

ФИЗИКА

УДК 536.24:621.036:621.793

НАГРЕВ ЧАСТИЦ В ПОТОКЕ ГАЗА И ПЛАЗМЫ ПРИ НАПЫЛЕНИИ ПОКРЫТИЙ

*д-р техн. наук, проф. Е.М. ИВАНОВ, д-р техн. наук, проф. В.С. ИВАШКО,
канд. техн. наук, доц. К.В. БУЙКУС
(Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск),
д-р техн. наук, проф. М.Л. ХЕЙФЕЦ
(Полоцкий государственный университет)*

Рассматривается нагрев частиц при газотермическом напылении. Показано, что при детальном анализе поведения частицы при высокотемпературной обработке (процессы плавления, испарения и химической кинетики взаимодействия частицы с газом) необходимо рассматривать соответствующие задачи для шара, а не для модели термически тонкого тела.

Рассмотрим пограничный слой на теле вращения, ось которого направлена параллельно скорости набегающего потока. Тогда течение в пограничном слое будет осесимметричным, а его характеристики будут зависеть только от двух параметров.

Выберем следующую систему ортогональных криволинейных координат: координату X , отсчитываемую по дуге вдоль какого-нибудь из меридианов, проведенных на обтекаемом теле (рис. 1), координату Y , отсчитываемую по нормали к обтекаемой поверхности, координату Z' , отсчитываемую по дуге соответствующей параллели. Заметим, что в случае осесимметричного потока характеристики течения от координаты Z' не зависят.

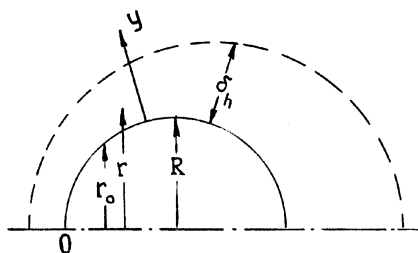


Рис. 1. Схема пограничного слоя сферы

Если радиусы кривизны меридианов и параллелей будут велики по сравнению с толщиной пограничного слоя, то при составлении уравнений движения в пограничном слое кривизной координатных линий можно пренебречь и рассматривать выбранные оси как прямолинейные.

В результате, пренебрегая массовыми силами, в случае неустановившегося течения получим следующее уравнение движения в пограничном слое:

$$\frac{dV_x}{dt} + V_x \frac{dV_x}{dx} + V_y \frac{dV_x}{dy} = \frac{dU}{dt} + U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{d^2V_x}{dy^2}. \quad (1)$$

Для получения уравнения неразрывности введем в меридиональном сечении пограничного слоя (см. рис. 1) точку A , находящуюся на расстоянии r от оси симметрии Oz , и построим при этой точке элементарную площадку со сторонами Δx и Δy .

Рассмотрим поток жидкости через кольцевую область, образованную вращением этой площадки вокруг оси Oz . Тогда в выделенную область по меридиональному направлению за единицу времени втечет количество жидкости, равное $2\pi r V_x \Delta y$, а вытечет $-2\pi[r V_x + d(r V_x)/dx \Delta x] \Delta y$.

Таким образом, общее количество жидкости, вытекшей по этому направлению, будет равно $2\pi[d(r V_x)/dx \Delta x] \Delta y$. В направлении к поверхности за единицу времени вытечет количество жидкости $2\pi(dr V_y/dy) \Delta x \Delta y$.

Так как для чисел Маха $M < 0,5$ можно пренебречь сжимаемостью газа, то на основании закона сохранения вещества сумма найденных количеств должна равняться нулю.

Тогда уравнением неразрывности для течения в рассматриваемом пограничном слое будет следующее:

$$\frac{d(r V_x)}{dx} + \frac{d(r V_y)}{dy} = 0.$$

Переходя к получению приближенных уравнений движения, заметим, что уравнение (1) может быть представлено в виде:

$$v \frac{d^2 V_x}{dy^2} + \dot{U} + UU' = W_x, \quad (3)$$

где $W_x = \frac{dV_x}{dt} + V_x \frac{dV_x}{dx} - \frac{dV_x}{dy} \int_0^y \left(\frac{dV_x}{dx} + \frac{R'}{R} V_x \right) dy$.

При этом в формуле (3) и далее точка над символом означает частную производную по t , а штрих – частную производную по x .

Введем переменную $\eta = y/\delta$, где δ – толщина пограничного слоя. При построении приближенного метода расчета пограничного слоя введем допущение, что распределение ускорений в каждом данном сечении пограничного слоя на обтекаемом контуре можно приближенно заменить распределением ускорений на некотором сечении пограничного слоя на соответствующей «эквивалентной» плоской пластине [1].

При высказанном допущении уравнение (3) может быть заменено следующим приближенным уравнением движения жидкости в пограничном слое:

$$\frac{d^2 V_x}{d\eta^2} = \frac{\delta^2}{v} (-\dot{U} - UU' + \bar{W}_x). \quad (4)$$

Дальнейший расчет требует определения зависимости $\bar{W}_x(\eta)$, которая будет найдена, если для каждого сечения пограничного слоя будет известна зависимость $\bar{V}_x(\eta)$.

