МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

О ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТИ ПОДГРУПП В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

С.Ю. БАШУН, канд. физ.-мат. наук А.В. КАПУСТО, д-р физ.-мат. наук, проф. Э.М. ПАЛЬЧИК
(Полоцкий государственный университет)

Доказывается, что если силовская 2-подгруппа $L_2(7)$-свободной группы X перестановочна с некоторыми бипримарными подгруппами, содержащими силовские подгруппы нечетного порядка, то X – разрешимая группа.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть σ есть множество тех нечетных простых делителей *p* порядка группы *X*, для которых группа *X* не *p*-разрешима. В работе [1] доказан следующий результат:

1.1. ТЕОРЕМА [1]. Пусть *G* – конечная *K*-группа, *T* – ее силовская 2-подгруппа. Если *T* перестановочна с силовскими *p*-подгруппами, взятыми по одной для каждого $p \in \sigma$, то *G* – разрешимая группа и $\sigma = \varnothing$.

Действительно, если $p \in \sigma$ и *P* есть силовская *p*-подгруппа из *X*, то из условия $TP = PT$ следует, что *G* обладает свойством $E_{\{2,\,p\}}$. Пусть теперь $r \in \pi(G) - \{\sigma \cup 2\}$. Тогда группа *G* *r*-разрешима и обладает свойством $E_{\{2,\,r\}}$ [2, теорема 1.15.1].

Целью этой работы является выяснение нормального и подгруппового строения конечной группы *X*, у которой силовская 2-подгруппа перестановочна с некоторыми не *p*-нильпотентными бипримарными подгруппами из *X*, содержащими S_p-подгруппу *P*, для всех $p \in \sigma$ (существование таких подгрупп доказано в [3, лемма 1]).

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ, ТЕРМИНОЛОГИЯ И ОСНОВНЫЕ ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В работе используются стандартные обозначения и терминология современной теории конечных групп, которые можно найти в источниках [4 – 6].

Некоторые из специфических понятий:

$|X|$ – число различных элементов конечного множества *X* (порядок множества *X*);

π – множество некоторых простых чисел;

π' – множество простых чисел, не принадлежащих π;

π – натуральное число, все простые делители которого принадлежат π;

$\pi(n)$ – число различных простых делителей натурального числа *n*;

$\pi(X) = \pi(|X|)$ для конечной группы *X*;

π-группа – группа *X* с $\pi(X) \subseteq \pi$;

(*m*, *n*) – наибольший общий делитель чисел *m* и *n*;

Холлова π-подгруппа (S_π-подгруппа) – подгруппа *H* конечной группы *X*, такая, что $(|H|, |X:H|) = 1$;

$E_{\{\pi\}}$ – свойство группы *X* – существование в *X* холловой π-подгруппы;

бипримарная (примарная) группа – группа *X*, у которой $|\pi(X)| = 2$ $(|\pi(X)| = 1)$;

Кф{$\mathfrak{R}$}-свободная ($\mathfrak{R}$-свободная) группа – группа, у которой нет композиционных факторов (секций), изоморфных подгруппам из множества подгрупп $\mathfrak{R}$;

E_{p^m} – элементарная абелева подгруппа порядка p^m;

Q_{2^m} – обобщенная группа кватернионов порядка 2^m;

Z_{2^m} – циклическая группа порядка 2^m;

K-группа – конечная группа, у которой все простые неабелевы композиционные факторы исчерпываются известными простыми группами из множества $Chev \cup \{A_n \,/\, n \geq 5\} \cup Spor$;

p-нильпотентная группа – группа с нормальным *p*-дополнением;

pd-группа – группа, порядок которой делится на простое число *p*.

2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ [7]. Графом простых чисел $\Gamma(G)$ конечной группы G назовем граф с множеством вершин $\pi(G)$ и ребрами, соединяющими пару вершин $p, q \in \pi(G)$ в том и только том случае, когда G содержит элемент порядка pq. Множество связных компонент графа $\Gamma(G)$ обозначим через $\{\pi_i / 1 \le i \le t(G)\}$; π_1 – связная компонента, содержащая число 2.

2.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Собственная подгруппа H называется CC-подгруппой в X, если $C(h) \subseteq H$ для всех $1 \ne h \in H$ и CCT-подгруппой, если еще $H \cap H^g = 1$ для всех $g \in X$ (иногда CC-подгруппу называют изолированной в X).

