

УДК 624.04

**О ЛИНЕАРИЗАЦИИ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

*канд. техн. наук, доц. Л.С. ТУРИЩЕВ  
(Полоцкий государственный университет)*

*Рассматривается правомерность геометрической линеаризации в задачах упругой устойчивости стержневых конструкций в соответствии с основными положениями математической теории ветвления решений нелинейных уравнений. Количественная оценка влияния докритических и закритических деформаций и перемещений на величины, характеризующие потерю устойчивости упругих стержневых конструкций, производится для фермы Мизеса.*

Исследование упругой устойчивости стержневых конструкций согласно бифуркационному критерию основано на предположении, что конструкции являются консервативными системами, нагруженными потенциальными силами. При получении уравнений, описывающих смежную форму равновесия стержневой конструкции, как правило, линеаризуется геометрическая сторона задачи по двум направлениям: не учитываются докритические деформации и перемещения и не учитывается нелинейный характер закритических деформаций и перемещений. Рассмотрение вопроса о допустимости геометрической линеаризации задач упругой устойчивости произвольных стержневых конструкций требует привлечения математической теории ветвления решений нелинейных уравнений.

Такая теория, взяв начало в трудах Пуанкаре, Шмидта, Л.М. Ляпунова в связи с проблемой о фигурах равновесия вращающейся жидкости, получила глубокое развитие в работах [1, 2]. Постановка задачи о ветвлении решений нелинейных уравнений такова.

Имеется некоторая система нелинейных уравнений

$$\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}, \mu) = 0, \quad (1)$$

решения которой  $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  зависят от числового параметра  $\mu$ . Исследуется изменение количества решений  $\bar{\mathbf{x}}$  уравнения (1) при изменении параметра  $\mu$  и определяются критические значения этого параметра, при которых решения (1) разветвляются или сливаются.

Пусть некоторому значению  $\mu_0$  соответствует решение  $\bar{\mathbf{x}}_0$ . Тогда если для каждого  $\varepsilon > 0$  можно указать такое  $\mu$ , что  $|\mu - \mu_0| < \varepsilon$  и уравнение (1) имеет, по крайней мере, два решения, лежащие в  $\varepsilon$  окрестности точки  $\bar{\mathbf{x}}_0$ , то пара  $(\bar{\mathbf{x}}_0, \mu_0)$  является точкой ветвления решений уравнения (1).

Близким к понятию точки ветвления решений является понятие точки бифуркации. Пусть некоторая система нелинейных уравнений вида

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\bar{\mathbf{x}}, \mu) \quad (2)$$

имеет нулевое решение при всех значениях параметра  $\mu$ , т.е.

$$\mathbf{A}(\mathbf{0}, \mu) = \mathbf{0}.$$

Тогда число  $\mu_0$  является точкой бифуркации для уравнения (2), если любому  $\varepsilon > 0$  соответствует такое значение  $\mu$  из промежутка  $|\mu - \mu_0| < \varepsilon$ , при котором уравнение (2) имеет, по крайней мере, одно ненулевое решение  $\bar{\mathbf{x}}(\mu)$ , удовлетворяющее условию  $\|\bar{\mathbf{x}}(\mu)\| < \varepsilon$ . Следовательно, при определении точки бифуркации априори предполагается существование нулевого решения, справедливого при всех значениях параметра  $\mu$ .

Указанные понятия точки ветвления решений и точки бифуркации решений перекликаются с понятием точки бифуркации форм равновесия стержневой конструкции. Здесь можно выделить два случая.

Во-первых, если для некоторой стержневой конструкции исследование устойчивости согласно бифуркационному критерию проводить без учета упрощающих допущений (узловой характер приложения нагрузки, неучет докритических деформаций и перемещений), то в качестве исследуемой формы равновесия принимается некоторое деформированное состояние конструкции. Поэтому в этом случае точке бифуркации форм равновесия стержневой конструкции соответствует точка ветвления решений уравнения (1).

Во-вторых, если для некоторой стержневой конструкции исследование устойчивости согласно бифуркационному критерию проводить с учетом указанных выше упрощающих допущений, то в качестве исследуемой формы равновесия принимается начальное недеформированное состояние конструкции. Следовательно, в этом случае точка бифуркации форм равновесия стержневой конструкции математически адекватна точке бифуркации уравнения (2).

