

УДК 519.6: 532.5

Возможные виды течения в закрытой каверне и противоречия в задаче с подвижной крышкой

Волосова Н.К., аспирант
 Басараб М.А., профессор, д.ф. - м.н.
 МГТУ им. Н.Э. Баумана
 Волосов К.А., профессор, д.ф. - м.н.
 Волосова А.К., к. ф.- м. н.
 МИИТ
 Пастухов Д.Ф., к. ф.-м. н., доц.,
 Пастухов Ю.Ф., к. ф.-м. н., доц.
 Полоцкий государственный университет

Аннотация. Указаны противоречия в решениях краевой задачи течения вязкой ньютоновской жидкости в закрытой кювете с подвижной крышкой. Сравняются свойства решений различных нелинейных задач. Проводится некоторая аналогия с задачами обтекания пластины Блазиуса. Впервые выделены главные члены уравнений в геометрии кюветы и построена простая асимптотика дающая представление о решении по аналогии с решением Блазиуса в теории пограничного слоя. Обоснован переход к краевой задаче с открытой кюветой, которую рассматриваем как модель задачи об аневризме. Численными итерационными методами исследованы различные приближения решения первой краевой задачи для уравнений Навье - Стокса и типы течений в закрытой кювете. Проведено сравнение с результатами работ по численным исследованиям такой задачи другими авторами.

Ключевые слова: гидродинамика, численные методы, уравнение Навье - Стокса, уравнение Пуассона, уравнения в частных производных, теория КАМ, скачок скорости

Введение. В данной работе сравниваются две различные задачи: «течения в закрытой каверне с подвижной крышкой» и «течения в открытой каверне с подвижной крышкой», но детально исследуется задача «течения ньютоновской жидкости в закрытой каверне с подвижной крышкой».

Рассмотрим краевую задачу в закрытой кювете с подвижной верхней крышкой без свободной поверхности в объеме жидкости. Силы тяжести учтена и «спрятана» в функции давления [40,23]. Численные решения гидродинамической задачи разными методами содержатся в работах [2]-[22].

1.0 противоречиях, возникающих в модели в закрытой каверне с подвижной крышкой.

Простая геометрия течения в прямоугольной каверне с подвижной крышкой привлекает внимание исследователей для отладки программ и их проверки. Первоначально во всех цитируемых работах и в данной работе есть предположение о том, что функции скоростей, давления и тока являются непрерывными и дифференцируемыми необходимое число раз.

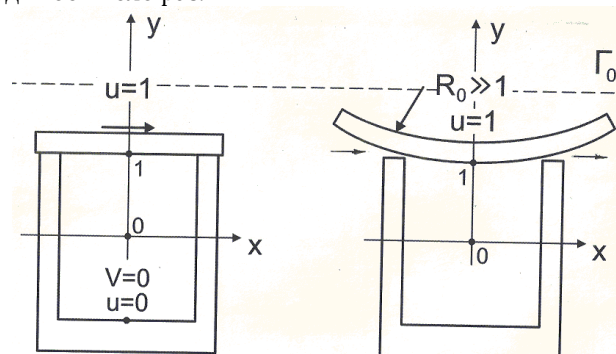


Рис.1 Геометрия каверны. а) закрытая каверна б) открытая каверна.

Замечание 1. В работе используется две декартовы системы координат. В первой части работы начало декартовой системы координат на Рис 1. выбрано в центре области, а при численных расчетах её начало ($x=0, y=0$) удобно связать с левым нижним углом.