Имея в виду условия

$$\text{при } y = \delta \quad V_x = U, \quad \frac{dV_x}{dy} = 0, \quad \frac{d^2 V_x}{dy^2} = 0, \quad (5)$$

которые определяют верхнюю границу пограничного слоя δ , и условия

$$\text{при } y = 0 \quad V_x = 0, \quad \frac{d^2 V_x}{dy^2} = 0, \quad (6)$$

представим V_x в виде кубического полинома от y :

$$V_x = A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3. \quad (7)$$

Используя граничные условия (5) для определения коэффициентов A_i , получаем:

$$V_x = \frac{U}{2} \left[3 \frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right]. \quad (8)$$

Таким образом,

$$\bar{V}_x = \frac{U}{2} (3\eta - \eta^3), \quad (9)$$

где в силу принятого допущения $U = U(x, t)$ и $\delta = \delta(x, t)$.

Одновременно в силу того, что передняя часть обтекаемого тела является тупой, положим приближенно $R = R_0(x)$.

Тогда, подставляя значение \bar{V}_x из (9) в (4), получаем для \bar{W}_x следующее выражение:

$$\bar{W}_x = \frac{1}{2} \dot{U} (3\eta - \eta^3) - \frac{3}{2} U (\eta - \eta^3) \frac{\dot{\delta}}{\delta} + \frac{1}{16} UU' (18\eta^2 - 3\eta^4 + \eta^6) - \frac{3}{16} U^2 \left(\frac{\delta'}{\delta} + \frac{R_0'}{R_0} \right),$$

так как

$$\frac{\delta \eta}{dx} = -\frac{y}{\delta^2} \delta' = -\eta \frac{\dot{\delta}}{\delta}; \quad \frac{d\eta}{dt} = -\eta \frac{\dot{\delta}}{\delta}.$$

Подставляя найденное таким образом значение \bar{W}_x в правую часть уравнения (4) и дважды интегрируя, получаем, обозначив $\zeta(x) = \frac{\delta^2}{v}$:

$$V_x = U \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\dot{U}}{U} \zeta \left(\frac{3}{4} \eta - \eta^2 + \frac{1}{2} \eta^3 - \frac{1}{20} \eta^5 \right) + \frac{1}{16} U' \zeta \left(\frac{366}{35} \eta - 8\eta^2 + \frac{3}{2} \eta^4 - \frac{1}{10} \eta^6 + \frac{1}{56} \eta^8 \right) + \frac{3}{4} \dot{\zeta} \left(\frac{1}{4} \eta - \frac{1}{6} \eta^3 + \frac{1}{20} \eta^5 \right) + \frac{3}{32} \left(U \zeta' + \frac{2R'_0}{R_0} U \zeta \right) \left(\frac{26}{35} \eta - \frac{1}{2} \eta^4 + \frac{7}{30} \eta^6 - \frac{1}{56} \eta^8 \right) \right]. \quad (10)$$

Отсюда, используя условие $V_x = U$ при $\eta = 1$, получаем для определения ζ следующее уравнение в частных производных:

$$m \frac{d\zeta}{dt} + U \frac{d\zeta}{dx} + \left(2 \frac{R'_0}{R_0} U + nU' + m \frac{\dot{U}}{U} \right) \zeta = b, \quad (11)$$

где $m = 2,33$; $n = 5,64$; $b = 23,27$.

Задача сводится теперь к нахождению частного решения уравнения (11), удовлетворяющего условию $\zeta = 0$ при $t = 0$. Определив соответствующее выражение $\zeta(t, \tau)$, из выражения (10) найдем распределение скоростей в пограничном слое, и задача, таким образом, будет решена до конца.

В частном случае течения вещества, возникающего мгновенно из состояния покоя, уравнение (11) примет вид:

$$m \frac{d\zeta}{dt} + U \frac{d\zeta}{dx} + \left(2 \frac{R'_0}{R_0} U + nU' \right) \zeta = b, \quad (12)$$

и соответствующая ему система обыкновенных дифференциальных уравнений будет

$$\frac{dt}{m} = \frac{dx}{U} = \frac{d\zeta}{b - \left(2 \frac{R'_0}{R_0} U + nU' \right) \zeta}. \quad (13)$$

Интегрируя уравнения, даваемые равенством двух первых и двух последних отношений, получаем:

$$\left. \begin{aligned} t - m \int \frac{dx}{U} &= C_1 \\ \zeta R_0^2 U^n - b \int R_0^2 U^{n-1} dx &= C_2 \end{aligned} \right\}. \quad (14)$$

Рассмотрим с помощью полученных приближенных уравнений неустановившегося течения жидкости задачу о развитии пограничного слоя на шаре радиуса R , который в момент времени $t = 0$ мгновенно приобретает скорость U_0 и дальше движется с этой скоростью равномерно, поступательно и прямолинейно. Одновременно будем считать, что в момент $t = 0$ во внешнем потоке устанавливается потенциальное распределение скоростей и на внешней границе пограничного слоя во время движения

$$U = \frac{3}{2} U_0 \sin \frac{x}{R}. \quad (15)$$

Обозначим

$$R_0 = R \cdot \sin \frac{x}{R}. \quad (16)$$

Введем вместо x новое переменное τ , полагая

$$\left. \begin{aligned} \cos \frac{x}{R} &= \tau \\ dx &= - \frac{R d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} \end{aligned} \right\}. \quad (17)$$

Заменим в уравнениях (14) U и R_0 их значениями из формул (15) и (16) и, переходя к переменному τ после вычисления соответствующих интегралов, получаем:

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{1}{3} \cdot \frac{mR}{U_0} \ln \frac{1+\tau}{1-\tau} = C_1 \\ \zeta(1-\tau^2)^{1+\frac{n}{2}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{bR}{U_0} \Phi_1(\tau) &= C_2 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

