УДК 512.542

О c_ω^τ-НЕПРИВОДИМЫХ ФОРМАЦИЯХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

М. В. ЗАДОРОЖНЮК
(Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого)

Исследовано строение максимальных τ-замкнутых ω-композиционных подформаций однопорожденной τ-замкнутой ω-композиционной формации конечных групп $\mathfrak{F}$, на основе чего получено описание c_ω^τ-неприводимых формаций.

Все рассматриваемые нами группы конечны. Мы используем терминологию, принятую в [1 – 4]. Напомним лишь некоторые определения и обозначения из работы [1] и понятие подгруппового функтора, введенное А.Н. Скибой в монографии [2].

Пусть $\mathfrak{L}$ – некоторый непустой класс простых абелевых групп, $\omega = \pi(\mathfrak{L})$. Всякая функция вида

$$f : \omega \bigcup \{\omega'\} \to \{\text{формации групп}\}$$

называется ω-композиционным спутником. Символом $C^p(G)$ обозначают пересечение всех централизаторов главных p-факторов группы G ($C^p(G) = G,$ если группа G таковых главных факторов не имеет). Символ $K(G)$ обозначает множество всех композиционных факторов группы G, символ $C(G)$ – множество всех ее абелевых композиционных факторов.

Для произвольного ω-композиционного спутника f вводится класс групп:

$$CF_\omega(f) = \{G \mid G/G_{\mathfrak{S}_\omega} \in f(\omega') \text{ и } G/C^p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \pi(C^p(G)) \bigcap \omega\}.$$

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$ для некоторого ω-композиционного спутника f, то $\mathfrak{F}$ называется ω-композиционной формацией, а f – её ω-композиционным спутником.

Напомним, что подгрупповой функтор Скибы сопоставляет каждой группе G такую систему ее подгрупп $\tau(G)$, что выполняются следующие условия:

1) $G \in \tau(G)$ для любой группы G;

2) для любого эпиморфизма $\varphi : A \to B$ и для любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеет место $H^\varphi \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

В данной работе мы рассматриваем лишь такие подгрупповые функторы τ, что для любой группы G все подгруппы, входящие в $\tau(G)$, субнормальны в G.

Формация $\mathfrak{F}$ называется τ-замкнутой, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех групп $G \in \mathfrak{F}$. Если все значения спутника f являются τ-замкнутыми формациями, то спутник f называется τ-значным.

Пересечение всех τ-замкнутых ω-композиционных формаций, содержащих $\mathfrak{X}$, обозначается через $c_\omega^\tau \mathrm{form}(\mathfrak{X})$ и называется τ-замкнутой ω-композиционной формацией, порожденной $\mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{X} = \{G\}$, то формация $c_\omega^\tau \mathrm{form}(G)$ называется однопорожденной τ-замкнутой ω-композиционной формацией.

В теории формаций особую роль играют неприводимые формации различных типов. В частности, c_ω^τ-неприводимые формации – это такие τ-замкнутые ω-композиционные формации, что $\mathfrak{F} \neq c_\omega^\tau \mathrm{form}(\bigcup \mathfrak{X}_i)$, где $\{\mathfrak{X}_i \mid i \in I\}$ – набор всех собственных τ-замкнутых ω-композиционных подформаций из $\mathfrak{F}$.

Если τ-замкнутые ω-композиционные формации $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$ таковы, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$ и не существует такой τ-замкнутой ω-композиционной подформации $\mathfrak{H}$, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{M}$ называется максимальной τ-замкнутой ω-композиционной подформацией в $\mathfrak{F}$.

Значение этого понятия связано прежде всего с тем, что каждая однопорожденная τ-замкнутая ω-композиционная формация обладает максимальными τ-замкнутыми ω-композиционными подформациями, и если $\mathfrak{F}$ – c_ω^τ-неприводимая формация, то множество всех таких подформаций в $\mathfrak{F}$ одноэлементно согласно лемме 1.1.2 [2].