Отдельно следует заметить, что краевые условия скорости в верхних угловых точках (Рис.1а) на границе подвижной части и неподвижной части стенки терпят разрыв первого рода, то есть имеем противоречие с предположениями о непрерывности полей. С углавыми верхними точками связана **полярная сингулярность поля скорости**, зависящая от направления. Действительно, в левой угловой точке в горизонтальном направлении радиальная компонента скорости $u=1$, если радиус-вектор направлен вниз, то радиальная компонента равна 0. Идея перехода от закрытой каверны к открытой каверне заключается к сведению полярной сингулярности скорости в угловых точках к **неполярной сингулярности (скалярной)** вдоль малого

зазора на боковых сторонах каверны, зависящей только от координаты. Кроме того, физически осуществимой подвижной крышкой является поверхность вращающегося цилиндра большого диаметра в открытой каверне, а её движение передаёт жидкости импульс необходимый для движения последней (Рис.1б).

Замечание 2. Если от границы каверны импульс не передаётся во внутреннюю область, то возмущения в вязкой жидкости со временем затухают и движение прекращается. Все составляющие скорости через некоторый промежуток времени равны нулю и давление в жидкости становится постоянным. С другой стороны, эта задача является предельным случаем задачи обтекания жидкостью пластины с неглубокими кавернами.

Используется также идея переноса информации граничных условий с границы вглубь области. До настоящего времени эта идея использовалась при построении приближённых решений «методом R – функций» [25с. 31], и асимптотическими методами, например [26]. В [26 с. 8] подробно описана эволюция теории пограничного слоя. Там же приведена большая и подробная библиография, в которой выстраивалась идеология трёхпалубной структуры решения. Теория Г. Блазиуса, строит приближённое решение течения в пограничном слое с помощью ОДУ

$$2 \cdot f^{(4)}(\zeta) + f(\zeta)f^{(2)}(\zeta) = 0, f(0) = 0, f^{(2)}(0) = 0, f_{\zeta \rightarrow \infty} \rightarrow 1, \zeta = \frac{y}{\varepsilon \sqrt{x}} \quad (1)$$

Эта теория оказалась чрезвычайно полезным практическим шагом и инструментом в инженерных расчётах. В более сложных задачах уравнение (1) конечно не даёт решения, однако теория пограничного слоя задаёт общее

направление исследования.

Формальные асимптотические ряды, построенные в [26] позволяют выявить слагаемые, дающие наибольший вклад в решения. Авторы данной работы предположили и нашли аналогии при течениях в геометрии Рис.1а и Рис.1б. Авторы предположили, что и в общей постановке существуют простые решения с общими свойствами течения. Таким образом, в данной работе найдены асимптотические решения, которые будут полезными в решении проблем точной механики и проблем биологии 21 века связанные с проблемой аневризмы [36].

Замечание 3. При разностной аппроксимации краевой задачи предполагается, что функции описывающие изменение основных законов сохранения (масса, импульс, энергия и т.д.) являются непрерывными (кусочно-непрерывными) в приближении уравнений сплошной среды. Помимо физических требований к разностным схемам предъявляются требования однородности. Оно заключается в том, что формулы, по которым ведётся расчёт, должны записываться единообразно во всей области, во всех узлах сетки, без явного выделения «нерегулярностей» решения, например точек разрыва. Свойства того или иного алгоритма, как правило, трудно оценить теоретически. Поэтому при анализе результатов, помимо априорных соображений, большую роль играют апостериорные исследования. Сюда в первую очередь относятся проверка алгоритмов на специальных «точных» решениях - «тестах». При этом проводится расчёт некоторых упрощённых вариантов задачи, который не даёт, быть может, полную физическую картину процесса, но допускает простое аналитическое решение. В данной задаче точных решений нет. Поэтому эту роль могут выполнять асимптотические решения, например, построенные в данной работе. Сопоставление результатов численного расчёта с «тестом» позволяют судить о точности алгоритма, уточнить значения неизвестных констант, оценить скорость сходимости и т.д. [24].

В ряде методов используется идея переноса информации от границы вглубь области. До настоящего времени эта идея использовалась при построении приближённых решений «методом R – функций» [2]с. 31, и асимптотическими методами, например [26].

