такой методики расчета, основанный на расчетной модели упругого основания с двумя коэффициентами постели [7, 8]. Верхний слой расчетной модели состоит из упругих, работающих только на сжатие пружин, распределенных по всему сечению образца и накрытых сверху мембраной. В последней выделены две перекрестные ленты, в области пересечения которых находится место приложения нагрузки. Ленты в поперечном своей длине направлении считаются абсолютно жесткими, а в продольном – могут свободно изгибаться. Кроме лент, в состав мембраны входят перекрестные гибкие нити, соединенные с кромками лент перпендикулярного направления. Как ленты, так и нити натянуты постоянным горизонтально направленным погонным усилием, а в бесконечности неподвижно закреплены на контуре.

В данной работе рассмотрен другой подход к решению задачи расчета контактных деформаций бетонных элементов при местном сжатии.

Постановка задачи. Определение осадки штампа для тела ограниченного объема представляет собой достаточно сложную задачу, относящуюся к классу контактных задач механики твердого деформируемого тела. Приемлемые с инженерной точки зрения решения имеются только для тел, не имеющих конечных размеров: упругих полупространства и полуплоскости, а также областей отличных от них (полоса, слой, клин) [13]. Эти решения находят свое применение в практике строительного проектирования, например, при определении осадок фундаментов, когда грунт основания рассматривается как упругое полупространство (фундамент конечных размеров) или полуплоскость (ленточный фундамент) [14, 15].

Контактные задачи в железобетоне, по-видимому, впервые возникли при оценке распределения напряжений в опорных участках балок от силы предварительного напряжения [16, 17]. На основании теоретических исследований, выполненных И. Гийоном с использованием вариационных методов теории упругости [16], а также М.Е. Гибшманом методом сеток и оптико-поляризационным методом [17], получено, что на расстоянии, примерно равном высоте балки, напряжения распределяются по ее высоте согласно законам сопротивления материалов. Эти результаты полностью соответствуют решению задачи о действии сосредоточенных сил на пластинку, высота которой значительно превышает поперечный размер [18], и принципу Сен-Венана. Следует отметить, что хотя этот принцип не получил строго обоснования, его применимость подтверждается многочисленными примерами исследований напряженного состояния методами теории упругости и измерениями деформаций в опытах [19].

При решении задачи нахождения напряжений в каменной кладке под распределительными устройствами фактические криволинейные эпюры напряжений, полученные методами теории упругости, заменяются условными треугольными или трапецидальными [20]. Причем критерием замены, как правило, служит совпадение величины максимальных напряжений, а для определения положения нулевых ординат условных эпюр вводится понятие радиуса влияния. При такой линеаризации эпюр напряжений расчетные зависимости становятся вполне пригодными для инженерной практики при сохранении приемлемой точности расчета. Следует отметить, что нами ранее [7, 8] при назначении параметров расчетной модели упругого основания с двумя коэффициентами постели была использована линеаризация эпюр напряжений по [20].

Как уже отмечалось выше, для тел ограниченного конечного размера до сих пор не дано решения задачи определения осадки жесткого штампа при его произвольном положении на торце. Известно решение задачи в цилиндрической системе координат для случая осесимметричного нагружения торца бесконечного цилиндра [21], основанное на методе расчета, заключающемся в сведении парных рядов уравнений к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений первого рода с сингулярной матрицей. С.В. Босаковым выполнено решение задачи для случая симметричного нагружения полосовой нагрузкой торца пластины, основанное на использовании функции напряжений, записанной в виде разложений по системе ортогональных функций [22]. Полученная бесконечная система линейных алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов функции напряжений решается методом усечения.

Реализация рассмотренных методов расчета [21, 22] сопряжена со значительными математическими трудностями, что несколько ограничивает их возможное использование в инженерной практике.

При разработке метода расчета контактных деформаций бетонных элементов при местном сжатии необходимо ясно представлять, каким образом разрабатываемый метод расчета будет сочетаться с общей методикой определения деформаций элементов. Применительно к стержневым железобетонным конструкциям, к которым относятся колонны, нормами [23] рекомендуется определение деформаций производить с использованием гипотезы плоских сечений, т.е. фактически с позиции сопротивления материалов. При определении контактной деформации искривления поверхности необходимо сначала выделить в образце область, в пределах которой напряжения отличаются от получаемых по обычной нормативной методике.