Таким образом, если при исследовании устойчивости стержневой конструкции согласно бифуркационному критерию не учитывается геометрическая нелинейность, порождаемая докритическими эффектами, то это приводит к изменению структуры нелинейных уравнений и математической сути задачи устойчивости. От задачи нахождения точек ветвления решений для уравнения (1) переходят к задаче нахождения точек бифуркации для уравнения (2). В математической теории ветвления вопрос о допустимости перехода при решении некоторой задачи от уравнения (1) к уравнению (2) не исследован. В строительной механике неявно подразумеваемым обоснованием допустимости такого перехода принято считать малость неучитываемых докритических деформаций и перемещений и практическую приемлемость получаемых результатов. Однако такое обоснование в общем случае не является строгим и, кроме того, «не всякую малую величину можно отбросить, не искажая смысла задачи» [3].

Второе направление геометрической линеаризации задачи устойчивости стержневых конструкций позволяет считать закритические деформации и перемещения бесконечно малыми величинами и заметить задачу о точках бифуркации нелинейного уравнения (2) более простой задачей о характеристических значениях линейного уравнения

$$\bar{x} = \mu B\bar{x}, \tag{3}$$

где  $B$  – некоторый линейный оператор.

Первым, кто сделал попытку обосновать законность такой линеаризации задач устойчивости, был Ф.С. Ясинский [1]. Он рассматривал частный случай бифуркационной задачи – задачу о продольном изгибе стержня, и им была сформулирована и доказана соответствующая теорема. Однако известные математики А.Ю. Ишлинский и М.Г. Крейн обратили внимание на неверность ее доказательства, а М.А. Красносельский в [5] доказал, что и сама линеаризация в бифуркационных задачах справедлива не всегда.

Принцип линеаризации уравнения (2) и переход к уравнению (3) возможен в следующем случае.

Пусть непрерывный нелинейный оператор  $A(\bar{x}, \mu)$  допускает представление

$$A(\bar{x}, \mu) = \mu B\bar{x} + C(\bar{x}, \mu) + D(\bar{x}, \mu),$$

где линейный оператор  $B$  связан с производной Фреше оператора  $A(\bar{x}, \mu)$  в точке  $\bar{x} = \theta$  соотношением

$$\mu B = A'_x(\theta, \mu).$$

Здесь  $C(\bar{x}, \mu)$  и  $D(\bar{x}, \mu)$  – соответственно операторы, содержащие члены второго и более высокого порядка малости. Тогда если линейный оператор  $B$  имеет простые или нечетнократные характеристические значения, то они совпадают с точками бифуркации нелинейного оператора  $A(\bar{x}, \mu)$ . Если характеристические значения оператора  $B$  имеют четную кратность, то этого утверждать нельзя.

Оценим влияние докритических и закритических деформаций и перемещений на упругую устойчивость простейшей шарнирно-стержневой системы – фермы Мизеса – при симметричном однопараметрическом нагружении (рис. 1).

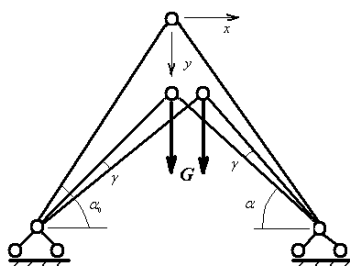


Рис.1. Схема деформирования фермы Мизеса

Материал стержней фермы считается линейно упругим и характеризуется некоторым модулем упругости  $E$ . Площадь поперечного сечения каждого стержня равна  $F_0$ , длина –  $l_0$ . При исследовании

устойчивости считается, что стержни системы могут только растягиваться и сжиматься. Так как учет геометрической нелинейности связан с конечными деформациями стержневой системы, то исследование проведем с использованием трех мер деформации [6]:

- меры деформации Коши:  $\varepsilon = \frac{l_0 - l}{l_0}$ ;
- меры деформации Генки:  $\varepsilon = \ln \frac{l_0}{l}$ ;
- меры деформации Свайнгера:  $\varepsilon = \frac{l_0 - l}{l}$ ,

где  $l_0, l$  – длины элементов соответственно до и после деформации системы.

Критические состояния данной системы с применением меры Коши без изучения закритического поведения впервые рассматривались Р. Мизесом [7]. Вопросы закритического поведения фермы Мизеса с использованием той же меры деформации частично рассматривались рядом авторов, в том числе [6, 8 – 10].