Задачи расчета обтекания поверхностей остаются актуальными с начала 20 века и насчитывают большое количество статей, например [26]. Развитие авиации и космонавтики, задач обтекания крыла и других поверхностей стимулировало в 20 веке исследование задач пограничного слоя в потоках с дозвуковыми и сверхзвуковыми скоростями. Эволюция этих задач привела к построению «много палубных структур» решения до точки отрыва потока.

В начале 21 века интерес исследователей переносится в область механики течения биологических жидкостей (крови) в сложных областях. Поэтому число Рейнольдса является небольшим. Разными авторами рассматривались простые модели, например, течения в кубической кювете заполненной жидкостью. В работах [1] проведён обзор работ течения в каверне, в которых приводится её численные решения разными методами (см, например [2]-[22]).

Упрощённая схема кюветы с подвижной закрытой крышкой указана на Рис.1а для безразмерной задачи. На внутренних поверхностях кюветы имеющей форму куба выполнены условия прилипания: продольная u и вертикальная v , безразмерные скорости $u=0, v=0$ на внутренних стенках. Предполагаем, что ниже поверхности раздела Γ_0 кюветы погружены в жидкость.

а) Верхняя крышка кюветы в классической задаче имеет безразмерную скорость $u=1, v=0$. Таким образом, возникает первая проблема вычислительного характера - **скачок скорости в верхних угловых точках от $u=0$ до $u=1$ (полярная сингулярность)**.

б) Результаты экспериментов приведённые в [9], получены в кювете, изображённой на рис.1б. Роль верхней крышки играет поверхность цилиндра большого диаметра $R \gg 1$. Поэтому участок длиной равной 1 можно приближенно считать плоским.

Приведём пример из [27] с. 15 медленно ползущего течения внутри прозрачного клина с очень низким числом Рейнольдса.

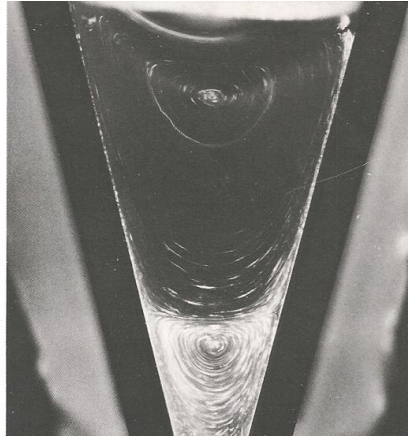


Рис.2. Жидкость приводится в движение равномерным вращением цилиндра по часовой стрелке, часть цилиндра видна в верхней части рисунка. Число $Re=0.17$. Образуется последовательность вихрей, интенсивность которых уменьшается сверху вниз.

3. Постановка задачи

В данной работе рассматривается краевая задача в кювете с подвижной верхней стенкой без свободной поверхности в объеме жидкости Рис.1. а. Сила тяжести «спрятана» в функции давления [4 с. 378],[40] также в каверне отсутствует свободная поверхность раздела сред жидкость-воздух Γ_0 .

Замечание 4. В отличие от постановок в работах [5-21] в данной задаче **точка отрыва** x_s потока совпадает с первой точкой соприкосновения стенки с жидкостью (левой верхней угловой точкой Рис.1.а). Отметим, что такое положение точки отрыва отличается от положения, принятого в работах [6]-[19] для геометрии Рис 1а.

Замечание 5. Линии тока движения частиц жидкости в кубе имеют точки излома в окрестности угловых точек, полученные численными методами в работе[11](в геометрии Рис.1а.), показаны на Рис.3.

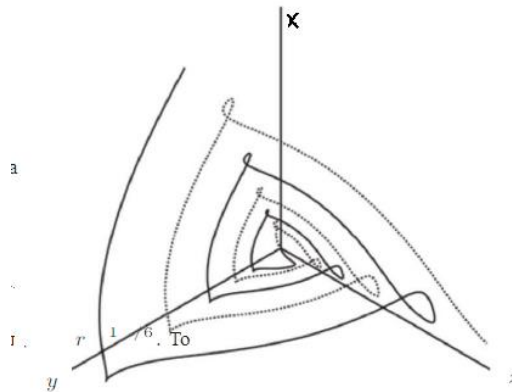


Рис 3. В масштабированной полярной системе координат, начало которой находится в точке $x=1, y=1, z=0$ (H,E).