Методика расчета контактных деформаций. Распределение сжимающих напряжений вдоль вертикали, проходящей через центр жесткого штампа, нами рекомендуется определять с учетом линейаризации эпюр напряжений в пределах выделяемого потока напряжений. При этом принято, что независимо от места расположения штампа поток напряжений действует внутри усеченной пирамиды, верхним основанием которой является площадь штампа, а боковые грани наклонены под углом к вертикали $\varphi = \arctan(1/2)$. Аналогичный подход используется в экспресс-методах определения осадок фундаментов на упругом полупространстве [15].

Исходя из принятого закона распространения напряжений, можно найти их величину для любого случая нагружения при фактических соотношениях размеров площади штампа и размеров нагружаемой плоскости бетонного образца.

На рис. 1 представлены наиболее часто встречающиеся случаи расположения штампов на торце бетонного образца, а также показаны области распределения напряжений в сечениях, расположенных на некотором расстоянии от торца.

Зависимости для определения напряжений в бетоне для каждого из случаев расположения штампов приведены в табл. 1.

Указанные зависимости имеют различный вид для каждой характерной зоны распределения напряжений, границы которых приведены на рис. 1.

Таблица 1

Зависимости для определения напряжений в бетоне

Схема приложения нагрузки	I зона	II зона	III зона
Центральная полосовая (рис. 1, а)	$\sigma_x = \frac{\sigma_0 4a^2}{(2a+x)^2}$	$\sigma_x = \frac{\sigma_0 a^2}{b^2}$	–
Концентричная (рис. 1, б)	$\sigma_x = \frac{\sigma_0 2a}{2a+x}$	$\sigma_x = \frac{\sigma_0 a}{b}$	–
Центральная неконцентричная (рис. 1, в)	$\sigma_x = \frac{\sigma_0 4ac}{(2a+x)(2c+x)}$	$\sigma_x = \frac{\sigma_0 4ac}{2b(2a+x)}$	$\sigma_x = \frac{\sigma_0 ac}{4b^2}$
Полосовая симметричная двумя штампами при $e < 0,5b$ (рис. 1, г)	$\sigma_x = \frac{\sigma_0 2a}{2a+x}$	$\sigma_x = \frac{\sigma_0 2a}{(2e+0,5x)}$	$\sigma_x = \frac{\sigma_0 2a}{b}$
σ_0 – напряжения непосредственно под штампом; x – расстояние от торца до сечения, для которого определяется напряжение.			

Приведенные выше формулы позволяют однозначно определить распределение напряжений в сечении и дают возможность определить осадку штампа по отношению к некоторой плоскости бетонного образца, считающейся условно несмещаемой. В качестве такой плоскости можно принять любую из плоскостей, расположенных в зонах, удаленных от загружаемого торца настолько, что напряжения в сечении можно считать постоянными. В дальнейшем будем считать, что указанная плоскость расположена на расстоянии $2b$ от торца, где $2b$ – наибольший из размеров нагруженного торца элемента.