Далее нам понадобится строение разрешимых групп, обладающих CC-подгруппой.

2.3. ТЕОРЕМА ([8], теоремы 2.1 и 2.3). Пусть G – разрешимая конечная группа с CC-подгруппой M порядка m, и $Z(M) \ne 1$ или $N(M) \ne M$. Тогда M есть CCT-подгруппа и имеют место следующие утверждения:

(a) M есть холлова подгруппа в G;

(b) $|N(M)| = q \cdot m$, q делит $m-1$, $N(M) = MQ$, $M \cap Q = 1$;

(c) если $N(M) \ne M$, то $G' \supseteq M$ и $|G:G'| \le q$;

(d) если $N(M) \ne M$, $1 \ne G_1 \lhd G$, $|G_1| = g_1$ и $G_1 \cap M = 1$, то M – циклическая группа нечетного порядка, Q – циклическая группа, G_1 – нильпотентная группа; группа $\overline{G} = G/G_1$ сама удовлетворяет условиям этой теоремы относительно $\overline{M} = MG_1/G_1$, $|\overline{M}| = m$, $|N_{\overline{G}}(\overline{M})| = q$;

(e) если $N(M) = G$, то G – группа Фробениуса с ядром Фробениуса M;

(f) если $N(M) = M$, то G – группа Фробениуса с ядром Фробениуса F, где $G = F \lambda M$, силовские p-подгруппы из M либо циклические, либо при $p = 2$ – обобщенные кватернионные;

(g) если $N(M) \ne M, G$, то $N(M)$ имеет в G нормальное дополнение G_1, и по (d) $N(M)$ – метациклическая группа.

2.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть σ – множество всех тех нечетных простых делителей порядка конечной группы X, для которых X не p-разрешима.

Если для каждого $p \in \sigma$ взять по одной силовской p-подгруппе, то получим $s\sigma$-систему $S(X)$ группы X.

Но для каждого $p \in \sigma$ можно организовать и подходящую систему бипримарных не p-нильпотентных подгрупп, содержащих S_p-подгруппы из $S(X)$.

2.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $sb\sigma$-системой $SB(X)$ группы X, ассоциированной с $s\sigma$-системой $S(X)$ группы X, назовем множество не p-нильпотентных бипримарных подгрупп из X, содержащих P для каждого $p \in \sigma$ для некоторой S_p-подгруппы P из $S(X)$ и имеющих порядок $|P| \cdot q^n$, где простое число q выбрано наибольшим среди простых p'-делителей порядков не p-нильпотентных подгрупп, содержащих P, а $|P| \cdot q^n$ выбрано наибольшим среди порядков не p-нильпотентных $\{p, q\}$-подгрупп из X, содержащих P. (Если в X есть не изоморфные не p-нильпотентные $\{p, q\}$-подгруппы порядков $|P| \cdot q^n$, то в $SB(X)$ включается любая одна из таких подгрупп, так что $|\sigma| = |S(X)| = |SB(X)|$).

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

3.1. ТЕОРЕМА. Пусть X – конечная группа с S_2-подгруппой T и $sb\sigma$-системой $SB(X)$. Предположим, что T перестановочна с каждой подгруппой из множества $SB(X)$. Тогда имеют место следующие утверждения:

(1) X обладает свойством $E_{\{2,p\}}$ для каждого $p = 5$ и $p > 7$; если $\{3, 7\} \not\subseteq \sigma$, то X – разрешимая группа и $\sigma = \varnothing$;

(2) X либо обладает свойством $E_{\{2,7\}}$, либо X не $L_2(7)$-свободна и любая $7d$-подгруппа из $SB(X)$ есть $\{3, 7\}$-группа, где $\{3, 7\} \subseteq \sigma$;

(3) X либо обладает свойством $E_{\{2,3\}}$, либо не $L_2(7)$-свободна, 3^6 делит $|X|$, X не E_{3^6}-свободна и любая $3d$-подгруппа из $SB(X)$ есть $\{3, 7\}$-группа, $\{3, 7\} \subseteq \sigma$.