Конец вектора, направленный на жидкую частицу, отсчитывает угол и движется назад к началу координат по пунктирной линии и возвращается вперёд (к наблюдателю) по черной, сплошной линии.[11]. Видны точки излома с изменением направления траектории.

Аналогичная ситуация в линиях тока на отрезке FG Рис.4. Направления линий терпят скачок в как двумерном, так и в трёхмерном случае. Авторы работ [6-18] в задаче для прямоугольной или кубической закрытой каверны используют сингулярные краевые условия, которые они преодолевают численными методами и воспринимают как должное. Особенности в окрестности краевых условий уделено внимание в [28] гл.3, и [29- 31].

Физическая постановка, устраняющая оба противоречия, описанных выше.

Изменим краевые условия. А именно, между верхней крышкой и кюветой (Рис 1.б) добавим малый зазор в верхней части боковых стенок, позволяющий жидкости как втекать в кювету, так и вытекать согласно действию само индуцированного давления. Величина зазора связана с величиной малого параметра. Конструкция такой кюветы приведена в [5].

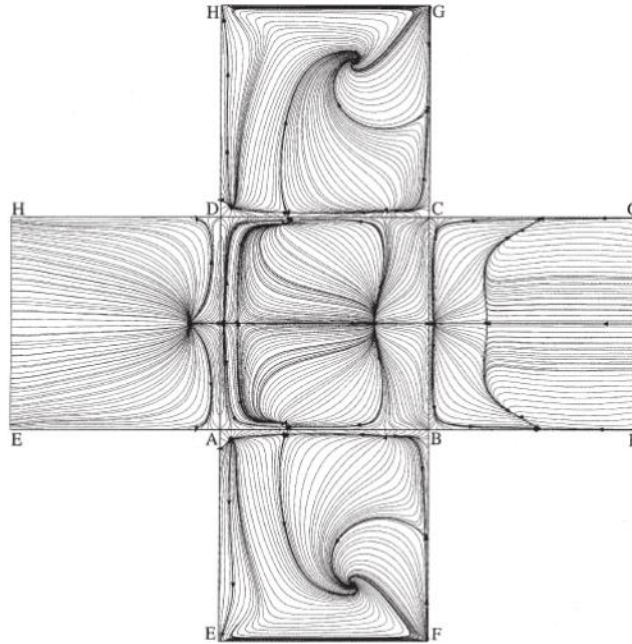


Рис. 4. Развёртка течения в кубе [1,7] построена по экспериментальным данным. Видно, что существуют особые точки типа «фокус», «седло».

Выберем декартовую систему координат с её началом точкой $(0,0,0)$ на середине квадрат ADCB (пересечение диагоналей квадрата ADCB). Ось x выходит из начала координат и направлена параллельно ребру AB налево, навстречу движению крышки EFGH. Крышка движется слева направо. Ось y направлена на читателя из точки $(0,0,0)$. Ось z направлена параллельно ребру BC.

В цикле работ о внешнем отекании поверхностей, к которым принадлежит и работа [26], строится многопалубная система формальных асимптотических рядов в задаче пограничного слоя, по малому параметру $0 < \varepsilon < 1$ связанному с числом Рейнольдса $Re = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, \varepsilon = \frac{1}{Re^2}$. Такой метод позволяет выяснить вклад

различных слагаемых в уравнении. С этой целью вводим быстрые переменные содержащие малый параметр и строим новый вид главного члена асимптотического решения (анзац) для функции тока.

Будем считать, что безразмерная длина ребра куба равна 2 единицам. Укажем координаты точки A(+1,-1,-1), и координаты точки B(-1,-1,-1).