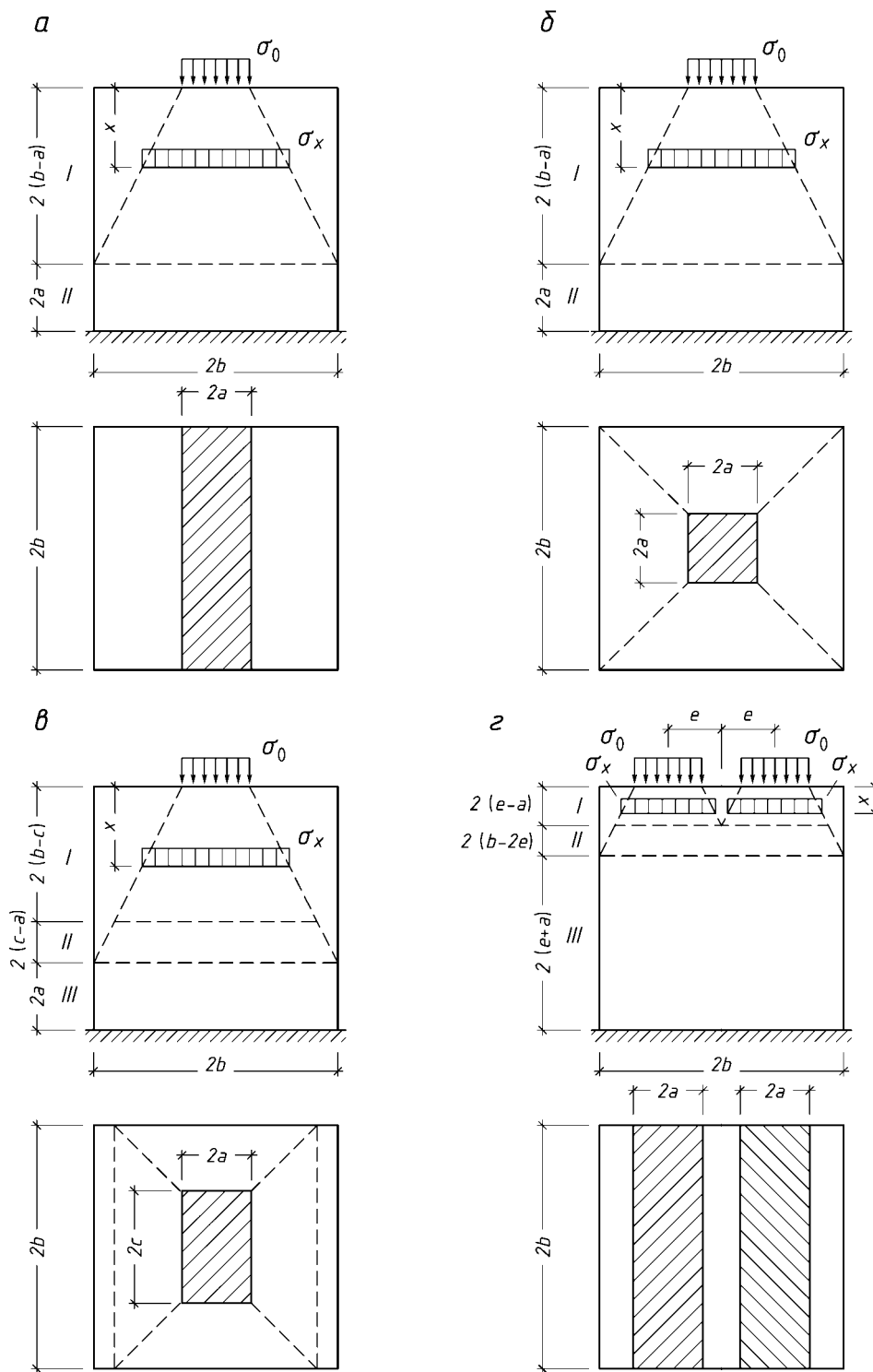


Рис. 1. Характер распределения напряжений при различных схемах приложения нагрузки:
 а – центральное полосовое; б – центральное концентрическое; в – центральное неконцентрическое;
 г – симметричное полосовое двумя штампами

Путем прямого интегрирования приведенных выше зависимостей получены следующие формулы для вычисления осадок штампов относительно указанной условной плоскости:

- при центральной полосовой нагрузке (см. рис. 1, а):

$$\delta = \frac{\sigma_0 2a}{E_c} \cdot \left[\ln \left(\frac{b}{a} \right) + \frac{a}{b} \right];$$

- при центральной концентричной нагрузке (см. рис. 1, б):

$$\delta = \frac{\sigma_0 2a}{E_c} \cdot \left(1 - \frac{a}{b} + \frac{a^2}{b^2} \right);$$

- при центральной неконцентричной нагрузке (см. рис. 1, в):

$$\delta = \frac{\sigma_0 2a}{E_c} \cdot \left[\frac{c}{(c-a)} \left[\ln\left(\frac{c}{a}\right) - \ln\left(\frac{b}{a+b-c}\right) \right] + \frac{c}{b} \ln\left(\frac{b}{a+b-c}\right) + \frac{ac}{b^2} \right];$$

- при симметричной полосовой нагрузке двумя штампами при условии $e < 0,5b$ (см. рис. 1, г):

$$\delta = \frac{\sigma_0 2a}{E_c} \cdot \left[\ln\left(\frac{e}{a}\right) + 2 \ln\left(\frac{b}{2 \cdot e}\right) + \frac{2(e+a)}{b} \right].$$

Проверка применимости методики. Для оценки корректности определения величин напряжений по предлагаемой методике были проведены расчеты с использованием метода конечных элементов напряженно-деформированного состояния опорного участка железобетонной конструкции при местном приложении нагрузки. Расчеты производились с использованием программного комплекса NASTRAN for Windows.

Конечно-элементная модель бетонной призмы была создана из конечных элементов типа SOLID, содержащего 8 узлов. Полученная конечно-элементная модель опорного узла содержала 148 176 элементов и 157 165 узлов (рис. 2 и 3).