Таким образом, при изучении c_ω^τ-неприводимых формаций основной задачей является задача описания её единственной максимальной τ-замкнутой ω-композиционной подформации.

Целью данной работы является нахождение новых классов c_ω^τ-неприводимых формаций.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть G – монолитическая группа с нефраттиниевым цоколем R. Тогда если $\pi(C(R))\bigcap\omega=\varnothing$, то формация $\mathfrak{F}=c_\omega^\tau \mathrm{form}(G)$ c_ω^τ-неприводима и её максимальная τ-замкнутая ω-композиционная подформация $\mathfrak{M}$ имеет такой внутренний ω-композиционный спутник m, что*

$$m(a)=\begin{cases}\tau\,\mathrm{form}(G/C^p(G)), & \text{если } a=p\in\pi(C(G))\bigcap\omega,\\ \varnothing, & \text{если } a=p\in\omega\setminus\pi(C(G)),\\ \tau\,\mathrm{form}(\mathfrak{X}\bigcup\{G/R\}), & \text{если } a=\omega',\end{cases}$$

где $\mathfrak{X}$ – множество всех собственных τ-подгрупп группы G.

Доказательство. Пусть f – минимальный τ-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда ввиду теоремы 3.1.4

$$f(a)=\begin{cases}\tau\,\mathrm{form}(G/C^p(G)), & \text{если } a=p\in\pi(C(G))\bigcap\omega,\\ \varnothing, & \text{если } a=p\in\omega\setminus\pi(C(G)),\\ \tau\,\mathrm{form}(\{G/R_\omega(G)\}), & \text{если } a=\omega',\end{cases}$$

Рассмотрим формацию $\mathfrak{M}=CF_\omega(m)$, где m – такой τ-значный ω-композиционный спутник, что

$$m(a)=\begin{cases}\tau\,\mathrm{form}(G/C^p(G)), & \text{если } a=p\in\pi(C(G))\bigcap\omega,\\ \varnothing, & \text{если } a=p\in\omega\setminus\pi(C(G)),\\ \tau\,\mathrm{form}(\mathfrak{X}\bigcup\{G/R\}), & \text{если } a=\omega',\end{cases}$$

где $\mathfrak{X}$ – множество всех собственных τ-подгрупп группы G.

Покажем, что $\mathfrak{M}$ – единственная τ-замкнутая ω-композиционная подформация формации $\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{H}$ – произвольная собственная τ-замкнутая ω-композиционная подформация в $\mathfrak{F}$ и h – её минимальный τ-значный ω-композиционный спутник.

Тогда ввиду леммы 6 [1] $h\le f$. Кроме того, для некоторого $a\in\omega\bigcup\{\omega'\}$ имеет место $h(a)\subset f(a)$.

Пусть $a\in\omega\bigcup\{\omega'\}$. Тогда если $a\in\omega$, то $m(a)=f(a)$. Значит, $h(a)\subseteq m(a)$. Пусть $a=\omega'$. Так как $p\in\pi(C(G))\bigcap\omega=\varnothing$, то $R_\omega(G)=1$. Значит по лемме 2.1.5 [2], $m(a)=\tau\,\mathrm{form}(\mathfrak{X}\bigcup\{G/R\})$ – единственная максимальная τ-замкнутая подформация формации $f(a)=\tau\,\mathrm{form}(G)$. Значит $h(a)\subseteq m(a)$.

Таким образом, для всех $a\in\omega\bigcup\{\omega'\}$ имеет место $h(a)\subseteq m(a)$, а значит $\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{M}$.

Покажем, что $\mathfrak{M}$ – собственная τ-замкнутая ω-композиционная подформация формации $\mathfrak{F}$. Предположим, что $\mathfrak{M}=\mathfrak{F}$. Тогда $\tau\,\mathrm{form}(G)=f(\omega')\subseteq m(\omega')=\tau\,\mathrm{form}(\mathfrak{X}\bigcup\{G/R\})$, что противоречит лемме 2.1.5 [2]. Следовательно $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{F}$.