В [1] приводится тор, рассчитанный в соответствии с теорией КАМ (Колмогорова, Арнольда, Мозера) для данной задачи.

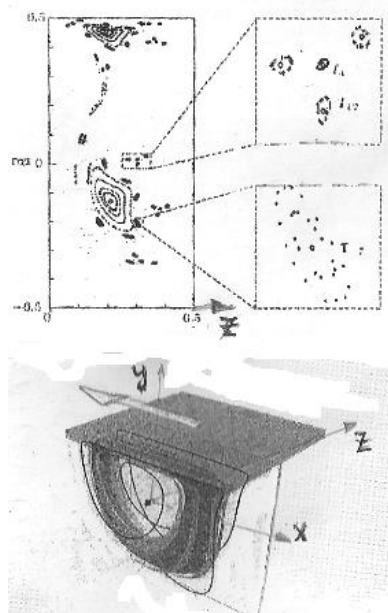


Рис.5 Серые линии - это хаотические кривые на торе, а черные линии регулярные линии тока. Вверху рисунка показаны сечения Пуанкаре. Показана плоскость, относительно которой поток симметричный. См. также Рис. 4.

4. Краевые условия скорости в плоскости симметрии закрытой кубической каверны.

Запишем краевые условия для скорости на боковых стенках Γ кюветы

$$u|_{\Gamma} = 0, v|_{\Gamma} = 0, \{ \Gamma | x = \pm 1, -1 \leq y \leq 1, z = 0 \} \text{Re} = 1/\sqrt{\varepsilon} \quad (2)$$

Аналогичные краевые условия скорости (условия прилипания) на дне кюветы, обозначим его границу через $\Gamma|_{\text{bottom}}$, имеют вид

$$u|_{\text{bottom}} = 0, v|_{\text{bottom}} = 0, \{ \Gamma_{\text{bottom}} | y = -1, -1 \leq x \leq 1, z = 0 \} \quad (3a)$$

На верхней подвижной грани, обозначим ее границу через $\Gamma|_{\text{top}}$, краевые условия имеют вид

$$u|_{\text{top}} = 1, v|_{\text{top}} = 0, \{ \Gamma_{\text{top}} | y = 1, -1 \leq x \leq 1, z = 0 \} \quad (3b)$$

На первом этапе построения аналитического асимптотического решения задачи, предполагаем, что существует малый параметр по переменной «время», который позволяет в главном слагаемом асимптотических рядов [4–6] считать течение «установившимся», то есть «стационарным». Этот этап преобразований подробно описан в [26] и во многих статьях ссылки на которые приведены в литературе в [26] и мы его пропускаем.

5. Изучение двумерного течения в плоскости симметрии $z=0$.

Рассмотрим течение в сечении куба $z=0$. В силу симметрии течения

относительно плоскости $z=0$ возможно рассмотреть плоскую задачу. Запишем уравнения Навье – Стокса для ньютоновской жидкости

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + (\vec{\Omega}, \nabla \Omega) = -\nabla p(x, y) + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \vec{\Omega}, \quad \text{div} \vec{\Omega} = 0 \quad (4)$$

Здесь вектор скоростей: $\vec{\Omega}(x, y) = \{u(x, y), v(x, y)\}$, а проекция азимутальной компоненты на плоскость x, y равна $w \equiv 0$. Рассматриваем задачу в двумерной постановке. Здесь число $\sqrt{\varepsilon} = 1/\text{Re}$, ($0 < \varepsilon < 1$) – естественный малый параметр в задаче (2-4).

Математическим аппаратом, позволяющим учитывать свойства симметрии, является теория групп. На языке теории групп симметрия трактуется как наличие допускаемой системой уравнений группы преобразований. В [33] предполагается, что естественным критерием упрощения задачи при асимптотическом анализе является повышение симметрии системы, то есть расширение допускаемой группы преобразований. В [35, 36] похожая идея используется при построении асимптотических решений вырожденных квазилинейных уравнений.