Доказательство. Если $p \notin \sigma$, то группа X p-разрешима и обладает свойством $E_{\{2, p\}}$ [2, теорема 1.15.1]. Пусть $p \in \sigma$, $p = 5$ или $p > 7$. Пусть $B \in SB(X)$ и B – pd-группа. По условию теоремы $TB = BT$. Если 2 делит $|B|$, то *TB* есть $\{2, p\}$-группа. Поэтому пусть 2 не делит $|B|$. Тогда $|\pi(TB)|=3$. Если группа *TB* разрешима, то по теореме 1.15.1 из [2] *TB* обладает свойством $E_{\{2,p\}}$ и тогда и *X* им обладает. Поэтому пусть группа *TB* есть неразрешимая группа, а *B* – ее холлова $2'$-подгруппа. Тогда и любой простой неабелев композиционный фактор $\overline{L}$ группы *TB* обладает свойствами: $|\pi(\overline{L})|=3$, $\overline{L}$ имеет холлову $2'$-подгруппу. По теореме 7 из [9] тогда $\overline{L} \cong L_2(q)$, где q – простое число Мерсенна. В [10] приведены порядки простых неабелевых групп $\overline{L}$ с $|\pi(\overline{L})|=3$. Из этих результатов следует, что $\overline{L} \cong L_2(7)$. Но тогда $p=3$ или 7 и заключение (1) доказано, ибо если $3 \notin \sigma$, или $7 \notin \sigma$, то группа либо 3-разрешима, либо 7-разрешима и поэтому $L_2(7)$-свободна.

Пусть теперь $p=7 \in \sigma$, $B \in SB(X)$. По условию *TB* – подгруппа в *X*. Если *B* есть $\{2, 7\}$-группа, то *TB* – холлова $\{2, 7\}$-подгруппа. Поэтому предположим, что в *B* есть $\{7, q\}$-подгруппа, $q>2$. Тогда *TB* есть $\{2, 7, q\}$-группа. Если *TB* есть разрешимая группа, то по теореме 1.15.1 в [2] в *X* есть холлова $\{2, 7\}$-подгруппа. Если же *TB* есть неразрешимая группа, то, как и в доказательстве заключения (1), показывается, что *TB* не $L_2(7)$-свободна, $q=3$. Если же $q>3$, то *TB* – разрешима, и в *X* есть холлова $\{2, 7\}$-подгруппа. Этим утверждение (2) доказано.

Пусть теперь $p=3 \in \sigma$, $B \in SB(X)$. Если BT – разрешимая группа, то по теореме 1.15.1 в [2] в BT (и в *X*) есть холлова $\{2, 3\}$-подгруппа. Если же BT есть неразрешимая группа, то, как и выше, BT не $L_2(7)$-свободна. Так как *B* есть $\{3, 7\}$-группа и не 3-нильпотентна, то по теореме 4.3.1 в [2] в *B* должна существовать 3-замкнутая 3*d*-подгруппа Шмидта *S* порядка $3^{\alpha} \cdot 7^{\beta}$. Из свойств групп Шмидта [11] следует, что S_3-подгруппа *S* имеет экспоненту 3, $|S_3/S_3'|=3^m$, где m – наименьшее целое число, такое, что $3^m \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 7)$. Поэтому $m=6$. Этим заключение (3) доказано.

Теорема полностью доказана.

3.2. СЛЕДСТВИЕ. Если конечная *K*-группа *X* удовлетворяет условию теоремы 3.1 и $L_2(7)$-свободна, то *X* – разрешимая группа и $\sigma=\varnothing$.

Доказательство. Из теоремы 3.1 следует, что для всех $p \in \sigma$ в *X* существуют холловы $\{2, p\}$-подгруппы. Если $p>2$ и $p \notin \sigma$, то *X* является *p*-разрешимой группой и по теореме 1.15.1 в [2] в *X* существует холлова $\{2, p\}$-подгруппа. Но теперь по теореме 1.1 *X* является разрешимой группой.

Следствие доказано.

3.3. ТЕОРЕМА. Пусть *X* – простая неабелева конечная группа с S_2-подгруппой *T*, $SB(X)$ – ее $sb\sigma$-система. Если *T* перестановочна со всеми подгруппами $SB(X)$ и $|\pi(X)|=3$, то $X \cong L_2(7)$.

