

УДК 512.542

О МИНИМАЛЬНЫХ τ -ЗАМКНУТЫХ ω -КОМПОЗИЦИОННЫХ НЕ H -ФОРМАЦИЯХ

Л.И. БЕЛОУС

(Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины)

Описаны общие свойства критических τ -замкнутых ω -композиционных формаций.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть H – произвольный класс групп, Θ – некоторая непустая совокупность формаций. Формации, принадлежащие Θ , называются Θ -формациями. Напомним, что Θ -формация F называется минимальной не H - Θ -формацией [1], или иначе H_Θ -критической формацией [2], если $F \subseteq H$, но $F_1 \not\subseteq H$ для всякой собственной Θ -подформации F_1 из F . Минимальные не H - Θ -формации, где Θ – множество всех насыщенных формаций, а H – формация классического типа, были впервые описаны в работе [3]. В книге [4] был получен аналог этого результата в классе τ -замкнутых насыщенных формаций. Поскольку при исследовании ω -насыщенных формаций результаты о минимальных насыщенных не H -формациях трудно применимы, стала разрабатываться теория минимальных ω -насыщенных не H -формаций. В работе [5] были описаны минимальные ω -насыщенные не H -формации, где H – формация классического типа. Обобщением насыщенных формаций являются композиционные формации, введенные Л.А. Шеметковым и L -композиционные формации, введенные А.Н. Скибой и Л.А. Шеметковым в работе [6]. Автором [7] было найдено строение минимальных не H - Θ -формаций, где Θ – класс всех ω -композиционных формаций.

Цель данной работы – описание общих свойств критических τ -замкнутых ω -композиционных формаций.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ТЕРМИНОЛОГИЯ

Рассматриваются только конечные группы и лишь такие подгрупповые функторы τ , что для любой группы G все подгруппы, входящие в $\tau(G)$, субнормальны в G .

Используем терминологию, принятую в [4, 6, 8].

X – множество конечных групп.

L – произвольный непустой класс простых абелевых групп.

$\pi(G)$ – множество всех различных простых делителей порядка группы G .

$\pi(X)$ – объединение множеств $\pi(G)$ для всех групп G из X .

$\omega = \pi(L)$.

ω' – дополнение к множеству простых чисел ω во множестве всех простых чисел.

p, q – простые числа.

$C^p(G)$ – пересечение всех централизаторов p -главных факторов группы G ($C^p(G) = G$, если группа G таковых главных факторов не имеет).

$Com(X)$ обозначает класс всех абелевых простых групп A таких, что $A \sqsubseteq H/K$ для некоторого композиционного фактора H/K группы $G \in X$.

1 – единичная группа.

(1) – класс всех единичных групп.

G – класс всех групп.

N – класс всех нильпотентных групп.

N_p – класс всех p -групп.

$\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G .

$F_p(G)$ – наибольшая нормальная p -нильпотентная подгруппа группы G .

Z_p – циклическая группа порядка p .

$C_A(H/K)$ – централизатор фактора H/K в A .

$O_\omega(G)$ – наибольшая нормальная ω -подгруппа группы G .

$R(G)$ – радикал группы G (наибольшая нормальная разрешимая подгруппа группы G).

Всякую функцию вида $f: \omega \cap \{\omega'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$ будем называть ω -композиционным спутником.

Для произвольного ω -композиционного спутника f положим

$$CF_\omega(f) = \{G \mid G/(R(G) \cap O_\omega(G)) \in f(\omega') \text{ и } G/C^p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \pi(Com(G)) \cap \omega\}.$$

Если же формация F такова, что $F = CF_\omega(f)$ для некоторого ω -композиционного спутника f , то будем говорить, что она ω -композиционна, а f – ω -композиционный спутник этой формации. Если при этом все значения f лежат в F , то спутник f называется внутренним (или приведенным).

Напомним, что подгрупповой функтор Скибы τ [4] сопоставляет каждой группе G такую систему ее подгрупп $\tau(G)$, что выполняются следующие условия:

- 1) $G \in \tau(G)$ для любой группы G ;
- 2) для любого эпиморфизма $\varphi: A \rightarrow B$, и для любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеет место

$$H^\varphi \in \tau(B) \text{ и } T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A).$$

Пусть τ – произвольный подгрупповой функтор. Подгрупповой функтор τ назовем замкнутым, если для любых двух групп G и $H \in \tau(G)$ имеет место $\tau(H) \subseteq \tau(G)$. Функтор $\bar{\tau}$ – пересечение всех таких замкнутых функторов τ_i , для которых $\tau \leq \tau_i$. Функтор $\bar{\tau}$ будем называть замыканием функтора τ .