Для описания процесса деформирования фермы Мизеса рассматриваются три группы зависимостей:

- уравнения равновесия системы в деформированном состоянии:

$$\begin{aligned} \sum y = 0, \quad \sum \tilde{N}_i \sin[\alpha + (-1)^i \gamma] - \mu = 0, \\ \sum x = 0, \quad \sum (-1)^{i+1} \tilde{N}_i \cos[\alpha - (-1)^{i+1} \gamma] = 0, \quad (i = 1, 2), \end{aligned}$$

где  $\tilde{N}_i = \frac{N_i}{EF_0}$ ,  $\mu = \frac{G}{EF_0}$  – соответственно безразмерные внутренние усилия и безразмерный параметр нагружения;  $\alpha$  и  $\gamma$  – обобщенные координаты, описывающие симметричную и антисимметричную составляющие деформированного положения системы (см. рис. 1);

- условия совместности деформаций системы:

$$2a \sin[\alpha - (-1)^i \gamma] = l_i \sin 2\alpha;$$

- законы деформирования материала стержневой системы для рассматриваемых мер деформации приведены в таблице 1.

Таблица 1

Законы деформирования

Мера деформации		
Коши	Генки	Свайнгера
$\tilde{N}_i = \frac{l_0 - l_i}{l_0}$	$\tilde{N}_i = \ln \frac{l_0}{l_i}$	$\tilde{N}_i = \frac{l_0 - l_i}{l_i}$

Из совместного рассмотрения трех записанных групп зависимостей получим уравнения, описывающие процесс деформирования фермы Мизеса для различных мер деформации:

- мера Коши:

$$\begin{aligned} \sum y = 0, \quad 2 \left( \sin \alpha \cos \gamma - \cos \alpha_0 \frac{\cos^2 \gamma - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} \right) - \mu = 0, \\ \sum x = 0, \quad \sin^2 \alpha \cos \alpha - \cos \alpha_0 \cos \gamma = 0; \end{aligned}$$

- мера Генки:

$$\begin{aligned} \sum y = 0, \quad \ln \left[ \left( \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha_0 (\cos^2 \gamma - \cos^2 \alpha)} \right)^{\sin \alpha \cos \gamma} \left( \frac{\sin^2 (\alpha + \gamma)}{(\cos^2 \gamma - \cos^2 \alpha)} \right)^{\cos \alpha \sin \gamma} \right] - \mu = 0, \\ \sum x = 0, \quad \sin^2 \alpha \cos \alpha + \cos \alpha_0 (\cos^2 \alpha - \cos^2 \gamma) \exp(2ctg^2 \alpha) = 0; \end{aligned}$$

- мера Свайнгера:

$$\Sigma y = 0, \quad 2 \sin \alpha \left( \frac{\cos \alpha (\cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma - 2 \cos^2 \alpha \cos^2 \gamma)}{\cos \alpha_0 (\cos^2 \gamma - \cos^2 \alpha)} - \cos \gamma \right) - \mu = 0,$$

$$\Sigma x = 0, \quad \cos^2 \gamma - \frac{\cos \alpha (1 - 2 \cos^2 \alpha)}{\cos \alpha_0} \cos \gamma - \cos^2 \alpha = 0.$$

В результате исследования этих уравнений получены аналитические зависимости и величины, характеризующие особенности деформирования и потери устойчивости фермы Мизеса с учетом влияния докритических и закритических деформаций. Все они приведены в таблице 2.