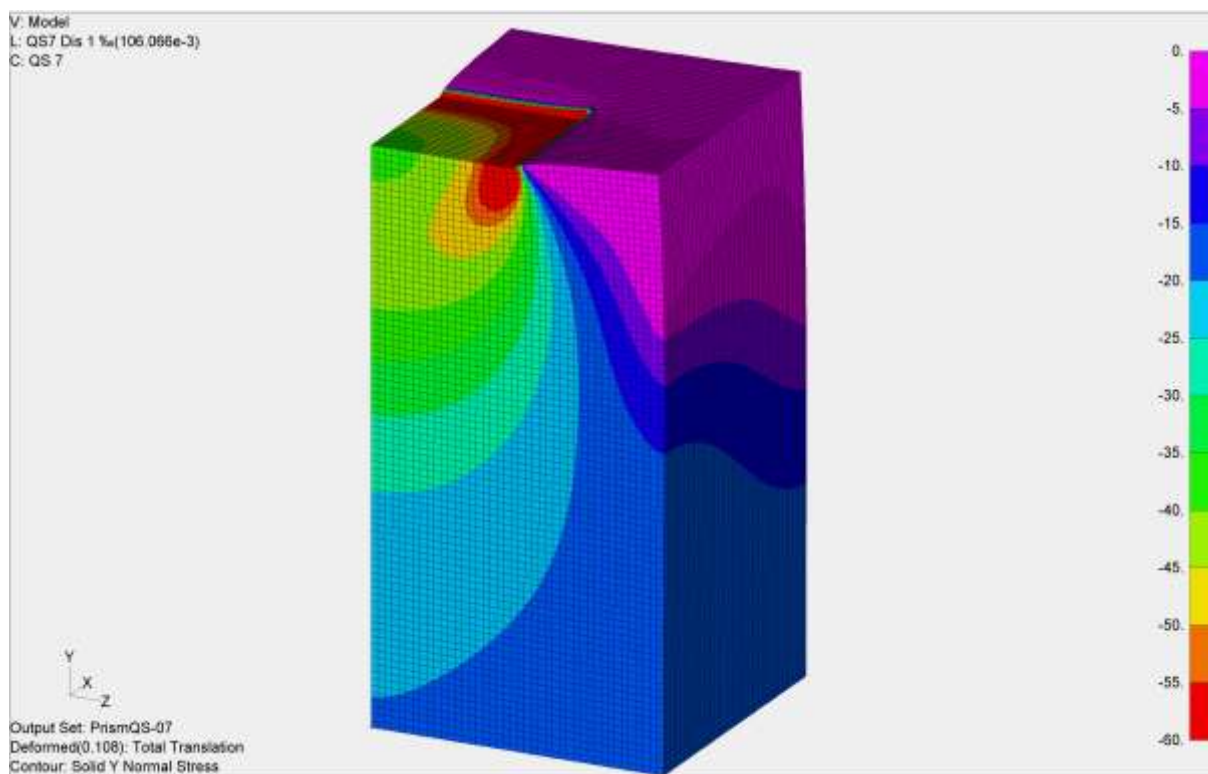


Рис. 2. Общий вид модели QS-07 в деформированном состоянии и характер распределения нормальных напряжений σ_y (МПа)