Формация F называется τ -замкнутой, если $\tau(G) \subseteq F$ для всех групп $G \in F$. Если все значения спутника f являются τ -замкнутыми формациями, то спутник f называется τ -значным.

Символом $\tau\text{form}(X)$ обозначается пересечение всех τ -замкнутых формаций, которые содержат совокупность групп X .

Пересечение всех τ -замкнутых ω -композиционных формаций, содержащих совокупность групп X , обозначается через $c_\omega^\tau\text{form}(X)$ и называется τ -замкнутой ω -композиционной формацией, порожденной X . Если $X = \{G\}$, то формация $c_\omega^\tau\text{form}(G)$ называется однопорожденной τ -замкнутой ω -композиционной формацией.

Для произвольного набора $\{f_i \mid i \in I\}$ – ω -композиционных спутников через $\bigcap_{i \in I} f_i$ обозначается такой ω -композиционный спутник, что

$$(\bigcap_{i \in I} f_i)(a) = \bigcap_{i \in I} f_i(a).$$

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ – набор всех ω -композиционных τ -значных спутников формации F . Ввиду леммы 2 [6] $\bigcap_{i \in I} f_i$ – ω -композиционный τ -значный спутник формации F . Мы назовем его минимальным ω -композиционным τ -значным спутником формации F .

Каноническим ω -композиционным спутником формации $F = CF_\omega(f)$, где f – минимальный ω -композиционный спутник этой формации, называется такой ω -композиционный спутник F , что

$$F(a) = \begin{cases} \bigcap_p f(p), & \text{если } a = p \in \omega; \\ F, & \text{если } a = \omega'. \end{cases}$$

Заметим, что если $F = CF_\omega(F)$ и f – произвольный внутренний ω -композиционный спутник формации F , то ввиду леммы 5 [6] $f \leq F$.

Пусть H – произвольный класс групп. Напомним, что формация F называется минимальной τ -замкнутой ω -композиционной не H -формацией, или иначе Hc_ω^τ -критической формацией, если $F \subseteq H$, но $F_1 \not\subseteq H$ для всякой собственной τ -замкнутой ω -композиционной подформации F_1 из F .

3. ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В данном разделе приведены результаты, используемые при доказательствах.

3.1. ЛЕММА [6, лемма 5]. Если $F = c_\omega^\tau\text{form}(X)$ и f – минимальный τ -значный ω -композиционный спутник формации F , то справедливы следующие утверждения:

- 1) $f(\omega') = \tau\text{form}(G/(O_\omega(G) \cap R(G)) \mid G \in F)$;
- 2) $f(p) = \tau\text{form}(G/C^p(G) \mid G \in X)$ для всех $p \in \pi(\text{Com}(F)) \cap \omega$;
- 3) $f(p) = \emptyset$ для всех $p \in \omega \setminus \pi(\text{Com}(F))$;
- 4) если $F = CF_\omega(h)$, спутник h τ -значен, то

$$f(p) = \tau\text{form}(A \mid A \in h(p) \cap F, O_p(A) = 1), \text{ для всех } p \in \pi(\text{Com}(F)) \cap \omega$$

и

$$f(\omega') = \tau\text{form}(A \mid A \in h(\omega') \cap F, R(A) \cap O_\omega(A) = 1).$$

3.2. ЛЕММА [6, лемма 6]. Пусть f_1 и f_2 – минимальные ω -композиционные τ -значные спутники формаций F_1 и F_2 соответственно. Тогда $F_1 \subseteq F_2$ в том и только в том случае, когда $f_1 \leq f_2$.

3.3. ЛЕММА [11, лемма 2]. Если p – простое число и $O_p(G) = 1$ и $T = Z_p \blacktriangleleft G = [K]G$, где K – база сплетения T , тогда $K = C^p(T)$.

3.4. ЛЕММА [6, лемма 4]. Если $F = CF_\omega(f)$ и $G/O_p(G) \in F \cap f(p)$, для некоторого $p \in \omega$, то $G \in F$.

3.5. ЛЕММА [9, лемма 18.8]. Если в группе G имеется лишь одна минимальная нормальная подгруппа и $O_p(G) = 1$, то существует точный неприводимый $F_p[G]$ -модуль, где F_p – поле из p элементов.