Таблица 2

Аналитические зависимости и величины

Зависимости и величины	Меры деформации		
	Мера Коши	Мера Генки	Мера Свайнгера
Уравнение кривой равновесных состояний	$\mu = 2 \sin \alpha \left( 1 - \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} \right)$	$\mu = 2 \sin \alpha \ln \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha}$	$\mu = 2 \sin \alpha \left( \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_0} - 1 \right)$
Уравнение точек бифуркации	$\sin^2 \alpha_1 \cos \alpha_1 = \cos \alpha_0$	$\cos \alpha_1 \exp(-ctg^2 \alpha_1) = \cos \alpha_0$	$\frac{\cos \alpha_1 (1 - 2 \cos^2 \alpha_1)}{1 - \cos^2 \alpha_1} = \cos \alpha_0$
Уравнение предельных точек	$\cos^3 \alpha_2 = \cos \alpha_0$	$\cos \alpha_2 \exp(-tg^2 \alpha_2) = \cos \alpha_0$	$\frac{2 \cos^2 \alpha_2 - 1}{\cos \alpha_2} = \cos \alpha_0$
Бифуркационный параметр нагружения	$\mu_1 = 2 \sin \alpha_1 \cos^2 \alpha_1$	$\mu_1 = 2 \frac{\cos^2 \alpha_1}{\sin \alpha_1}$	$\mu_1 = 2 \frac{\sin \alpha_1 \cos^2 \alpha_1}{1 - 2 \cos^2 \alpha_1}$
Предельный параметр нагружения	$\mu_2 = 2 \sin^3 \alpha_2$	$\mu_2 = 2 \frac{\sin^3 \alpha_2}{\cos^2 \alpha_2}$	$\mu_2 = 2 \frac{\sin^3 \alpha_2}{2 \cos^2 \alpha_2 - 1}$

В таблице 2 все характеристики, соответствующие точкам бифуркации отмечены индексом 1, а предельным точкам – индексом 2. Нетрудно увидеть, что зависимости, полученные для меры деформации Коши, вытекают из выражений, соответствующих мере деформации Генки, при разложении в ряд логарифмической или показательной функций и удержании двух первых членов ряда.

Сравнение приведенных в таблице 2 результатов показывает, что если исходить из мер деформации Коши и Свайнгера, то по отношению к мере деформации Генки получается, соответственно, нижняя и верхняя оценки характеристик критических состояний системы. Это наглядно видно на графиках (рис. 2), отражающих зависимость между параметром начальной «геометрии»  $\alpha_0$  и параметром «геометрии» системы в критических состояниях, соответствующих точкам бифуркации и предельным точкам

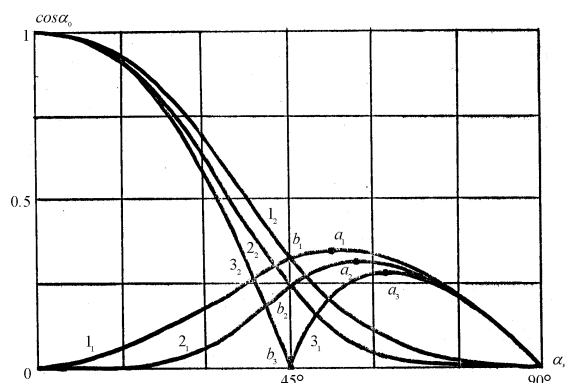


Рис. 2. Зависимости между начальными и критическими параметрами «геометрии» системы

На рисунке 2 графики, отмеченные цифрой 1, соответствуют мере деформации Коши, 2 – мере деформации Генки, 3 – мере деформации Свайнгера.

Имеющиеся на графике точки  $a_i$  и  $b_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) соответствуют особым значениям параметра начальной «геометрии»  $\alpha_0$  системы. В первом случае они соответствуют наименьшим значениям параметра, при достижении которых у системы появляется точка бифуркации, а во втором случае – значениям параметра, при которых точка бифуркации и предельная точка системы сливаются. Значения этих параметров приведены в таблице 3.

Таблица 3

Особые значения параметра начальной «геометрии» системы

Мера деформации					
Коши		Генки		Свайнгера	
$\alpha_{0a}$	$\alpha_{0b}$	$\alpha_{0a}$	$\alpha_{0b}$	$\alpha_{0a}$	$\alpha_{0b}$
67°25'	69°18'	68°58'	73°56'	70°22'	90°

С учетом таких точек из графиков (см. рис. 2) следует, что возможны 5 разновидностей структуры спектра критических состояний системы. Во-первых, при значениях  $\alpha_0 \in (0, \alpha_{0a})$  система имеет только предельную точку. Во-вторых, при значениях  $\alpha_0 = \alpha_{0a}$  система имеет предельную точку и предшествующую ей кратную точку бифуркации. В-третьих, при значениях  $\alpha_0 \in (\alpha_{0a}, \alpha_{0b})$  система имеет предельную точку и две предшествующие ей точки бифуркации. В-четвертых, при значениях  $\alpha_0 = \alpha_{0b}$  система имеет предельную точку и две точки бифуркации, причем вторая из них сливается с предельной точкой. И, в-пятых, при значениях  $\alpha_0 \in (\alpha_{0b}, 90^\circ)$  система имеет две точки бифуркации и лежащую между ними предельную точку.