Доказательство. Из условия и следствия 3.2 следует, что *X* есть $\{2, 3, 7\}$-группа. Известно [10], что простые $\{2, 3, 7\}$-группы исчерпываются группами $L_2(7)$, $L_2(8)$ и $U_3(3)$. $X \ncong L_2(8)$, так как она $L_2(7)$-свободна ([4, теорема 2.8.7]). У группы $U_3(3)$ нет холловых подгрупп [12]. Из теоремы 3.1 (3) тогда следовало бы, что 3^6 делит $|U_3(3)|$. Но это невозможно [12]. Поэтому $X \ncong U_3(3)$.

Теорема доказана.

3.4. ТЕОРЕМА. Пусть *X* – конечная группа и $|\pi(X)|=4$. Если S_2-подгруппа *T* из *X* перестановочна с подгруппами из $sb\sigma$-системы $SB(X)$, то *X* – не простая группа.

Доказательство. Пусть $p \notin \{2, 3, 7\}$ и *p* делит $|X|$. По теореме 3.1 (1)

в *X* имеется холлова $\{2, p\}$-подгруппа *H*, $p=5$ или $p>7$. (1)

По следствию 3.2

X не $L_2(7)$-свободна. (2)

Предположим, что *X* – простая неабелева группа.

Из (2) следует, что из списка простых конечных групп *X* с $|\pi(X)|=4$ можно исключить $7'$-группы. По [10] остается рассмотреть следующие группы: J_2, A_7, A_8, A_9, A_{10}, $L_3(4)$, $U_3(5)$, $U_4(3)$, $PSp_4(7)$, $O_7'(2)$, $G_2(3)$, ${}^3D_4(2)$, $L_3(7)$, $U_3(8)$, $U_3(7)$, $L_3(8)$, $Suz(8)$, $L_2(3^3)$, $L_2(7^2)$, $L_2(13)$, $O_8(2)$.

Кроме того, из теоремы 3.1 (3) следует, что

либо X обладает свойством $E_{\{2,3\}}$, либо 3^6 делит $|X|$. (3)

1) $X \not\cong L_3(4)$.

Группа $X \cong L_3(4)$ по (1) должна иметь холлову $\{2, 5\}$-подгруппу K порядка $2^6 \cdot 5$. Но тогда $|X:K| = 3^2 \cdot 7$, а в X такого индекса подгрупп нет [12].

2) $X \not\cong O_7'(2) \cong B_3(2) \cong O_7(2)$. ($|X| = 2^9 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$).

Так как 3^6 не делит $|X|$, то по теореме 3.1 (3) в X есть холлова $\{2, 3\}$-подгруппа. Но это невозможно ([13], теорема 1.2).

3) $X \not\cong O_8(2) \cong Sp_6(2)$. ($|X| = 2^{12} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$).

Так как 3^6 не делит X, то по теореме 3.1 (3) в X должна быть холлова $\{2, 3\}$-подгруппа. Но в X такой подгруппы нет [12].

4) $X \not\cong {}^3D_4(2)$. ($|X| = 2^{12} \cdot 3^4 \cdot 7^2 \cdot 13$).

Если $X \cong {}^3D_4(2)$, то по (1) в X должна быть подгруппа индекса $3^4 \cdot 7^2$. Но в X такой нет [12].

5) $X \not\cong U_3(8)$. ($|X| = 2^9 \cdot 3^4 \cdot 7 \cdot 19$).

Действительно, если $X \cong U_3(8)$, то она имеет две компоненты связности графа $\Gamma(X)$ $\{(q^2 - q + 1)/3\} = \{19\}$ и $\{2, 3, 7\}$ [14]. По (1) X должна иметь подгруппу K порядка $2^9 \cdot 19$ с двумя CC-подгруппами порядков 2^9 и 19. Но подгруппа Бореля в ней имеет порядок $2^9 \cdot 7 \cdot 3$. Поэтому $N_K(S_2(K)) = S_2(K)$ и K – группа Фробениуса с ядром порядка 19. Но тогда $S_2(K)$ либо циклическая, либо обобщенная кватернионная (теорема 2.3 (f)). Это невозможно.

6) $X \not\cong L_3(8)$. ($|X| = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 73$).