При получении первого выражения использовалось соотношение:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) = \ln \left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{1-\cos x}{1+\cos x} = -\frac{1}{2} \ln \frac{1+\cos x}{1-\cos x}.$$

Кроме того, во втором выражении системы (18) введено обозначение:

$$\Phi_1(\tau) = \int_0^{\tau} (1-\tau^2)^{\frac{n}{2}} d\tau. \quad (19)$$

Если воспользоваться представлением функции $(1+x)^2$ в виде степенного ряда

$$(1+q)^q = 1 + qx + \frac{q(q-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-k+1)}{k!} x^k + \dots,$$

который сходится абсолютно при $|x| < 1$; при $x = 1$ он также сходится абсолютно при $q > 0$, то во введенной нами функции $\Phi_1(\tau)$ подынтегральное выражение можно представить в виде аналогичного степенного ряда и почленно проинтегрировать. Полученный после интегрирования степенной ряд будет также абсолютно сходящимся, поскольку в нашем случае $q = n/2 = 2,82 > 0$, а $|x| = |-\tau^2| = \left| -\cos^2 \frac{x}{R} \right| \leq 1$.

В результате получим следующее представление функции $\Phi_1(\tau)$:

$$\Phi_1(\tau) = \int_0^{\tau} (1-\tau^2)^{\frac{n}{2}} d\tau = \tau - 0,94\tau^3 + 0,51324\tau^5 - 0,100204\tau^7 - 0,003507\tau^9 - 0,000677\tau^{11} - \dots \quad (20)$$

В частном случае при $\tau = 1$ получим $\Phi_1(1) = 0,468504$. Отдельные значения функции $\Phi_1(\tau)$ приведены в таблице 1.

Таблица 1

Значение функции $\Phi_1(\tau)$

τ	$\Phi_1(\tau)$	τ	$\Phi_1(\tau)$
0,01	0,009 999	0,6	0,434 027
0,1	0,099 065	0,7	0,455 431
0,2	0,192 642	0,8	0,465 339
0,3	0,275 845	0,9	0,468 224
0,4	0,344 930	1,0	0,468 504
0,5	0,397 748		

Общее решение уравнения (12) будет иметь вид: $\zeta = \Phi(C_1; C_2)$. Найдем отсюда частное решение, удовлетворяющее условию $\delta = 0$ при $t = 0$. Введем для этого безразмерную переменную φ , связанную с x зависимостью:

$$\varphi = \frac{U_0}{R} \int \frac{dx}{U(x)}. \quad (21)$$

Тогда уравнения (21) можно будет представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(\varphi, t) &= t + \frac{1}{3} \frac{mR}{U_0} \ln \frac{1+\tau}{1-\tau} = C_1 \\ \psi_2(\varphi, t) &= \zeta(1-\tau^2)^{1+\frac{n}{2}} + \frac{2}{3} \frac{bR}{U_0} \Phi_1(\tau) = C_2 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Для решения поставленной задачи подставим в систему (22) вместо t и ζ нули. В результате получим:

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(\varphi, 0) &= \frac{1}{3} \frac{mR}{U_0} \ln \frac{1+\tau}{1-\tau} = \bar{\psi}_1 \\ \psi_2(0, \varphi) &= \frac{2}{3} \frac{bR}{U_0} \Phi_1(\tau) = \frac{2}{3} \frac{bR}{U_0} \Phi_1 \left[th \frac{3U_0}{2mR} \bar{\psi}_1 \right] = \bar{\psi}_2 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

где $\bar{\psi}_1$ и $\bar{\psi}_2$ – значения ψ_1 и ψ_2 при $t = \zeta = 0$.

Заменим теперь в последнем выражении $\bar{\psi}_1$ и $\bar{\psi}_2$ значениями ψ_1 и ψ_2 из системы (22):

$$\zeta (1-\tau^2)^{1+\frac{n}{2}} + \frac{2}{3} \frac{bR}{U_0} \Phi_1(\tau) = \frac{2}{3} \frac{bR}{U_0} \Phi_1 \left[th \left(\frac{3U_0}{2mR} t + \frac{1}{2} \ln \frac{1+\tau}{1-\tau} \right) \right].$$

Используя соотношение для гиперболического тангенса суммы аргументов

$$th(x+y) = \frac{thx + thy}{1 + thx thy},$$

получаем:

$$th \left(\frac{3U_0 t}{2mR} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+\tau}{1-\tau} \right) = \frac{th \left(\frac{3U_0 t}{2mR} \right) + \tau}{1 + \tau th \left(\frac{3U_0 t}{2mR} \right)} = \gamma. \quad (24)$$

Так как

$$th \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1+\tau}{1-\tau} \right) = \frac{\frac{1+\tau}{1-\tau} - 1}{\frac{1+\tau}{1-\tau} + 1} = \tau,$$

искомое частное решение запишется в виде:

$$\zeta = \frac{2}{3} \frac{bR}{U_0} \frac{\Phi_1(\gamma) - \Phi_1(\tau)}{(1-\tau^2)^{1+\frac{n}{2}}}. \quad (25)$$

Выражение (25) дает закон нарастания пограничного слоя во времени.

Покажем, что при $t \rightarrow \infty$ полученное решение переходит в решение соответствующей стационарной задачи. Прежде всего, из выражения (24) имеем при $t = \infty$ функцию $\gamma = 1$.