Введём функцию тока в двумерной задаче (2-4) [4]. Это делается таким образом, чтобы сразу было выполнено уравнение неразрывности в системе (4).

$$u(x, y) = \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y}, v(x, y) = -\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} \quad (5)$$

$$\text{Действительно: } \text{div} \vec{\Omega} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial y \partial x} = 0$$

Проводим далее стандартную процедуру исключения из системы уравнений Навье–Стокса производных давления [3–28]. Производится дифференцирование первого скалярного уравнения (4) по переменной y , а второго скалярного уравнения системы (4) по переменной x . Затем эти уравнения вычитают. Тогда образовавшиеся слагаемые (смешанная производная функции давления) $\frac{\partial^2 p(x, y)}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 p(x, y)}{\partial y \partial x}$ сокращаются.

Предполагается, что функция давления $p(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируемая и верна теорема Шварца о равенстве смешанных производных. Получим:

$$\frac{\psi(x, y)}{\partial x} \left(-\frac{\partial^3 \psi(x, y)}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 \psi(x, y)}{\partial^2 x \partial y} \right) + \frac{\psi(x, y)}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 \psi(x, y)}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \psi(x, y)}{\partial x^3} \right) - \sqrt{\varepsilon} \left(\frac{\partial^4 \psi(x, y)}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi(x, y)}{\partial x^4} \right) = 0 \quad (6)$$

Имеем две группы слагаемых. Первые две скобки описывают конвекцию (нелинейные слагаемые), а третья скобка учитывает влияние вязкости. Каждое из этих слагаемых имеет своё влияние на процессы. Оценим вес каждого слагаемого в данной задаче, используя подход работы в [26].

В теории асимптотических решений считается [26, 37] сложность задачи определяется количеством переменных, числом параметров, нелинейностью. С этой целью рассмотрим преобразование растяжения переменных

$$\Psi(x_1, y_1) = \varepsilon^\sigma \Psi \left(\frac{x}{\varepsilon^\alpha}, \frac{y}{\varepsilon^\beta} \right), x_1 = \frac{x}{\varepsilon^\alpha}, y_1 = \frac{y}{\varepsilon^\beta}, \beta > \alpha \cdot (7)$$

Сравнение весов слагаемых в(6) проводят с помощью техники многоугольников Ньютона [29]. В работе [29] авторы используют технику многоугольников Ньютона – Пюизё.

Исследование уравнения (6) и техники многоугольников Ньютона – Пюизё позволяет получить значение $\sigma = \frac{1}{2} - \beta + \alpha$ и уравнение, в котором слагаемые размещены в порядке возрастания показателя степени ε

$$\varepsilon^{1+\alpha-5\beta} \left(\frac{\partial^4 \psi(x_1, y_1)}{\partial y_1^4} + \frac{\partial \psi(x_1, y_1)}{\partial x_1} \frac{\partial^3 \psi(x_1, y_1)}{\partial y_1^3} - \frac{\partial \psi(x_1, y_1)}{\partial y_1} \frac{\partial^3 \psi(x_1, y_1)}{\partial x_1 \partial y_1^2} \right) - \varepsilon^{1-\alpha-3\beta} \left(\frac{\partial \psi(x_1, y_1)}{\partial x_1} \frac{\partial^3 \psi(x_1, y_1)}{\partial y_1 \partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^4 \psi(x_1, y_1)}{\partial y_1^2 \partial x_1^2} - \frac{\partial \psi(x_1, y_1)}{\partial y_1} \frac{\partial^3 \psi(x_1, y_1)}{\partial x_1^3} \right) - \varepsilon^{1-3\alpha-\beta} \frac{\partial^4 \psi(x_1, y_1)}{\partial x_1^4} = 0 \quad (8)$$

Существует точное решение уравнения (8), которое можно трактовать как проекцию некоторой траектории из тора КАМ теории на плоскость $z=0$ (см. Рис 5). $\Psi(x_1, y_1) = (x_1 b_x - C_x)^m + (y_1 b_y - C_y)^2 - R^2 = const$ (9)

Все константы b_x, b_y, C_x, C_y, m, R здесь произвольные, но их следует задавать такими, чтобы изображение находилось во внутренней области закрытой кюветы указанной на Рис 1а. При $m=2$ из (9) следует уравнение окружности. Уравнение $\Psi(x_1, y_1) = const$ задает линию тока жидкой частицы.