Таким образом, $\mathfrak{M}$ – единственная максимальная собственная τ-замкнутая ω-композиционная подформация формации $\mathfrak{F}$.

Покажем теперь, что m – внутренний спутник формации $\mathfrak{M}$. Так как $\pi(C(R))\bigcap\omega=\varnothing$, то $R\subset C^p(G)$ для всякого $p\in\omega\bigcap\pi(C(G))$. Следовательно, $G/C^p(G)\in\tau\,\mathrm{form}(\mathfrak{X}\bigcup\{G/R\})=m(\omega')$ для любого $p\in\omega\bigcap\pi(C(G))$. Значит, $(G/C^p(G))/R_\omega(G/C^p(G))\in m(\omega')$ для любого $p\in\omega\bigcap\pi(C(G))$.

Так как $G/C^p(G)\in m(p)$ для всякого $p\in\omega\bigcap\pi(C(G))$, то

$$(G/C^p(G))/C^q(G/C^p(G))\in\tau\,\mathrm{form}(G/C^q(G))=m(q),$$

где $p\in\omega\bigcap\pi(C(G))$, $q\in\omega\bigcap\pi(C(G/C^p(G)))$ и $p=q$.

Пусть $p \neq q$. Тогда справедливы включения

$$1 \subseteq C^q(G) \subseteq C^q(G)C^p(G) \subseteq G .$$

Так как $(G/C^p(G)) \in \tau\,\mathrm{form}(G/C^q(G))$, то $G/C^q(G)C^p(G) \in \tau\,\mathrm{form}(G/C^q(G)) = m(q)$.
Следовательно,

$$G/C^q(G)C^p(G) \cong (G/C^p(G))/(C^q(G)C^p(G)/C^p(G)) \in m(q).$$

Но $C^q(G)C^p(G)/C^p(G) \subseteq C^q(G/C^p(G))$.

Значит, $(G/C^p(G))/C^q(G/C^p(G)) \in m(q)$ для всех $q \in \omega \bigcap \pi(C(G/C^p(G)))$.

Таким образом, $G/C^p(G) \in \mathfrak{M}$, а значит, $m(p) = \tau\,\mathrm{form}(G/C^p(G)) \subseteq \mathfrak{M}$ для всякого $p \in \omega \bigcap \pi(C(G))$.

Пусть A – произвольная группа из $\mathfrak{X}$.

Покажем, что $A \in \mathfrak{M}$. Рассмотрим подгруппу $AC^p(G)/C^p(G)$ группы $G/C^p(G)$.

Так как $A \in \tau(G)$, то $AC^p(G)/C^p(G) \in \tau(G/C^p(G))$, т.е. $AC^p(G)/C^p(G) \in \tau\,\mathrm{form}(G/C^p(G))$. Так как $\omega \bigcap \pi(C(A)) \subseteq \omega \bigcap \pi(C(G))$, то из последнего следует, что

$$A/(C^p(G) \bigcap A) \cong AC^p(G)/C^p(G) \in \tau\,\mathrm{form}(G/C^p(G)) = m(p)$$

для любого $p \in \omega \bigcap \pi(C(A))$. Но $C^p(G) \bigcap A \subseteq C^p(A) \subseteq A$.

А так как $A \in \mathfrak{X} \subseteq \tau\,\mathrm{form}(\mathfrak{X} \bigcup \{G/R\}) = m(\omega')$, то $A/R_\omega(A) \in \mathfrak{M}$. Следовательно, $A \in \mathfrak{M}$.

Таким образом, ввиду произвольности выбора группы A, имеет место $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M}$.

Покажем, что $G/R \in \mathfrak{M}$. Так как $\pi(C(R)) \bigcap \omega = \varnothing$, то по лемме 1 [1],

$$(G/R)/C^p(G/R) = (G/R)/(C^p(G)/R) \cong G/C^p(G) \in \tau\,\mathrm{form}(G/C^p(G)) = m(p)$$

для любого $p \in \omega \bigcap \pi(C(G/R))$. Кроме того, поскольку $G/R \in m(\omega')$, то тем более мы имеем $(G/R)/R_\omega(G/R) \in m(\omega')$. Следовательно, $G/R \in \mathfrak{M}$.