Таким образом, по (1) X должна была бы иметь холлову $\{2, 73\}$-подгруппу индекса $3^2 \cdot 7^2 = 441$. Но в X таких подгрупп нет [12].

7) $X \not\cong Suz(8)$, так как X $L_2(7)$-свободна, что противоречит (2).

8) $X \not\cong J_2$. В противном случае X должна иметь по (1) холлову $\{2, 5\}$-подгруппу индекса $3^3 \cdot 7 = 189$. Но таких подгрупп в X нет [12].

9) – 12) $X \not\cong A_7,\ A_8,\ A_9,\ A_{10}$, так как $|A_7| = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, по (1) она должна иметь холлову $\{2, 5\}$-подгруппу индекса $3^2 \cdot 7$, что невозможно [12].

$|A_8| = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, по (1) должна иметь холлову $\{2, 5\}$-подгруппу индекса $3^2 \cdot 7$, что невозможно [12].

$|A_9| = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$, по (1) должна иметь холлову $\{2, 5\}$-подгруппу индекса $3^4 \cdot 7$, что невозможно [12].

$|A_{10}| = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$, по (1) должна иметь холлову $\{2, 5\}$-подгруппу индекса $3^4 \cdot 7$, что невозможно [12].

13) $X \not\cong U_3(5)$, ($|X| = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$). В противном случае по (1) X должна иметь холлову $\{2, 5\}$-подгруппу индекса $3^2 \cdot 7$, но это невозможно [12].

14) $X \not\cong U_4(3)$, $|X| = 2^7 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7$. В противном случае X должна по теореме 3.1 (4) иметь холлову $\{2, 3\}$-подгруппу индекса $5 \cdot 7$, либо 3^6 должно делить $|X|$. Ни первая возможность, ни вторая не имеют места [12].

15) $X \not\cong PSp_4(7)$, $|X| = 2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^4$. Подгруппа Картана в $PSp_4(7)$ имеет порядок $\frac{36}{2} = 18 = 2 \cdot 9$. Поэтому $|N_X(Q)| = 2 \cdot 3^2 \cdot 7^4$, где $Q \in Syl_7(X)$. Тогда по (1) в X была бы холлова $\{2, 5\}$-подгруппа K порядка $2^8 \cdot 5^2$.

Так как $PSp_4(7) = B_2(7) = C_2(7)$, то по [7] X имеет компоненты связности графа $\Gamma(X)$ $\left\{\frac{7^2+1}{2}\right\} = \{5\}$ и $\{2, 7, 3\}$. Поэтому K имеет CC-подгруппы порядка 5^2 и 2^8.

Так как $7 \equiv -1(\mathrm{mod}\,8)$, то $N_X(T) = T \in Syl_2(X)$ [15]. Поэтому $N_K(T) = T$ и K – группа Фробениуса с ядром порядка 5^2 и по теореме 2.3 (f) T должна быть циклической или обобщенной кватернионной группой. Но это невозможно. Поэтому $X \ncong PSp_4(7)$.

16) $X \ncong G_2(3)$. ($|X| = 2^6 \cdot 3^6 \cdot 7 \cdot 13$). Имеет 3 компоненты связности графа $\Gamma(X)$ [7]: $\{2, 3\}$, $\{13\}$, $\{7\}$. Если $T = S_3(X)$, то $|N_X(T)| = 3^6 \cdot 4$. По (1) X имеет Холлову $\{2, 13\}$-подгруппу K с S_2-подгруппой T. Предположим, что K не 2-нильпотентна. Тогда по теореме 4.3.1 из [2] в K должна быть 2-замкнутая подгруппа Шмидта S. Из свойств групп Шмидта [11] тогда следует, что 2^{12} делит $|S|$. Но 2^{12} не делит $|K|$. Поэтому K – 2-нильпотентная группа Фробениуса с CC-подгруппой порядка 13. Но тогда T должна быть или циклической, или обобщенной кватернионной по теореме 2.3 (f). Но это невозможно для простой группы X.