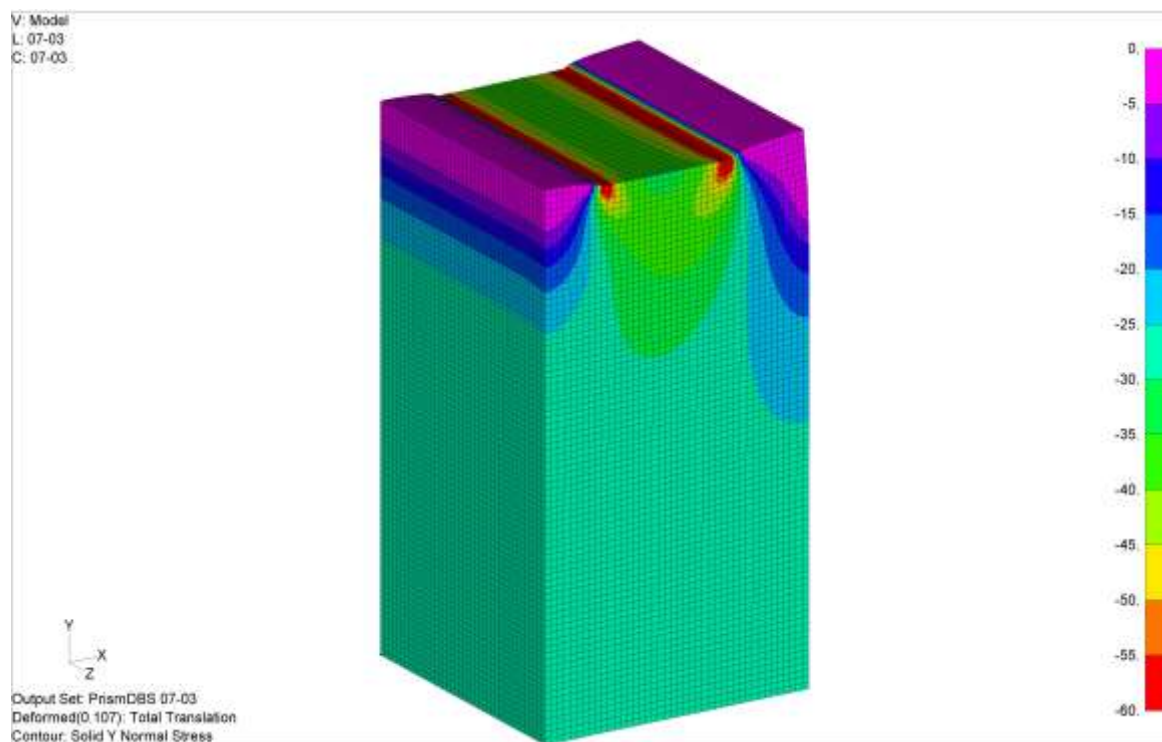


Рис. 3. Общий вид модели DBS-07-03 в деформированном состоянии и характер распределения нормальных напряжений σ_y (МПа)

Все узлы модели (см. рис. 2, 3), расположенные в ее основании (плоскости XOZ), закреплены от смещения в вертикальном направлении вдоль оси Y , расположенные на плоскости XOY узлы основания закреплены от смещения вдоль оси Z , а расположенные на плоскости YOZ – вдоль оси X .

Вертикальный размер (высота) модели равна 106,066 мм; горизонтальные (высота и ширина поперечного сечения) – 52,5 мм. Начальный модуль упругости бетона $E_c = 30000$ МПа, а коэффициент Пуассона $\mu = 0,2$. Приложение нагрузки осуществлялось заданием по плоскости приложения жесткого штампа на пластину постоянного по его площади перемещения, равного 1,06066 мм, что соответствует средней относительной деформации образца, равной 1 ‰.

При расчете кроме картин распределения вертикальных напряжений (см. рис. 2, 3) определялись величины реакций в связях по нижнему торцу модели и величина их равнодействующей N_{fem} .

Сопоставление результатов расчетов по предлагаемой методике с результатами расчетов конечно-элементных моделей представлено в табл. 2.

Таблица 2

Сопоставление результатов расчетов по предлагаемой методике с результатами расчетов конечно-элементных моделей

Вид нагрузки	Шифр модели	b , мм	a , мм	$c(e)$, мм	N_{cal} , Н	N_{fem} , Н	$\frac{N_{cal}}{N_{fem}}$
Концентричное	QS-3	52,5	11,25	52,5	21466	22464	0,956
	QS-7	52,5	26,25	52,5	55310	52005	1,064
	QS-11	52,5	41,25	52,5	78165	76037	1,028
Центральное половое	BS-3	52,5	11,25	52,5	47327	48196	0,982
	BS-7	52,5	26,25	52,5	69415	66783	1,039
	BS-11	52,5	41,25	52,5	80546	79411	1,014
Центральное неконцентричное	S-3×7	52,5	11,25	26,25	35562	35459	1,003
	S-3×11	52,5	11,25	41,25	44842	45123	0,994
	S-7×11	52,5	26,25	41,25	66772	63500	1,052
Полосовое двумя штампами	DBS-03-03	52,5	11,25	16,875	58416	58694	0,995
	DBS-03-07	52,5	11,25	20,075	59492	61219	0,972
	DBS-03-11	52,5	11,25	5,625	47327	46352	1,021
	DBS-07-03	52,5	26,25	24,375	75381	74226	1,016
	DBS-07-07	52,5	26,25	13,125	69415	67776	1,024
Среднее							1,011