Значит, $\mathfrak{X} \bigcup \{G/R\} \subseteq \mathfrak{M}$, и поэтому $\tau\,\mathrm{form}(\mathfrak{X} \bigcup \{G/R\}) = m(\omega') \subseteq \mathfrak{M}$.

Таким образом, $m(a) \subseteq \mathfrak{M}$ для всех $a \in \omega \bigcup \{\omega'\}$, а значит, m — внутренний τ-начный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{M}$.

Теорема доказана.

Л е м м а. *Пусть $G = [R]H$, где $R = C_G(R)$ – минимальная нормальная p-подгруппа в G, а $H = [Q]N$, где $Q = C_H(Q)$ – минимальная нормальная q-подгруппа в H. Тогда $PQ = C^q(G)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При изоморфизме $\varphi : G/R \to H$ имеет место $Q^{\varphi^{-1}} = QR/R$. Но $C_H(Q) = Q$ – минимальная нормальная q-подгруппа в H. Значит, $QR/R = C_{G/R}(GR/R)$ – минимальная нормальная q-подгруппа в G/R. Поэтому $QR/R = C_{G/R}(GR/R) = C_G(GR/R)/R$.

Итак, $C^q(QR/R) \subseteq QR$. Если $QR \subseteq R \subseteq H \subseteq G$, где H/K – главный q-фактор группы G, то, очевидно, $RQ \subseteq C_G(H/K)$. Значит, $RQ \subseteq \bigcap H/K$, где H/K пробегает все главные q-факторы группы G, лежащие выше PQ. Применяя теперь лемму [6, с. 8], мы видим, что $C^q(G) = PQ$.

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $G = [R]H$, где $R = C_G(R)$ – минимальная нормальная p-подгруппа в G, $p \in \omega$ и H – монолитическая группа с нефраттиниевым цоколем Q. Тогда формация $\mathfrak{F} = c_\omega^\tau \tau\,\mathrm{form}(G)$ c_ω^τ – неприводима, и её максимальная τ-замкнутая ω-композиционная подформация $\mathfrak{M}$ имеет такой внутренний ω-композиционный спутник m, что*

$$m(a) = \begin{cases} \tau\,\mathrm{form}\,(\mathfrak{X} \bigcup \{H/Q\}), & \text{если } a = p, \\ \tau\,\mathrm{form}\,(G/C^q(G)), & \text{если } a = q \in \pi(C(G) \bigcap \omega) \setminus \{p\}, \\ \varnothing, & \text{если } a = q \in \omega \setminus \pi(C(G)), \\ \tau\,\mathrm{form}\,(G/R_\omega(G)), & \text{если } a = \omega', \end{cases}$$

где $\mathfrak{X}$ – множество всех собственных τ-подгрупп группы H.

Доказательство. Пусть f – минимальный τ-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. Поскольку $C^p(G)=R$, то по лемме 1[5]

$$f(a)=\begin{cases}\tau\ \mathrm{form}\,(G/R)=\tau\ \mathrm{form}\,(H), & \text{если } a=p,\\ \tau\ \mathrm{form}\,(G/C^q(G)), & \text{если } a=q\in\pi(C(G)\bigcap\omega)\setminus\{p\},\\ \varnothing, & \text{если } a=q\in\omega\setminus\pi(C(G)),\\ \tau\ \mathrm{form}\,(G/R_\omega(G)), & \text{если } a=\omega'.\end{cases}$$

