УДК 517. 944

ТРЕХТОЧЕЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

канд. физ.- мат. наук, доц. Н.В. ЦЫВИС
(Полоцкий государственный университет)

Для дифференциально-операторных уравнений третьего порядка методом энергетических неравенств исследуется сильное решение трехточечной задачи.

1. Постановка задачи

На интервале (0, T) рассмотрим трехточечную задачу

$$Lu \equiv \frac{d^3u}{dt^3} + a(t)Au = f(t), \tag{1}$$

$$u(0) = u(T_1) = u(T) = 0. \tag{2}$$

Здесь u и f – функции переменного $t \in (0,T)$, принимающие значения в гильбертовом пространстве H, норму и скалярное произведение в котором обозначим символами $\|\cdot\|$, $(\cdot,\cdot)$ соответственно; A – линейный самосопряженный и положительный оператор в H; функция $a(t)$ равна

$$a(t) = \begin{cases} T_1^3, \ 0 \le t \le T_1 \\ -(T-T_1)^3, \ T_1 < t \le T. \end{cases}$$

Отметим, что в этой задаче принципиальным требованием к функции $a(t)$ является то, что в точке $t = T_1$ функция $a(t)$ должна менять знак. Из положительности и самосопряженности оператора A следует, что $\forall \nu \in D(A)$ справедливо неравенство:

$$(A\nu, \nu) \ge 0 \tag{3}$$

и при каждом $\rho > 0$ оператор $A_\rho = A + \rho I$ имеет на H ограниченный обратный оператор A_ρ^{-1}.

Для дифференциально-операторных уравнений изучались в основном двухточечные краевые задачи [2 – 6]. Трехточечные задачи с условиями сопряжения в точке $t = T_1$ изучены в [1] для дифференциально-операторных уравнений различных порядков, рассматриваемых отдельно на интервалах $(0,T_1)$ и (T,T_1) соответственно, а в [7] и [8] рассмотрена трехточечная задача с нулевыми начальными условиями в точках $t = 0$; $t = T_1$ и $t = T$.

Здесь установим с помощью энергетических неравенств существование и единственность сильного решения задачи (1) – (2).

При доказательстве энергетического неравенства нам потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 1. Для любой функции $u \in D(L)$ справедливы неравенства:

$$\int_0^T \|u\|^2 \, dt \le 4\int_0^T a(t)\cdot\varphi(t)\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2 dt; \tag{4}$$

$$\int_0^T \frac{\varphi(t)}{a(t)}\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2 \le 4\int_0^T a(t)\varphi(t)\left\|\frac{d^2u}{dt^2}\right\|^2 dt. \tag{5}$$

Доказательство. Для доказательства неравенства (4) воспользуемся тождествами:

$$\int_0^{T_1} (u,u)dt = -2\,Re\int_0^{T_1}\left(tu, \frac{du}{dt}\right)dt$$

$$\int_{T_1}^{T} (u,u)dt = 2\,Re\int_{T_1}^{T}(T-t)\left(u, \frac{du}{dt}\right)dt.$$

Оценивая правые части последних тождеств сверху, используя неравенство Коши – Буняковского, получим неравенства:

$$\int_0^{T_1} \|u\|^2\, dt \le 2 \cdot T_1^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{T_1} \|u\|^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^{T_1} t \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}; \tag{6}$$

$$\int_{T_1}^{T} \|u\|^2\, dt \le 2(T - T_1)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{T_1}^{T} \|u\|^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{T_1}^{T} (T-t) \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{7}$$

из которых следует, что

$$\int_0^{T_1} \|u\|^2\, dt \le 4T_1 \cdot \int_0^{T_1} t \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2 dt,$$

$$\int_{T_1}^{T} \|u\|^2\, dt \le 4(T - T_1) \int_{T_1}^{T} (T-t) \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2 dt\,.$$

Из последних неравенств и определения функций $a(t)$ и $\varphi(t)$ получаем искомое неравенство (4).

При доказательстве неравенства (5) воспользуемся тождествами:

$$\int_0^{T_1} \frac{t}{T_1} \left(\frac{du}{dt}, \frac{du}{dt} \right) dt = -Re \int_0^{T_1} \frac{t}{T_1} \left(\frac{d^2u}{dt^2}, u \right) dt,$$

$$\int_{T_1}^{T} \frac{t-T}{T_1 - T} \left(\frac{du}{dt}, \frac{du}{dt} \right) dt = -Re \int_{T_1}^{T} \frac{t-T}{T_1 - T} \left(\frac{d^2u}{dt^2}, u \right) dt\,.$$