Тогда формула (25) преобразуется таким образом:

$$\zeta_{t=\infty} = \frac{2}{3} \frac{bR}{U_0} \frac{\Phi_1(1) - \Phi_1(\tau)}{(1-\tau^2)^{1+\frac{n}{2}}}. \quad (26)$$

Далее из выражения (25), учитывая обозначение (19), находим:

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{2bR}{3U_0} \frac{(1-\gamma^2)^{\frac{n}{2}}}{(1-\tau^2)^{1+\frac{n}{2}}} \frac{d\gamma}{dt}. \quad (27)$$

Значение $\frac{d\gamma}{dt}$ найдем, дифференцируя выражение (24):

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{th \tau t + \tau}{1 + \tau th \tau t} \right] = \frac{d}{dt} \left[\frac{sh \tau t + \tau chat}{chat + \tau sh \tau t} \right] = a \left[1 - \frac{(sh \tau t + \tau chat)^2}{(chat + \tau sh \tau t)^2} \right] = a(1-\gamma^2),$$

или в другой форме записи:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{a(1-\tau^2)}{[chat + \tau shat]^2}.$$

Из сопоставления двух последних выражений, где обозначено $a = \frac{3U_0}{2mR}$, следует

$$\frac{1-\gamma^2}{1-\tau^2} = \frac{1}{[chat + \tau shat]^2}.$$

В результате получим

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{b}{m} \frac{1}{[chat + \tau shat]^{n+2}}. \quad (28)$$

Равенство (28) дает $\dot{\zeta} = 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Так как в рассматриваемом случае $\dot{U} = 0$, то формула (10) переходит в формулу, выражающую закон распределения скоростей в слое в стационарном течении. Таким образом, полученное решение найдем при $t \rightarrow \infty$, которое соответствует стационарной задаче.

На основании выражения (25) получаем следующую зависимость изменения толщины гидродинамического пограничного слоя по углу и во времени:

$$\frac{\delta_n}{D} = \frac{2,785}{\sqrt{Re}} \frac{[\Phi_1(\gamma) - \Phi_1(\tau)]^{\frac{1}{2}}}{(1-\tau^2)^{1,91}}, \quad (29)$$

где $\Phi_1(\tau) = \int_0^\tau (1-\tau^2)^{2,82} d\tau$; $\gamma = th \left[0,6437S + \frac{1}{2} \ln \frac{1+\tau}{1-\tau} \right]$.

В частности, в лобовой точке ($\tau = 1$) в установившемся состоянии ($t \rightarrow \infty, \gamma = 1$) будем иметь

$$\frac{\delta_n}{D} = \frac{1,0075}{\sqrt{Re}}.$$

Используя выражение [2], получим критериальную зависимость для определения числа Нуссельта для любой точки поверхности сферы в произвольный момент времени:

$$Nu = \frac{\bar{\lambda}}{\lambda_\infty} \left[2 + \frac{(1-\tau^2)^{1,91}}{2,785 [\Phi_1(\gamma) - \Phi_1(\tau)]^{\frac{1}{2}}} Re^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}} \right]. \quad (30)$$

Для стационарного случая это выражение можно представить в следующем виде:

$$Nu = \frac{\bar{\lambda}}{\lambda_\infty} \left(2 + \beta Re^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}} \right). \quad (31)$$

Расчетные значения углов φ представлены в таблице 2.

Таблица 2

Значения углов φ

φ , град	τ	$\frac{\delta_H}{D} \sqrt{Re}$	β	φ , град	τ	$\frac{\delta_H}{D} \sqrt{Re}$	β
0	1	1,0075	0,993	100	-0,1736	2,357	0,4243
30	0,866	1,0926	0,915	120	-0,50	4,49	0,223
40	0,766	1,159	0,8628	140	-0,766	14,53	0,0688
60	0,50	1,283	0,781	150	-0,866	38,05	0,0264
80	0,1736	1,616	0,6188	180	-1,00	80,09	0
90	0	1,906	0,5246	-	-	-	-

В стационарном случае средняя по тепловой проводимости толщина пограничного слоя равна

$$\delta/D = 2,013Re^{-\frac{1}{2}}Pr^{-\frac{1}{3}}.$$

Подставляя найденное значение величины δ/D в выражение (31), получаем выражение для среднего по поверхности сферы числа Нуссельта:

$$Nu = \frac{\bar{\lambda}}{\lambda_{\infty}} \left(2 + 0,497Re^{\frac{1}{2}}Pr^{\frac{1}{3}} \right). \tag{32}$$

Для лобовой точки сферы

$$Nu = \frac{\bar{\lambda}}{\lambda_{\infty}} \left(2 + 0,993Re^{\frac{1}{2}}Pr^{\frac{1}{3}} \right). \tag{33}$$

Для одноатомных газов, вводя число Пекле ($Pe = Re \cdot Pr$), вместо выражений (32) и (33) получаем:

$$Nu = \frac{\bar{\lambda}}{\lambda_{\infty}} \left(2 + 0,531\sqrt{Re} \right), \tag{34}$$

$$Nu = \frac{\bar{\lambda}}{\lambda_{\infty}} \left(2 + 1,061\sqrt{Re} \right). \tag{35}$$

На рисунке 2 представлено изменение числа Нуссельта во времени на поверхности сферы при $\varphi = \pi/2$ для числа $Re = 10$ (для этой точки $\beta = 0,5246$, что незначительно отличается от среднего значения $\beta = 0,497$).