17) $X \ncong L_3(7)$. ($|X| = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^3 \cdot 19$). По (1) в X есть холлова $\{2, 5\}$-подгруппа K. X имеет 2 компоненты связности графа $\Gamma(X)$ [7]: $\{2, 3, 7\}$, $\left\{\frac{7^3 - 1}{(7-1)\cdot 3}\right\} = \left\{\frac{7^2 + 7 + 1}{3}\right\} = \{19\}$. Поэтому K – группа Фробениуса с ядром порядка 19 и дополнением порядка 2^5 (это показывается как и в 16) ввиду отсутствия в K 2-замкнутой подгруппы Шмидта). Опять S_2-подгруппа в K (и в X) должна быть циклической или обобщенной кватернионной по теореме 2.3 (f), что невозможно для простой группы.

18) $X \ncong U_3(7)$. ($|X| = 2^7 \cdot 3 \cdot 7^3 \cdot 43$). По [7] в X есть CC-подгруппа порядка 43, а по (1) в X есть подгруппа K порядка $2^7 \cdot 43$. Как и в п. 17) и 18) в K нет 2-замкнутых подгрупп Шмидта. Поэтому K – группа Фробениуса с ядром порядка 43. Тогда S_2-подгруппа в K (и в X) есть или Z_{2^5} или Q_{2^5}, что невозможно и $|X| = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$.

19) $X \ncong L_2(3^3)$, $L_2(13)$. ($|X| = 2^2 \cdot 3^\alpha \cdot 7 \cdot 13$), $\alpha = 3$ или 1. Эти группы отпадают по (2), так как 2^3 делит $|L_2(7)|$.

20) $X \ncong L_2(7^2)$. ($|X| = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2$). По [7] X имеет CC-подгруппы порядков 7^2, 5^2. По (1) в X должны быть подгруппы порядка $2^4 \cdot 5^2$. Но такой подгруппы в X нет ([4], теорема 2.8.27).

Этим теорема 3.4 полностью доказана.

Из теорем 3.3 и 3.4 предполагается:

3.5. ГИПОТЕЗА. Если X – конечная группа, у которой S_2-подгруппа перестановочна с подгруппами множества $SB(X)$, то любой простой неабелев композиционный фактор группы X изоморфен $L_2(7)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тютянов В.Н. К гипотезе Холла (Препринт / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины). – 2001. – № 111. – 14 с.
2. Чунихин С.А. Подгруппы конечных групп. – Мн.: Наука и техника, 1964. – 154 с.
3. Беркович Я.Г. Существование ненильпотентных разрешимых подгрупп у конечной неразрешимой группы // Сибирский математический журнал. – 1966. – Том VII, № 1. – С. 206 – 211.
4. Huppert B. Endliche Gruppen, I. – Berlin: Springer – Verlag, 1967. – 797 S.
5. Huppert B., Blackburn N. Finite groups, III. – Berlin: Springer – Verlag, 1982. – 454 p.
6. Горенстейн Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию. – М.: Мир, 1985. – 352 с.
7. Williams J.S. Prime graph components of finite groups // J. Algebra. – 1981. – Vol. 69, № 2. – P. 487 – 513.
8. Herzog M. On finite groups which contain a Frobenius subgroup // J. Algebra. – 1967. – Vol. 6. – P. 192 – 221.
9. Казарин Л.С. О произведении конечных групп // ДАН СССР. – 1983. – Т. 269, № 3. – С. 528 – 531.
10. Huppert B. Lempken W. Simple groups of order divisible by at most four primes // Известия Гомельского госуниверситета им. Ф.Скорины. Вопросы алгебры. – 2000. – № 3 (16). – С. 64 – 75.
11. Гольфанд Ю.А. О группах, все подгруппы которых специальные // Докл. АН СССР. – 1948. – Т. 60, № 8. – С. 1313 – 1315.
12. Atlas of finite groups / J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton et al. – London: Clarendon Press, 1985. – 252 p.
13. Ревин Д.О. Холловы π-подгруппы конечных групп Шевалле, характеристика которых принадлежит π // Математические труды. – 1999. – Т. 2, № 1. – С. 157 – 205.
14. Кондратьев А.С. О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Математический сб. – 1989. – Т. 180, № 6. – С. 787 – 797.
15. Carter R., Fong P. The Sylow 2-subgroups of the classical groups // J. Algebra. – 1971. – V. 19, № 1. – P. 21– 30; – 1972. – V. 21, № 2. – P. 312 – 320; – 1974. – V. 29, № 3. – P. 455 – 458.