Рассмотрим формацию $\mathfrak{M}=CF_\omega(m)$, где m – такой τ-значный ω-композиционный спутник, что

$$m(a)=\begin{cases}\tau\ \mathrm{form}\,(\mathfrak{X}\bigcup\{H/Q\}), & \text{если } a=p,\\ \tau\ \mathrm{form}\,(G/C^q(G)), & \text{если } a=q\in\pi(C(G)\bigcap\omega)\setminus\{p\},\\ \varnothing, & \text{если } a=q\in\omega\setminus\pi(C(G)),\\ \tau\ \mathrm{form}\,(G/R_\omega(G)), & \text{если } a=\omega'.\end{cases}$$

Покажем, что $\mathfrak{M}$ – единственная максимальная τ-замкнутая ω-композиционная подформация формации $\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{H}$ – произвольная собственная τ-замкнутая ω-композиционная подформация в $\mathfrak{F}$, h – её минимальный τ-значный ω-композиционный спутник. Тогда ввиду леммы 6 [1] $h\le f$. Допустим, что $h(p)=f(p)$. Тогда $G/O_p(g)=G/R\in f(p)=h(p)$. Значит, по лемме 4 [1] $G\in h(p)\subseteq\mathfrak{H}$. Поэтому $\mathfrak{F}=c_\omega^\tau\tau\ \mathrm{form}(G)\subseteq\mathfrak{H}\subset\mathfrak{F}$.

Полученное противоречие показывает, что $h(p)\subset f(p)$.

Тогда, поскольку по лемме 2.1.5 [2], $\tau\ \mathrm{form}\,(\mathfrak{X}\bigcup\{H/Q\})$ – единственная максимальная подформация формации $f(p)=\tau\ \mathrm{form}\,(H)$, то $h(p)\subseteq m(p)$. Кроме того, $f(\omega')=\tau\ \mathrm{form}\,(G/R_\omega(G))=m(\omega')$. Поэтому $h(\omega')\subseteq m(\omega')$, и следовательно, $\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{M}$.

Покажем теперь, что $\mathfrak{M}$ – собственная τ-замкнутая ω-композиционная подформация формации $\mathfrak{F}$. Из описания спутника m мы имеем $m\le f$, т.е. $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{F}$.

Значит, $\tau\ \mathrm{form}\,(H)=f(p)\subseteq m(p)=\tau\ \mathrm{form}\,(H/Q)$, что противоречит лемме 2.2.5 [2]. Следовательно, $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{F}$.

Таким образом, $\mathfrak{F}$ – c_ω^τ-неприводимая формация, и $\mathfrak{M}$ – её единственная собственная максимальная τ-замкнутая ω-композиционная подформация.

Покажем, что m – внутренний ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{M}$.

Пусть $q\in\omega\bigcap\pi(C(H/Q))$, $p\neq q$. Возможны два случая:

а) $q\in\pi(C(Q))$;

б) $q\notin\pi(C(Q))$.

Рассмотрим первый случай.

Поскольку ввиду теоремы 2 $C^q(G)=PQ$, то

$$(H/Q)/C^q(H/Q)\in\tau\ \mathrm{form}(\mathrm{H}/Q)=\tau\ \mathrm{form}(\mathrm{RH}/RQ)=\tau\ \mathrm{form}(\mathrm{G}/C^q(G))=m(q).$$

Рассмотрим второй случай.

Так как $p\neq q$, то $q\notin\pi(C(RQ))$. Следовательно, ввиду леммы 2.2.13 $RQ\subseteq C^q(G)$. По лемме 1 [1], $C^q(G)/RQ=C^q(G/RQ)$. Значит

$$G/C^q(G)\cong(G/RQ)/(C^q(G)/RQ)=(G/RQ)/(C^q(G/RQ))\cong(H/Q)/C^q(H/Q).$$

Следовательно, $(H/Q)/C^q(H/Q)\in\tau\ \mathrm{form}((\mathrm{H}/Q)/C^q(H/Q))=\tau\ \mathrm{form}(\mathrm{G}/C^q(G))=m(q)$.

Заметим, что поскольку $H/Q\in m(p)=\tau\ \mathrm{form}(\mathrm{H}/Q)$, то, очевидно, при $p\in\pi(C(H/Q))\bigcap\omega$ имеет место $(H/Q)/C^p(H/Q)\in m(p)$.