Оценивая сверху правые части этих тождеств и используя неравенство Коши – Буняковского, получим неравенства:

$$\int_0^{T_1} \frac{t}{T_1} \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2 dt \le \left(\int_0^{T_1} \frac{t}{T_1} \left\| \frac{d^2u}{dt^2} \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^{T_1} \frac{t}{T_1} \|u\|^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\int_{T_1}^{T} \left(\frac{t-T}{T_1 - T} \right) \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2 dt \le \left(\int_{T_1}^{T} \frac{T-t}{T - T_1} \left\| \frac{d^2u}{dt^2} \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{T_1}^{T} \frac{T-t}{T - T_1} \|u\|^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Оценивая сверху правые части неравенств и используя неравенства (6) и (7), получим неравенства:

$$\int_0^{T_1} \frac{t}{T_1} \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2 dt \le 2T_1 \left(\int_0^{T_1} \frac{t}{T_1} \left\| \frac{d^2u}{dt^2} \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^{T_1} \frac{t}{T_1} \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\int_{T_1}^{T} \frac{t-T}{T_1 - T} \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2 dt \le 2(T - T_1) \left(\int_{T_1}^{T} \frac{t-T}{T_1 - T} \left\| \frac{d^2u}{dt^2} \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{T_1}^{T} \frac{t-T}{T_1 - T} \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

из которых получим неравенства:

$$\int_0^{T_1} \frac{t}{T_1} \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2 dt \le 4 \int_0^{T_1} T_1 \cdot t \left\| \frac{d^2u}{dt^2} \right\|^2 dt$$

$$\int_{T_1}^{T} \frac{t-T}{T_1 - T} \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2 dt \le 4 \int_{T_1}^{T} (T - T_1)(T-t) \left\| \frac{d^2u}{dt^2} \right\|^2 dt\,.$$

Из последних неравенств и определения функций $a(t)$ и $\varphi(t)$ следует неравенство (5).

Лемма 1 доказана.

Замечание. Из доказанной леммы имеем:

$$\int_0^{T_1}\|u\|^2dt \le 4T_1\int_0^{T_1}t\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2dt = \frac{2T_1^4}{3}\int_0^{T_1}\frac{6t}{T_1^3}\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2dt\,;$$

$$\int_{T_1}^{T}\|u\|^2dt \le 4(T-T_1)\int_{T_1}^{T}(T-t)\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2dt = \frac{2}{3}(T-T_1)^4\cdot\int_{T_1}^{T}\frac{6(T-t)}{(T-T_1)^3}\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2dt\,;$$

$$\int_0^{T_1}\frac{t}{T_1}\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2dt \le \frac{2}{3}T_1^4\int_0^{T_1}\frac{6t}{T_1^3}\left\|\frac{d^2u}{dt^2}\right\|^2;$$

$$\int_{T_1}^{T}\frac{t-T}{T_1-T}\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2dt \le \frac{2}{3}(T-T_1)^4\int_{T_1}^{T}\frac{6(T-t)}{(T-T_1)^3}\left\|\frac{d^2u}{dt^2}\right\|^2dt\,.$$

2. Энергетическое неравенство

Задаче (1), (2) поставим в соответствие оператор L с областью определения $D(L)$, состоящей из функций $u\in L_2((0,T),H)$, таких, что при почти всех $t\in(0,T),\ u(t)\in D(A),\ Au\in L_2((0,T),H),\ t\in(0,T),$ $u(t)\in D(A),\ \ t\in(0,T),\ u(t)\in D(A),\ Au\in L_2((0,T),H),\ \frac{du}{dt},\ \frac{d^2u}{dt^2},\ \frac{d^3u}{dt^3}\in L_2((0,T),H)$ и удовлетворяют условиям (2). Оператор L рассматривается из E в F, где E – гильбертово пространство, полученное пополнением $D(L)$ по норме:

$$\|u\|_E^2=\int_0^T\left[\frac{\varphi^3(t)}{a(t)}\left\|\frac{d^2u}{dt^2}\right\|^2dt+\frac{\varphi(t)}{b(t)}\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2+\|u\|^2+\varphi^2(t)(Au,u)\right]dt\,,$$

а F – банахово пространство, полученное пополнением $L_2((0,T),H)$ по норме:

$$\|f\|_F=\sup_{v\in E}\frac{\left|\int_0^T(f,Mv)dt\right|}{\|v\|_E}\,.$$

Здесь функция $\varphi(t)=\begin{cases}t, & 0\le t\le T_1\\ T-t, & T_1<t\le T\end{cases}.$

Оператор M определяется выражением $Mv=\varphi^3(t)\dfrac{dv}{dt}-3\varphi^2(t)v$.

Отметим, что оператор M отображает пространство E в множество $M(E)$, плотное в $L_2((0,T),H)$, что необходимо для корректности нормы $\|\cdot\|_F$. Норма в пространстве F мажорируется нормой пространства $L_2((0,T),H)$.

ТЕОРЕМА 1. Для любой функции $u\in D(L)$ справедливо неравенство

$$\|u\|_E\le C\cdot\|Lu\|_F\,, \qquad (8)$$

где $C=(1+max(T_1^4,(T-T_1)^4))$.