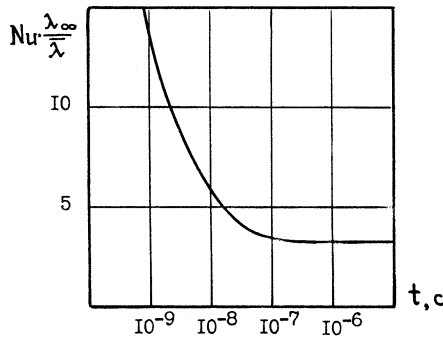


Рис. 2. Изменение числа Нуссельта во времени на поверхности сферы при $\varphi = \pi/2$; $Re_{\infty} = 10$; $Pr = 0,689$

В [4] для учета зависимости кинетических коэффициентов высокотемпературного газа рекомендуется следующее соотношение:

$$Nu = \frac{\alpha D}{\lambda_{\infty}} = 2 \frac{\lambda_w}{\lambda_{\infty}} + 0,5Re^{0,5}Pr^{0,4} \left(\frac{\rho_{\infty}\mu_{\infty}}{\rho_w\mu_w} \right)^{0,2}. \tag{36}$$

В [5] предложено выражение для определения числа Нуссельта с учетом температурной зависимости кинетических коэффициентов газа:

$$Nu = \frac{\alpha D}{\lambda_{\infty}} = \left(2 + 0,6Re^{0,5}Pr^{0,33} \right) \left(\frac{v_w}{v_{\infty}} \right)^{0,15}. \tag{37}$$

Проведем сравнение этих критериальных зависимостей при числах $Re = 0$ для случая температур $T_w = 10^3$ К ($\lambda_w = 0,0436$ Вт/(м·К)) и $T_{\infty} = 10^4$ К ($\lambda_{\infty} = 0,0702$ Вт/(м·К)).

В [3] с помощью численных методов рассмотрена задача о движении и теплообмене сферы в высокотемпературном газе и проведено сравнение с экспериментальными данными. Численные решения для характеристик теплообмена и полного сопротивления сферы получены на основе метода конечных разностей (релаксационный метод в сочетании с итерационным методом Гаусса – Зейделя). Для некоторых чисел Рейнольдса в [3] приведены распределения числа Нуссельта по поверхности сферы. На рисунке 3 показано распределение числа Нуссельта для $Re = 10$ при $\tau_s = 1$ и $\tau_s = 0,441$ по данным [3] и нашим расчетам для стационарного случая. Расхождение составило менее 5,5 %, что позволяет сделать вывод о достоверности полученных нами результатов.

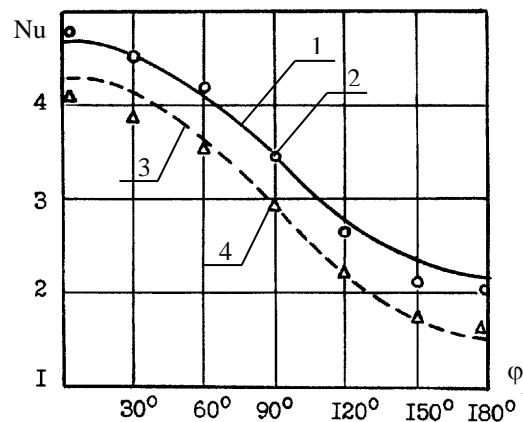


Рис. 3. Распределение числа Нуссельта по поверхности сферы при $Re = 10$
1 – по данным [3] для $\tau_s = 1$; 2 – расчет по формуле (10);
3 – по данным [3] для $\tau_s = 0,441$; 4 – по формуле (10)

Теплофизические свойства аргона и продуктов горения ацетиленокислородной смеси и пропан-бутан-кислородной смеси (смесь углекислого газа CO_2 , угарного газа CO , паров воды H_2O) принимались согласно [4]. Расчет молекулярно-кинетической теории по формуле (33) [2] дает число Нуссельта, равное 0,512. Расчет по зависимости (33) с учетом реальной зависимости $\lambda(T)$ для аргона с использованием потенциала теплопроводности дает число Нуссельта, равное 0,731, в то время как выражение (36) дает явно заниженное число Нуссельта ($\text{Nu} = 0,124$). При этом же перепаде температур $\tau_s = 0,1$ расчет по формуле (37) дает число Нуссельта, равное 1,104. Таким образом, зависимость (33) дает число Нуссельта, среднее между выражениями (36) и (37), близко подходит к расчету на основе молекулярно-кинетической теории.

Из рассмотренных выше двух случаев теплообмена сферы (теплообмен в области малых времен и стационарный случай) можно сделать следующие выводы:

1. В области малых времен как при нагреве сферы ($T_g > T_w$), так и при охлаждении сферы ($T_g < T_w$) коэффициент теплоотдачи одинаков, имеет конечное значение и для времен $t \leq \tau_1$ может быть принят равным

$$\alpha_0 = \beta_1 = \rho_1 C_1 W_1.$$

Ввиду того что времена релаксации твердых тел по крайней мере на два порядка меньше времен релаксации газа, начальное значение коэффициента теплоотдачи α_0 не зависит от теплофизических свойств твердого тела (конденсированной фазы) и направления теплообмена (нагрев или охлаждение).