Таким образом, $(H/Q)/C^r(H/Q)\in m(r)$ для всех $r\in\pi(C(H/Q))\bigcap\omega$.

Покажем теперь, что $(H/Q)/R_\omega(H/Q) \in m(\omega')$. Действительно, так как $p \in \omega$, то ввиду леммы 1 [1] $R_\omega(G/R) = R_\omega(G)/R$. Значит, $(G/R)/(R_\omega(G)/R) = (G/R)/R_\omega(G/R) \cong H/R_\omega(H) \cong G/R_\omega(G)$.

Следовательно, $m(\omega') = \tau\,\mathrm{form}(H/R_\omega(H))$.

Если $R_\omega(H) = 1$, то $m(\omega') = \tau\,\mathrm{form}(H)$, и поэтому $(H/Q)/R_\omega(H/Q) \in m(\omega')$.

Пусть $R_\omega(H) \neq 1$.

Тогда $Q \subseteq R_\omega(H)$ и по лемме 1 [1]

$$(H/Q)/R_\omega(H/Q) = (H/Q)/(R_\omega(H)/Q) \cong H/R_\omega(H) \in m(\omega').$$

Таким образом, $H/Q \in \mathfrak{M}$.

Пусть A – произвольная группа из $\mathfrak{X}$.

Покажем, что $A \in \mathfrak{M}$.

Рассмотрим подгруппу $AC^p(G)/C^p(G)$ группы $G/C^p(G)$.

Так как $A \in \tau(G)$, то $AC^p(G)/C^p(G) \in \tau(G/C^p(G))$, т.е. $AC^p(G)/C^p(G) \in \tau\,\mathrm{form}(G/C^p(G))$.

Так как $\omega \bigcap \pi(C(A)) \subseteq \omega \bigcap \pi(C(G))$, то из последнего следует, что

$$A/(C^p(G) \bigcap A) \cong AC^p(G)/C^p(G) \in \tau\,\mathrm{form}(G/C^p(G)) = m(p)$$

для любого $p \in \omega \bigcap \pi(C(A))$. Но $C^p(G) \bigcap A \subseteq C^p(A) \subseteq A$.

А так как $A \in \mathfrak{X} \subseteq \tau\,\mathrm{form}(\mathfrak{X} \bigcup \{G/R\}) = m(\omega')$, то $A/R_\omega(A) \in \mathfrak{M}$. Следовательно, $A \in \mathfrak{M}$.

Таким образом, ввиду произвольности выбора группы A имеет место $\mathfrak{X} \bigcup /\{H/Q\} \subseteq \mathfrak{M}$, а значит, для всех $q \in \pi(C(H/Q)) \bigcap \omega$ имеет место $m(q) \in \mathfrak{M}$.

Покажем, что если $q \in \pi(C(G)) \setminus \{p\}$, то $G/C^q(G) \in \mathfrak{M}$.

Так как $p \neq q$, то $R \subseteq C^q(G)$.

Если $Q \subseteq C^q(G)$, то $RQ \subseteq C^q(G)$.

Но, как мы уже показали, $G/RQ \cong H/Q \in \mathfrak{M}$. Значит, $G/C^q(G) \cong (G/PQ)/(C^q(G)/PQ) \in \mathfrak{M}$.

Пусть теперь $Q \not\subset C^q(G)$. Но $G/R \cong H$ – монолитическая группа с цоколем Q. Значит, из включений $R \subseteq C^q(G)$ и $R \subseteq RQ$ следует, что $R \subseteq C^q(G) \subseteq C_G(R)$.

Покажем, что $H \in \mathfrak{M}$.

Так как R – p-группа, то $O_p(H) = 1$. Значит, $Q \subseteq C^p(H)$. Поэтому, поскольку $H/Q \in \mathfrak{M}$, то $H/C^p(H) \cong (H/Q)/(C^p(H)/Q) \in m(p)$.