3.6. ЛЕММА [12, лемма 30.10]. Если X – класс Фиттинга и $H \triangleleft G$, то $H_X = G_X \cap H$.

3.7. ЛЕММА [6, лемма 1]. Пусть p – простое число, N – такая нормальная подгруппа группы G , что для каждого композиционного фактора H/K подгруппы N и $p \nmid |H/K|$. Тогда $C^p(G/N) = C^p(G)/N$.

3.8. ЛЕММА. Пусть N нормальная подгруппа группы G . Тогда

$$R(N) \cap O_\omega(N) = (R(G) \cap O_\omega(G)) \cap N.$$

4. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

4.1. ЛЕММА. Пусть F – ω -композиционная формация. Тогда, если F имеет внутренний τ -значный ω -композиционный спутник, то F – τ -замкнутая формация.

Доказательство. Пусть $F = CF_\omega(f)$, где f – внутренний ω -композиционный спутник, все значения которого τ -замкнуты. Покажем, что формация F τ -замкнута.

Допустим противное. Тогда найдется такая группа $G \in F$ и подгруппа $H \in \tau(G)$, что $H \notin F$. Пусть G – группа наименьшего порядка среди групп с таким свойством. Пусть R – нормальная подгруппа в G подгруппе. Так как $G \in F$, то $G/R \in F$. А так как $|G/R| < |G|$, то по выбору группы G для любой группы $\bar{H} \in \tau(G/R)$ следует, что $\bar{H} \in F$.

По лемме 3.8

$$R(H) \cap O_\omega(H) = (R(G) \cap O_\omega(G)) \cap H.$$

То

$$H/(R(H) \cap O_\omega(H)) = H/((R(G) \cap O_\omega(G)) \cap H) \sqcup H(R(G) \cap O_\omega(G))/(R(G) \cap O_\omega(G)) \in \tau(G/(R(G) \cap O_\omega(G))).$$

Так как $G \in F$, то

$$G/(R(G) \cap O_\omega(G)) \in f(\omega').$$

Следовательно,

$$H/(R(H) \cap O_\omega(H)) \in f(\omega').$$

Пусть теперь $q \in \pi(\text{Com}(H)) \cap \omega$.

Легко видеть, что $C^p(G) = G_{\text{GCP}}$, где G_{GCP} – класс всех таких групп, у которых все главные p -факторы центральны [10].

Поскольку мы рассматриваем лишь такие подгрупповые функторы τ , что для любой группы G все подгруппы, входящие в $\tau(G)$, субнормальны в G , то $H \triangleleft G$ и по лемме 3.6

$$G_{\text{GCP}} \cap H = H_{\text{GCP}},$$

следовательно,

$$H/H_{\text{GCP}} = H/G_{\text{GCP}} \cap H \sqcup HG_{\text{GCP}}/G_{\text{GCP}} \in \tau(G/G_{\text{GCP}}).$$

Так как $G \in F$, то $G/G_{\text{GCP}} \in f(p)$. Значит,

$$H/H_{\text{GCP}} \in f(p).$$

Следовательно, $H \in F$, что противоречит нашему выбору групп G и H . Значит, формация F τ -замкнута. Лемма доказана.

4.2. ТЕОРЕМА. Пусть f – минимальный τ -значный ω -композиционный спутник формации F и H – канонический ω -композиционный спутник формации H . Тогда в том и только в том случае F является минимальной τ -замкнутой ω -композиционной не H -формацией, когда

$$F = c_\omega^\tau \text{form}(G),$$

где G – такая монолитическая $\bar{\tau}$ -минимальная не H -группа с монолитом R , что либо $\pi = \pi(\text{Com}(R)) \cap \omega = \emptyset$ и $f(\omega')$ – минимальная τ -замкнутая не $H(\omega')$ -формация, либо $\pi = \pi(\text{Com}(R)) \cap \omega \neq \emptyset$, $C_G(R) = R \not\subseteq \Phi(G)$ и $f(p)$ – минимальная τ -замкнутая не $(H(p))$ -формация, где $p \in \pi(\text{Com}(R))$.

Доказательство

Необходимость. Пусть G – группа минимального порядка из $F \setminus H$. Тогда G – монолитическая $\bar{\tau}$ -минимальная не H -группа с монолитом $R = G^H$. Тогда, учитывая лемму 4.1, очевидно, $F = c_{\omega}^{\tau} \text{form} G$.