В то же время при исследовании устойчивости фермы Мизеса без учета геометрической нелинейности структура спектра критических состояний всегда одинакова. Она включает предельную точку и одну точку бифуркации. Значения безразмерных параметров нагружения, соответствующие этим критическим состояниям при линейной постановке задачи, определяются выражениями:

$$\mu_{1, \text{лин}} = 2 \frac{\cos^2 \alpha_0}{\sin \alpha_0}, \quad \mu_{2, \text{лин}} = 2 \frac{\sin^3 \alpha_0}{\cos^2 \alpha_0}.$$

По своей структуре эти формулы подобны соответствующим формулам для меры деформации Генки. Так как  $\alpha_0 > \alpha_{1Г}$  и  $\alpha_0 > \alpha_{2Г}$ , то из сравнения указанных формул для всех  $\alpha_0 \in (0, 90^\circ)$  очевидны неравенства:

$$\mu_{1, \text{лин}} < \mu_{1Г}, \quad \mu_{2, \text{лин}} > \mu_{2Г}.$$

Полученные соотношения имеют простое физическое объяснение. Неучет докритических деформаций при определении параметра нагружения, соответствующего точке бифуркации, эквивалентен завышению податливости системы боковым отклонениям, а при определении параметра нагружения, соответствующего предельной точке, – занижению ее податливости вертикальным перемещениям.

Для определения границ применимости геометрически линейной постановки исследования устойчивости фермы Мизеса построены графики, отражающие зависимость величин параметров нагружения в критических состояниях от параметра начальной «геометрии»  $\alpha_0$  (рис. 3).

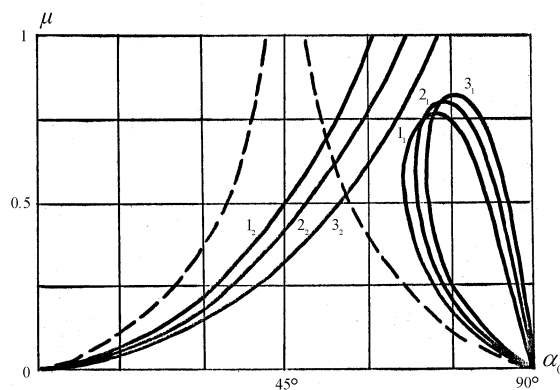


Рис. 3. Зависимость критических параметров нагружения от параметра  $\alpha_0$

Пунктиром на рисунке 3 нанесены графики, отвечающие решению задачи без учета геометрической нелинейности. Из приведенных графиков следует, что только в случае очень пологих и очень крутых систем для определения соответствующего критического параметра нагружения можно пользоваться линейной постановкой.

Таким образом, линейаризация задач упругой устойчивости стержневых конструкций (неучет докритических деформаций и неучет нелинейного характера закритических деформаций) может приводить как к количественным, так и качественным ошибкам в значениях критических нагрузок. При решении задач устойчивости с учетом геометрической нелинейности можно пользоваться мерой деформации Коши, как позволяющей получить нижнюю оценку соответствующей критической нагрузки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвлений решений нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1969.
2. Красносельский М.А. Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969.
3. Моисеев Н.Д. Очерки развития теории устойчивости. – М.: Гостехтеориздат, 1959. – 427 с.
4. Ясинский Ф.С. Избранные работы по устойчивости сжатых стержней. – М.: Гостехтеориздат, 1934. – 427 с.
5. Красносельский М.А. К задаче о точках бифуркации // Докл. Акад. наук СССР. – 1951. – Т. LXXIX, № 3. – С. 389 – 392.
6. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Наука, 1967. – 418 с.
7. Mises R. Uber die Stabilitatsprobleme der Elastizitatstheorie // Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Mechanik. – 1923. – № 3. – С. 15 – 23.
8. Корноухов Н.В. Особый случай потери устойчивости // Сб. тр. ин-та строительной механики Акад. наук УССР. – 1952. – № 17. – С. 5 – 17.
9. Михайличенко К.А. О расчете на устойчивость шарнирно-стержневых систем // Изв. Акад. наук СССР, ОТН. – 1958. – № 12. – С. 120 – 123.
10. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования. – М.: Наука, 1988. – 231 с.