Так как объемная теплоемкость конденсированной фазы $\rho_2 C_2$ в среднем на 5 порядков больше объемной теплоемкости газовой фазы $\rho_1 C_1$, то параметр $\nu = \rho_1 C_1 W_1 / (\rho_2 C_2 W_2) \ll 1$. Следовательно, контактная температура в области малых времен незначительно отличается от начальной температуры конденсированной фазы, т.е.

$$T_w(0) = \frac{T_1 \nu + T_2}{\nu + 1} \cong T_2 + T_1 \cdot 10^{-5} \cong T_2. \quad (38)$$

Из этого следует, что нагревом частицы за время $t \leq \tau_1$ можно пренебречь, т.е. расчет нагрева частицы можно вести с момента времени $t \cong \tau_1$.

Сделаем некоторые численные оценки на основе закона сохранения энергии. В начальный период плотность теплового потока, проходящего через контактную поверхность, достаточно велика: $q \cong 10^9$ Вт/м², а время порядка $t \leq \tau_1 \cong 10^{-9}$ с в сферу от газовой фазы поступит следующее количество тепла (Дж):

$$Q = qFt = \pi D^2 q t \cong \pi D^2.$$

Это тепло будет аккумулировано конденсированной фазой в поверхностном слое глубиной (м):

$$\delta = W_2 t \cong 10^3 \cdot 10^{-9} \cong 10^{-6},$$

где W_2 – порядок величины скорости распространения тепла в конденсированной фазе (в первом приближении ее полагают равной скорости звука), $W_2 \cong 10^3$ м/с.

Объем поверхностного слоя сферы толщиной δ равен:

$$W_\delta \cong \pi D^2 \delta \cong \pi D^2 \cdot 10^{-6} \text{ (м}^3\text{)}.$$

Для конденсированной фазы объемная теплоемкость

$$\rho^2 C^2 \cong (3 \div 5) \cdot 10^6 \text{ (Дж/(м}^3\text{·К))}.$$

Повышение температуры поверхностного слоя δ составляет в среднем:

$$\Delta T_w = \frac{Q}{V_\delta \rho_2 C_2} = \frac{\pi D^2}{\pi D^2 \cdot 10^{-6} 10^6} \approx 1 \text{ (К)}.$$

2. После времен порядка времени релаксации газовой фазы $\tau_p \cong 10^{-9}$ с коэффициент теплоотдачи уменьшается, и следовательно числа Нуссельта. За времена порядка $t_c \cong 10^{-6} \dots 10^{-7}$ с происходит формирование гидродинамического и теплового пограничных слоев вокруг обтекаемой сферы. Здесь уже существенную роль играет направление теплообмена. Из анализа стационарного случая теплообмена следует, что в случае нагрева сферы горячим газом (при умеренных числах Re) число Нуссельта меньше двух, а в случае охлаждения сферы, наоборот, $\text{Nu} > 2$.

Далее, по мере нагрева (или охлаждения) поверхности сферы, температуры газа и сферы сравниваются между собой, т.е. $T_g \cong T_w$ и $\text{Nu} = 2$ при $\tau_s = 1$. Графически оба случая (нагрев или охлаждение сферы) можно представить так, как это показано на рисунке 4.

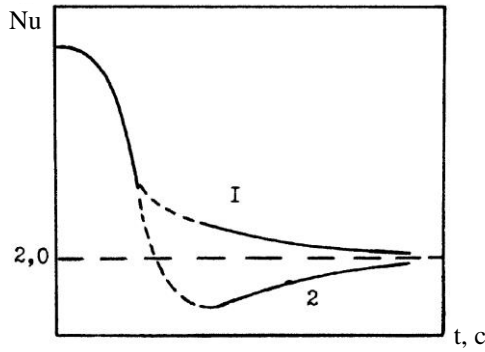


Рис. 4. Изменение числа Нуссельта во времени: 1 – охлаждение шара; 2 – нагрев шара

Таким образом, из проведенного анализа и графика (см. рис. 4) видно, что в работах [6, 7] (охлаждение сферы или цилиндра) авторы наблюдали уменьшение коэффициента теплоотдачи (числа Нуссельта), а автор работы [8] (нагрев цилиндра) наблюдал возрастание числа Нуссельта (от нуля, как он полагал).

Обычно при расчете процессов нагрева микрочастиц в высокотемпературных газовых струях (например, при газотермическом напылении), учитывая, что число Био $\beta = \alpha R / \lambda_p \ll 1$, полагают сферическую частицу термически тонким телом.

Однако упускается из виду тот факт, что при этом малы и числа Фурье $\tau = at/R^2$, где R – радиус частицы. Поэтому в действительности нагрев частиц в условиях напыления происходит при значительных температурных градиентах по радиусу частицы.

Для случая постоянного коэффициента теплоотдачи α и температуры газа T_g для расчета процесса нагрева частиц при напылении можно использовать решение задачи о нагреве шара при граничном условии III рода [9], которое имеет вид:

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_g - T_0} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{R \sin(\mu_n r / R)}{r \mu_n} \exp(-\mu_n^2 \tau), \tag{39}$$

где $A_n = (-1)^{n+1} 2\beta [\mu_n^2 + (\beta - 1)^2]^{-1/2} [\mu_n^2 + \beta^2 - \beta]^{-1}$; μ_n – корни характеристического уравнения $\text{tg} \mu = -\mu(\beta - 1)^{-1}$.

В большинстве случаев можно ограничиться одним, редко двумя значениями μ_n .

Для не очень малых τ распределение температуры в шаре, имевшем начальную температуру T_0 , можно представить в виде:

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_g - T_0} = 1 - A_1 \frac{R \sin(\mu_1 r / R)}{r \mu_1} \exp(-\mu_1^2 \tau), \tag{40}$$

где $A_1 = 1 + a_1 \beta$; $\mu_1 = K \sqrt{\beta}$. Значения a_1 и K приближенно можно определить из таблицы 3.