Пусть $p \in \pi(\text{Com}(R))$. Предположим прежде, что $p \notin \omega$. Значит, по лемме 3.1

$$f(\omega') = \tau \text{form}(G/(R(G) \cap O_{\omega}(G))) \sqcup \tau \text{form} G \not\subseteq H(\omega') = H.$$

Пусть M – произвольная собственная τ -замкнутая подформация в $f(\omega')$. Допустим, что $M \setminus H(\omega')$ и T группа минимального порядка из $M \setminus H(\omega')$. Тогда $T \in F \setminus H$. Значит, $c_{\omega}^{\tau} \text{form} T = F$ и поэтому

$$f(\omega') = \tau \text{form}(T/(R(T) \cap O_{\omega}(T))) \subseteq M \subset f(\omega').$$

Противоречие.

Таким образом, $M \subseteq H(\omega')$. Следовательно, $f(\omega')$ – минимальная τ -замкнутая ω -композиционная не $H(\omega')$ -формация.

Пусть $\pi \neq \emptyset$ и $p \in \pi$.

Предположим, что $G = C_G(R)$. Если $R \neq G$, то так как $H(p) \neq \emptyset$, то $1 = G/C_G(R) \in H(p)$. Следовательно, $G \in H$ – противоречие. Значит, $R = G = Z_p$ и $F = c_{\omega}^{\tau} \text{form} G = N_p$. Но в N_p нет τ -замкнутых ω -композиционных подформаций, отличных от (1) и N_p . Действительно, если $(1) \subset H \subset N_p$ и H – τ -замкнутая ω -композиционная формация, то, взяв $G \in H \setminus (1)$, видим, что $p \mid |G|$. Поэтому, $p \in \pi(H)$. Следовательно, $N_p \subseteq H$. Противоречие.

Значит, в F нет τ -замкнутых ω -композиционных подформаций.

По условию $G \in F \setminus H = N_p \setminus H$. То $G = R = 1$. Противоречие.

Следовательно, $G \neq C_G(R)$, где R – абелева p -группа. Значит, $R = O_p(G) = F_p(G)$.

Рассмотрим группу $T = [R]M$, где $M = G/C_G(R)$. Легко видеть, что $C_G(R) = R$, следовательно, $R = C^p(G)$. Так как $O_p(M) = O_p(G/C_G(R)) = O_p(G/R) = O_p(G/O_p(G)) = 1$, то по лемме 3.3 $C^p(T) = R$. Следовательно, по лемме 3.4 $T \in F$. Очевидно, что $|T| \leq |G|$.

Допустим, что $|T| < |G|$ и $T \in H$. Тогда

$$T/C^p(T) \sqcup T/R \sqcup G/C_G(R) \sqcup G/R \in H(p).$$

Но $G/R \in H$. Значит, по лемме 3.4 $G \in H$. Противоречие. Поэтому $T \notin H$. Следовательно, $T \in F \setminus H$. Таким образом, ввиду выбора группы G мы имеем $|T| = |G|$ и $F = c_{\omega}^{\tau} \text{form} T$. Понятно, что $R = T^H$. Ввиду леммы 3.1

$$f(p) = \tau \text{form}(T/C^p(T)) = \tau \text{form}(T/R) = \tau \text{form}(G/C_G(R)) = \tau \text{form}(G/R) = \tau \text{form} M \not\subseteq H(p).$$

Пусть M – произвольная собственная τ -замкнутая подформация в $f(p)$. Допустим, что $M \subseteq H(p)$ и A – группа минимального порядка из $M \setminus H(p)$.

Так как $H(p) = N_p H(p)$, то $O_p(A) = 1$. Значит, по лемме 3.5 существует простой точный $F_p [A]$ -модуль P . Пусть $F = [P]A$. Тогда $C^p(F) = P$ и по лемме 3.4 $F \in F$. Значит $c_{\omega}^{\tau} \text{form} G \subseteq F$. Если $c_{\omega}^{\tau} \text{form} F = F$, то

$$f(p) = \tau \text{form}(F/C^p(F)) = \tau \text{form}(F/P) = \tau \text{form}(A) \subseteq M \subset f(p),$$

что невозможно. Значит, $c_{\omega}^{\tau} \text{form} F \subset F$, следовательно, $c_{\omega}^{\tau} \text{form} F \subseteq H$ и поэтому $F \in H$. Таким образом, $F/C^p(F) \sqcup A \in H(p)$. Противоречие. Значит, $M \subseteq H(p)$. Следовательно, $f(p)$ – минимальная τ -замкнутая ω -композиционная не $H(p)$ -формация.