Заключение. Сопоставление результатов расчетов по предлагаемой методике с результатами расчетов конечно-элементных моделей показало их хорошую сходимость. Это позволяет рекомендовать разработанную методику для оценки деформативности элементов при местном сжатии при любой схеме приложения в условиях упругой работы бетона. На ее основе может быть разработана методика расчета контактных деформаций с использованием диаграмм деформирования бетона при осевом сжатии, трансформированных с учетом сложного напряженного состояния в области действия местной нагрузки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тур В.В., Рак Н.А. Прочность и деформации бетона в расчетах конструкций. – Брест, 2003. – 252 с.
2. Курьелло А.С., Кваша В.Г. Экспериментальное исследование железобетонных арок с несовершенными шарнирами // Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1966. – № 7. – С. 29 – 36.
3. Griezic A., Cook W., Mitchell D. Stress-Strain Characteristics of Confined Concrete in Column «Hinges» // ACI Materials Journal. – 1998. – V. 95, № 4 – P. 419 – 428.
4. Поздникин В.М. Экспериментальные исследования деформаций бетона под подошвой жесткого штампа // Проблемы архитектурного проектирования промышленных предприятий, зданий и сооружений. – Свердловск, 1973. – С. 82 – 87.
5. Коваль Ю.В. Контактные деформации бетонов при кратковременном и длительном местном сжатии: Автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01. – Киев, 1980. – 22 с.
6. Lieberum K., Reinhardt H. Strength of Concrete on an Extremely Small Bearing Area // ACI Structural Journal. – 1989. – V. 86, № 1. – P. 67 – 76.
7. Рак Н.А. Напряженно-деформированное состояние узлов сопряжения колонн кольцевого сечения со стропильными конструкциями: Автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01 / Белорус. гос. политехн. акад. – Мн.: БГПА, 1994. – 26 с.
8. Rak N. Calculation of Reinforced Concrete Member Deformation Under Local Compression // Modern Building Materials, Structures and Techniques: Proceedings of 4th international conference. – Vilnius: Technika, 1995. – Vol. II. – P. 46 – 51.
9. Reinhardt H., Koch R. Hochfester Beton unter Teilflashenbelastung // Beton- und Stahlbetonbau. – 1998. – Jahr. 93, № 7. – P. 182 – 188.
10. Рак Н.А., Аль-Арики Н. Исследование прочности высокопрочного бетона при местном сжатии // Перспективы развития новых технологий в строительстве и подготовке инженерных кадров Республики Беларусь: Сб. тр. VI Междунар. науч.-метод. семинара. – Мн.: Тхнопринт, 2001. – С. 302 – 308.
11. Рак Н.А., Аль-Арики Н. Влияние условий приложения нагрузки на прочность тяжелого высокопрочного бетона при местном сжатии // Вестник БГТУ. Строительство и архитектура. – 2002. – № 1(13). – С. 64 – 68.
12. Рак Н.А., Аль-Арики Н. Контактные деформации при местном сжатии элементов из тяжелого высокопрочного бетона // Вестник БГТУ. Строительство и архитектура. – 2003. – № 1(19) – С. 151 – 157.
13. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. – М.: Наука, 1974. – 455 с.
14. Горбунов-Посадов М.И., Маликова Т.А., Соломин В.И. Расчет конструкций на упругом основании. – М.: Стройиздат, 1973. – 680 с.
15. Шутенко Л.Н., Гильман А.Д., Лупан Ю.Г. Основания и фундаменты. – Киев: Выща школа, 1989. – 328 с.
16. Гийон И. Предварительно-напряженный бетон. Теоретические и экспериментальные исследования. – М., 1959. – 703 с.
17. Гишман М.Е., Кизирия Г.В. Ползучесть, усадка и местные напряжения в железобетонных предварительно напряженных конструкциях мостов. – М.: Автотрансиздат, 1959. – 180 с.
18. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
19. Филлин А.П. Механика твердого деформируемого тела. Т. 1. – М.: Наука, 1975. – 832 с.
20. Пособие по проектированию каменных и армокаменных конструкций (к СНиП II-22-81). – М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1989. – 152 с.
21. Чебаков М.И. Контактные задачи теории упругости для кругового цилиндра конечных размеров // Механика сплошной среды. – Ростов н/Д: РГУ, 1981. – С. 134 – 139.
22. Босаков С.В. Контактная задача для упругой полосы // Вести АН Беларуси. Сер. физ.-техн. наук. – 1997. – № 4 – С. 119 – 121.
23. СНБ 5.03.01-02. Конструкции бетонные и железобетонные / МАиС РБ. – Мн., 2003. – 140 с.