Таблица 3

Значение коэффициентов a_1 и K в зависимости от β

β	0...0,1	0,1...0,4	0,4...0,8	0,8...1,2	1,2...2,0
a_1	0,30	0,295	0,285	0,283	0,253
K	$\sqrt{3}$	1,69	1,632	1,57	1,487

Температура в центре шара ($r = 0$) равна

$$\theta = 1 - (1 + a_1 \beta) \exp(-K^2 \beta \tau). \tag{41}$$

Температура поверхности шара при $\beta < 0,4$:

$$\theta_w = 1 - \left[1 - \left(\frac{1}{6} K^2 - a_1 \right) \beta - \frac{1}{6} a_1 K^2 \beta^2 \right] \exp(-K^2 \beta \tau). \tag{42}$$

при $\beta > 0,4$:

$$\theta_w = 1 - (1 + a_1 \beta) \left[\frac{\pi}{2} - \frac{1 - \frac{\pi^2}{8}}{K \sqrt{\beta}} \right] \exp(-K^2 \beta \tau). \tag{43}$$

Установим значение критерия Фурье τ , необходимое для выхода температурного поля в частице, на небольшой температурный перепад (безградиентный режим), например, не более 3 %: $(\theta_w - \theta_0) / \theta_w = \Delta \theta / \theta_w \leq 0,03$. Результаты расчетов представлены на графике (рис. 5).

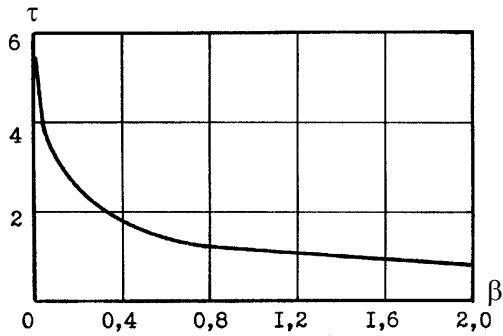


Рис. 5. Число Фурье τ для выхода сферы на безградиентный режим нагрева в зависимости от числа Био β

Для малых значений τ процесс нагрева шара можно рассчитать по следующим соотношениям (для любых β):

$$\theta \cong \frac{\beta}{\rho(\beta-1)} \left\{ \operatorname{erfc} \varphi_1 - \exp \left[\varphi^2 + (\beta-1)(1-\rho) \right] \operatorname{erfc}(\varphi_1 + \varphi) \right\} - \frac{\beta}{\rho(\beta-1)} \left\{ \operatorname{erfc} \varphi_2 - \exp \left[\varphi^2 + (\beta-1)(1-\rho) \right] \operatorname{erfc}(\varphi_2 + \varphi) \right\} \quad (44)$$

где $\varphi_1 = (1-\rho)(2\sqrt{\tau})^{-1}$; $\varphi_2 = (1+\rho)(2\sqrt{\tau})^{-1}$; $\varphi = (\beta-1)\sqrt{\tau}$; $\rho = r/R$.

Для центра шара:

$$\theta_0 \cong 2\beta \exp \left[\varphi^2 - (\beta-1) \right] \operatorname{erfc} \left[(2\sqrt{\tau})^{-1} + \varphi \right]. \quad (45)$$

Полученные соотношения справедливы для начального участка струи, где $T_g = \text{const}$ [10]. Для основного участка струи при движении частицы вдоль струи можно ввести аппроксимацию $T_g = T_c + a_2t + a_3t^2$, где T_c – температура газа на начальном участке. В относительных переменных эта аппроксимация будет иметь вид:

$$\theta = \frac{T_g - T_0}{T_c - T_0} = 1 + \frac{a_2 R^2}{a(T_c - T_0)} \tau + \frac{a_3 R^4}{a^2(T_c - T_0)} \tau^2 = 1 + \alpha_1 \tau + \alpha_2 \tau^2.$$

Тогда в соответствии с теоремой Дюамеля нагрев шара для случая $\theta_g = \theta_g(\tau)$ можно записать в виде:

$$\theta = \theta_g(0)\theta_1 + \int_0^\tau \theta'_g(\tau - \xi)\theta_1(\xi) d\xi. \quad (46)$$

В данном случае $\theta_g(0) = 1$ и $\theta'_g = \alpha_1 + 2\alpha_2\tau$, а $\theta_1(\tau)$ определяется выражениями (39), (40) или (41). Используя выражение (40), получим:

$$\theta = \theta_g - A \left\{ Z + \frac{2\alpha_2}{\mu_1^2} \tau + (1-Z) \exp(-\mu_1^2 \tau) \right\}, \quad (47)$$

где $A = A_1 R \sin(\mu_1 r/R)/(r\mu_1)$; $Z = (\alpha_1 / \mu_1^2) - (2\alpha_2 / \mu_1^4)$.

Для сопоставления полученных результатов с результатами расчета нагрева частиц при газотермическом напылении в рамках модели термически тонкого тела [11] полезно ввести определение среднеинтегральной температуры шара:

$$\bar{T}(t) = \frac{3}{R^3} \int_0^R r^2 T(r;t) dr.$$

Используя (3) и интегрируя, получим:

$$\bar{\theta} = \frac{\bar{T}(t) - T_0}{T_g - T_0} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp(-\mu_n^2 \tau), \quad (48)$$

где B_n – постоянные коэффициенты, определяемые из соотношения:

$$B_n = 6 \cdot \beta^2 \left[\mu_n^2 (\mu_n^2 + \beta^2 - \beta) \right]^{-1}.$$

Для условий напыления $\beta < 2$ и для практических расчетов достаточно ограничиться одним членом B_1 . Значение коэффициента B_1 в зависимости от числа Био β приведены в таблице 4.