Достаточность. Пусть G – монолитическая $\bar{\tau}$ -минимальная не H -группа с монолитом $R = G^H$. Понятно, что $F \not\subseteq H$. Пусть M – произвольная собственная τ -замкнутая ω -композиционная подформация в F и m – ее минимальный τ -значный ω -композиционный спутник.

Ввиду леммы 3.2 $m \leq f$.

Покажем, что $m \leq H$.

Пусть $\pi = \emptyset$. Так как $O_{\omega}(G) \cap R(G) = 1$, то по лемме 3.1

$$f(\omega') = \tau \text{form}(G) \not\subseteq m(\omega') = M.$$

Значит, $m(\omega') \subset f(\omega')$. Следовательно, по условию $m(\omega') \subseteq H(\omega')$. Кроме того, поскольку $G/R \in H$ и по лемме 3.7

$$C^q(G)/R = C^q(G/R)$$

для всех простых $q \neq p$, то $m(q) \subseteq f(q) \subseteq H(q)$ для всех $q \in \omega(p)$. Значит, $m \leq H$, а следовательно по лемме 3.2 $M \subseteq H$.

Таким образом, F – минимальная τ -замкнутая ω -композиционная не H -формация.

Пусть $\pi \neq \emptyset$. В этом случае R – абелева p -группа, то $R = C_G(R) = C^p(G)$.

Допустим, что $m(p) = f(p)$. Тогда $G/C^p(G) = G/R \in m(p)$.

То по лемме 3.4

$$G \in N_p m(p) \subseteq M$$

и поэтому

$$F = c_{\omega}^{\tau} \text{ form } G \subseteq M \subset F,$$

что невозможно. Следовательно, $m(p) \subset f(p)$ и поэтому по условию теоремы $m(p) \subseteq H(p)$.

По лемме 3.7 $C^q(G)/R = C^q(G/R)$ и $(R(G) \cap O_{\omega}(G))/R = R(G/R) \cap O_{\omega}(G/R)$ для всех простых чисел $p \neq q$. Следовательно, поскольку $G/R \in H$, то $f(\omega') \subseteq H(\omega')$ и $f(q) \subseteq H(q)$ для всех $q \in \omega \setminus (p)$. Но $m \leq f$ и поэтому $m(p) \subseteq H(p)$ для всех $p \in \{\omega'\} \cup \omega$.

Итак, $m \leq H$. Следовательно, $M \subseteq H$. Таким образом, F является минимальной τ -замкнутой ω -композиционной не H -формацией.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков Л.А. Экраны ступенчатых формаций // Тр. VI Всесоюзного симпозиума по теории групп. – Киев: Наукова думка, 1980. – С. 37 – 50.
2. Скиба А.Н. О критических формациях // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1980. – № 4. – С. 27 – 33.
3. Скиба А.Н. О критических формациях // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – Киев: Наукова думка, 1993. – С. 258 – 268.
4. Скиба А.Н. Алгебра формаций. – Мн.: Беларуская навука, 1997. – 240 с.
5. Сафонова И.Н. О минимальных ω -локальных не H -формациях // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1991. – № 2. – С. 3 – 27.
6. Скиба А.Н., Шеметков Л.А. Кратно L -композиционные формации конечных групп // Украинский математический журнал – 2000. – Т. 52, № 6. – С. 783 – 797.
7. Близнец И.В. Критические ω -композиционные формации // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2002. – № 4. – С. 115 – 117.
8. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
9. Шеметков Л.А., Скиба А.Н. Формации алгебраических систем. – М.: Наука, 1989. – 253 с.
10. Каморников С.Ф., Шеметков Л.А. О корадикалах субнормальных подгрупп // Алгебра и логика. – 1995. – 34, № 5. – С. 493 – 513.
11. J. Jaradin Jehad, Skiba A.N. Partially local formations with systems hereditary subformations // Vesti Akad. Navuk Belarus. Ser. fiz.-mat. navuk. – 1996. – № 3. – P. 13 – 16.
12. Монахов В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов. – Гомель: Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины, 2003. – С. 319.