Пусть $r \in \pi(C(H)) \setminus \{p\}$. По лемме 1 [1], $C^q(G)/R = C^q(G/R)$, и поэтому

$$H/C^r(H) \cong (G/R)/C^r(G/R) = (G/R)/(C^r(G)/R) \cong G/C^r(G) \in m(r).$$

Значит, для всех $r \in \pi(C(H)) \bigcap \omega$ имеет место $H/C^r(H) \in m(r)$.

Покажем теперь, что $H/R_\omega(H) \in m(\omega')$. Так как $p \in \omega$, то по лемме 1 [1], $R_\omega(G/R) = R_\omega(G)/R$. Следовательно, $H/R_\omega(H) \cong (G/R)/R_\omega(G/R) \in m(\omega')$. Значит, $G/C^q(G) = G/R \cong H \in \mathfrak{M}$. Таким образом, для всех $q \in \pi(C(H)) \bigcap \omega \setminus \{p\}$ имеет место $G/C^q(G) \in \mathfrak{M}$ и, значит, для всех таких q справедливо включение $m(q) \subseteq \mathfrak{M}$.

Для завершения доказательства необходимо установить, что $G/R_\omega(G) \in \mathfrak{M}$.

Так как $R \subseteq R_\omega(G)$, то $G/R_\omega(G) \cong (G/R)/(R_\omega(G)/R) \cong H/R_\omega(H)$.

Если $\pi(C(Q)) \subseteq \omega$, то $RQ \subseteq R_\omega(G)$. Значит,

$$G/R_\omega(G) \cong (G/RQ)/R_\omega(G/RQ) = (G/RQ)/(R_\omega(G)/RQ) \cong (H/Q)/R_\omega(H/Q) \in \mathfrak{M},$$

так как $H/Q \in \mathfrak{M}$ ввиду доказанного выше.

Пусть теперь $\pi(C(Q)) \not\subset \omega$. Тогда $R_\omega(H) = 1$.

Следовательно, по лемме 2.2.13, $Q \subseteq C^q(H)$ для всех $q \in \pi(C(H)) \bigcap \omega$.

Значит, $H / C^q(H) \cong (H/Q)/(C^q(H)/Q) = (H/Q)/C^q(H/Q)$.

Отсюда, при $p \in \pi(C(H))$ имеем $H / C^p(H) \in m(p)$.

Пусть $q \in \pi(C(H)) \bigcap \omega$, где $q \neq p$. Тогда $RQ \subseteq C^q(G)$ и

$$G / C^q(G) \cong (G/RQ)/(C^q(G)/RQ) = (G/RQ)/C^q(G/RQ) \cong$$

$$\cong (H/Q)/C^q(H/Q) = (H/Q)/(C^q(H)/Q) \cong H/C^q(H).$$

Поэтому $H / C^q(H) \cong G / C^q(G) \in m(q)$. Кроме того, $H \cong H / R_\omega(H) \cong G / R = G / R_\omega(G) \in m(\omega')$. Значит, $G / R_\omega(G) \in \mathfrak{M}$, и поэтому $m(\omega') \subseteq \mathfrak{M}$.

Таким образом, m – внутренний ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{M}$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скиба А.Н., Шеметков Л.А. Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп // Украинский математический журнал. – 2000. – № 6. – С. 783 – 797.
2. Скиба А.Н. Алгебры формаций. – Мн.: Беларуская навука. –1997. – 240 с.
3. Шеметков Л.А. Формации конечных групп. – М.: Наука. – 1978. – 245 с.
4. Шеметков Л.А., Скиба А.Н. Формации алгебраических систем. – М.: Наука. – 1989. – 253 с.
5. Задорожнюк М.В. Формации с единственной максимальной τ-замкнутой ω-композиционной подформацией. – Гомель, 2004. – 14 с. – (Препринт / Гомельский гос. ун-т; № 14).
6. Doerk K., Hawkes T., Finite soluble groups. –Walter de Gruyter. – Berlin – New-York, 1992. – 891 p.