Доказательство. Интегрируя по частям и учитывая условия (2), получим тождества:

$$-\frac{3}{T_1^3}\int_0^{T_1}\left(\frac{d^3u}{dt^3},\frac{t^3}{3}\cdot\frac{du}{dt}-t^2u\right)dt=\int_0^{T_1}t^3\left\|\frac{d^2u}{dt^2}\right\|dt+6\int_0^{T_1}t\left\|\frac{du}{dt}\right\|dt\,;$$

$$-\frac{3}{(T-T_1)^3}\int_{T_1}^{T}\left(\frac{d^3u}{dt^3},\frac{(t-T)^3}{3}\cdot\frac{du}{dt}-(T-t)^2u\right)dt=\int_{T_1}^{T}(t-T)^3\left\|\frac{d^2u}{dt^2}\right\|dt\,;$$

$$-\frac{3}{T_1^3}\int_0^{T_1}\left(Au,\frac{t^3}{3}\cdot\frac{du}{dt}-t^2u\right)dt=\frac{9}{2T_1^3}\int_0^{T_1}t^2(Au,u)dt\,;$$

$$-\frac{3}{(T-T_1)^3}\int_{T_1}^{T}\left(Au,\frac{(T-t)^3}{3}\cdot\frac{du}{dt}+(T-t)^2u\right)dt=-\frac{9}{2}\frac{1}{(T-T_1)^3}\int_{T_1}^{T}(T-t)^2\left(Au,u\right)dt\ .$$

После этого проинтегрируем функции $-Re\left(Lu,Mu\right)$ по t: сначала от 0 до T_1, а затем от T_1 до T. Используя последние тождества (сложив их) и учитывая непрерывность производных $\frac{du}{dt}$, $\frac{d^2u}{dt^2}$ в точке $t=T_1$, получим:

$$\int_0^T \frac{\varphi^3(t)}{b(t)}\left\|\frac{d^2u}{dt^2}\right\|^2 dt+\frac{9}{2}\int_0^T\varphi^2(t)(Au,u)dt=-Re\int_0^T(Lu,Mu)dt\ .$$

Оценивая левую часть этого тождества снизу величиной $\|u\|_E^2$ с учетом (3) и неравенств, установленных в лемме 1, а правую – сверху величиной $\|Lu\|_F\cdot\|u\|_E$, получим неравенство (4). Теорема 1 доказана.

Рассмотрим оператор $L:E\to F$ с областью определения $D(L)$, задаваемый левой частью равенства (1). С помощью критерия замыкаемости в банаховых пространствах [9, с. 92] устанавливается, что оператор L допускает замыкание. Символом L обозначим замыкание оператора L. Функцию $u\in E$ отнесем к $D(\overline{L})$, если существует такая последовательность $u_n\to u$ в E и $Lu_n\to f$ в F. При этом $\overline{L}u\equiv f=\lim\limits_{n\to\infty}Lu_n$.

Решение уравнения

$$\overline{L}u=f,\ f\in F \tag{9}$$

называется сильным решением соответствующей многоточечной задачи.

С помощью предельного перехода неравенство (8) распространяется на $u\in D(\overline{L})$, т.е. справедливо неравенство:

$$\|u\|_E\le C\cdot\left\|\overline{L}u\right\|,\quad u\in D(\overline{L})\,. \tag{10}$$

Из неравенства (10) стандартным образом устанавливается, что множество значений $R(\overline{L})$ оператора $\overline{L}$ замкнуто в F, $R(\overline{L})=\overline{R(L)}$, на $R(\overline{L})$ существует ограниченный обратный оператор $(\overline{L})^{-1}$.

Таким образом однозначная разрешимость уравнения (9) при любом $f\in F$, или, что одно и то же, существование и единственность сильного решения соответствующей многоточечной задачи, будет установлена, если будет доказана плотность в F множества $R(L)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдо С.А., Юрчук Н.И. Многоточечные краевые задачи для некоторых дифференциально-операторных уравнений. I. Априорные оценки //Дифференциальные уравнения. – 1985. – Т. 21, № 3. – С. 417 – 425.
2. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наукова думка, 1984. – 280 с.
3. Дезин А.А. Операторы с первой производной по «времени» и нелокальные условия // Изв. АН СССР. Сер. математика. – 1967. – Т. 31, № 1. – С. 61 – 86.
4. Чесалин В.И., Юрчук Н.И. Задача с нелокальными условиями для абстрактных уравнений Лява // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1973. – № 6. – С. 30 – 39.
5. Юрчук Н.И. Априорные оценки решений граничных задач для некоторых дифференциально-операторных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1976. – Т. 12, № 4. – С. 729 – 739.
6. Юрчук Н.И. Разрешимость граничных задач для некоторых дифференциально-операторных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1977. – Т. 13, № 4. – С. 626 – 636.
7. Цывис Н.В., Юрчук Н.И. Трехточечная задача для дифференциально-операторных уравнений третьего порядка // Дифференциальные уравнения. – 1987. – Т. 23, № 5. – С. 872 – 877.
8. Цывис Н.В. Трехточечная задача для дифференциально-операторных уравнений нечетного порядка. – Деп. в ВИНИТИ 10.08.87. – № 580 Л.-В. 87.
9. Иосида К. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.