Из выражения (10) для малых чисел Био ($\beta < 0,2$), используя данные табл. 3 и 4, получим

$$\bar{\theta} = \frac{\bar{T}(t) - T_0}{T_g - T_0} = 1 - \exp(-3\beta\tau). \quad (49)$$

Это выражение совпадает с выражением нагрева термически тонкой частицы [11]. Отклонение величины среднеинтегральной температуры по соотношению (48) от величины температуры, рассчи-

тываемой по модели термически тонкого тела, для других значений числа Био можно легко получить, используя данные таблиц 3 и 4.

Таблица 4

Значение коэффициента B_1 в зависимости от числа Био β

Число Био $\beta = \frac{\alpha R}{\lambda_p}$	Значение коэффициента B_1
$\beta < 0,2$	1,0
$\beta = 0,2 \dots 0,8$	$B_1 = 1 + 0,0021\beta - 0,0175\beta^2$
$\beta = 0,8 \dots 1,2$	$B_1 = 0,9905 - 0,02625(\beta - 0,8)$
$\beta = 1,2 \dots 2,0$	$B_1 = 0,98 - 0,03325(\beta - 1,2)$

Сравнение результатов расчета показывает, что среднеинтегральная температура довольно хорошо совпадает с расчетами по модели термически тонкого тела, хотя значение температуры поверхности шара может отличаться на величину порядка 10^3 К.

Из этого следует, что при детальном анализе поведения частицы при высокотемпературной обработке (процессы плавления, испарения и химической кинетики взаимодействия частицы с газом) необходимо рассматривать соответствующие задачи для шара, а не для модели термически тонкого тела. Это же относится и к случаю учета теплопотерь частицы на излучение.

В [12] приведены следующие данные, полученные на основе расчета на ЭВМ: при нагреве частиц оксида алюминия Al_2O_3 радиусом R , равным 50 мкм, в азотной плазме температура поверхности частицы достигает температур $T_w \cong 3800$ К, в то время как основная масса частицы находится при температуре порядка температуры плавления, т.е. $\bar{T}(t) \cong T_m = 2318$ К. В этом случае потери тепла на излучение, рассчитанные по температуре поверхности, будут в 6...7 раз превышать потери тепла на излучение, рассчитанные по среднеинтегральной температуре, т.е. по модели термически тонкого тела.

Заключение

В результате изучения двух случаев теплообмена частицы в виде сферы с окружающей ее средой (в области малых времен и стационарный случай) установлено, что в области малых времен как при нагреве сферы, так и при ее охлаждении коэффициент теплоотдачи один и тот же и имеет конечное значение. Контактная температура в области малых времен мало отличается от начальной температура конденсированной фазы. После времен порядка времени релаксации газовой фазы происходит формирование гидродинамического и теплового пограничных слоев вокруг обтекаемой сферы и начинает происходить снижение коэффициента теплоотдачи, а следовательно и числа Нуссельта.

Нагрев частиц в условиях газотермического и плазменного напыления происходит при значительных температурных градиентах по радиусу частицы. Сравнение результатов расчета процесса нагрева частиц при представлении частицы в виде шара и термически тонкого тела показало, что при высокотемпературной обработке (плавление, испарение и химическая кинетика взаимодействия частицы с газом и плазмой) необходимо рассматривать соответствующие задачи для шара, а не для модели термически тонкого тела, только в этом случае обеспечивается высокая точность расчетов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований по гранту T05K-042 «Сквозное проектирование ресурсосберегающих технологий и средств оснащения электрофизических и термомеханических процессов упрочнения поверхностей изделий».

ЛИТЕРАТУРА

1. Таргс М. Основные задачи теории ламинарных течений. – М.; Л., 1951.
2. Иванов Е.М., Ивашко В.С., Хейфец М.Л. Теплообмен частицы с окружающей средой при газотермическом и плазменном напылении // Вестник Полоцкого гос. ун-та. Сер. С. Фундаментальные науки. Физика. – № 10. – 2005. – С. 44 – 53.
3. Ренкисзулут М., Юань М. // Теплопередача. – 1983. – Т. 105, № 2. – С. 149 – 158.
4. Донской А.В., Клубникин В.С. Электроплазменные процессы и установки в машиностроении. – Л., 1979.
5. Yoshida T., Akashi K. // J. of Applied Physics. – 1977. – Vol. 48, № 6. – P. 2252 – 2260.
6. Кудряшов Л.И., Смирнов А.А. // Инженерно-физический журнал. – 1961. – Т. 4, № 10. – С. 21 – 29.
7. Кудряшов Л.И., Смирнов А.А. // Труды Куйбышевского авиац. ин-та. – 1962. – Вып. 15. – С. 105 – 116.
8. Парнас А.Л. Вопросы нестационарного переноса тепла и массы. – М., 1964. – С. 30 – 35.
9. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М., 1967.
10. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. – М., 1976.
11. Иванов Е.М. Инженерный расчет теплофизических процессов при плазменном напылении. – Саратов, 1983.
12. Bourdin E., Fauchais P., Boulos M. // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 1976. – Vol. 26, № 4.