Мы рассчитываем регулярные траектории на торе, а возникающие хаотические вихри в углах быстро исчезают и не важны в приложениях.

6. Численное исследование задачи в закрытой двухмерной каверне

Рассматривается задача установления течения в двухмерной прямоугольной закрытой каверне Рис 1а. В начальный момент все поля, например, функцию тока (5) в закрытой кюветы определяют по начальному полю скорости. Начало прямоугольной системы координат расположим в нижнем левом угле ($x=y=0$), каверны, направим ось y -вверх, ось x -вправо (Замечание 2). Используем итерационный метод по времени.

Горизонтальная скорость равна нулю на боковых сторонах, дне каверны (условия прилипания) $u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = 0, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$. На верхнем отрезке зададим симметричный непрерывный профиль горизонтальной скорости двумя кубическими сплайнами и одним отрезком

$$u_0(x) \equiv u(x, 1) = \begin{cases} -2\left(\frac{x}{\tau}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{\tau}\right)^2, & 0 \leq x \leq \tau = 1/20, \\ 1, & \tau \leq x \leq 1 - \tau, \\ -2\left(\frac{1-x}{\tau}\right)^3 + 3\left(\frac{1-x}{\tau}\right)^2, & 1 - \tau \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (10)$$

$$u_0(0) = u_0'(0) = u_0'(\tau) = u_0'(1 - \tau) = u_0'(1) = u_0(1) = 0, u_0(\tau) = u_0(1 - \tau) = 1.$$

В закрытой каверне вертикальная компонента скорости на прямоугольной границе равна нулю $v(x, 0) = v(x, 1) = v(0, y) = v(1, y) = 0, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

Можно положить нулевыми граничные условия для функции тока $\psi(0, y) = \psi(1, y) = \psi(x, 0) = \psi(x, 1) = 0, \forall x \in [0, 1], \forall y \in [0, 1]$.

Данная работа является продолжением работ [20]-[22],[39-41]. Результаты сравниваются с работой Фомина А.А., Фоминой Л.Н [23].

Рассмотрим гидродинамическую задачу [40] в прямоугольной области с системой уравнений в частных производных и начальными и краевыми условиями для физических полей [39],[40]. Обозначим вектор скорости жидкой частицы $(u(x, y), v(x, y))$. Система (11) записана в безразмерных переменных в постановке пары (ψ, w) имеет вид для закрытой каверны:

$$\begin{cases} \psi_{xx} + \psi_{yy} = -w(x, y), & 0 < x < 1, & 0 < y < 1 \\ w = v_x - u_y \\ u = \psi_y; v = -\psi_x, \\ w_t + u \cdot w_x + v \cdot w_y = \frac{1}{Re} (w_{xx} + w_{yy}), & 0 < t \leq 100, \\ \psi|_{\Gamma} \equiv 0, u(x, 0) = u(0, y) = u(1, y) = 0, u(x, 1) = u_0(x) \\ v|_{\Gamma} \equiv 0 \end{cases} \quad (11)$$

Где в системе уравнений (11) обозначена $w = v_x - u_y$ функция вихря, $\psi(x, y)$ функция тока. Вертикальная компонента скорости на границе каверны равна нулю, а горизонтальная проекция скорости имеет заданное распределение $u_0(x)$ на верхней стороне прямоугольника и направлена направо. На первом этапе численного решения задачи (11) необходимо задать начальные физические поля (достаточно задать начальное поле горизонтальной и вертикальной компонент скорости), а также связь граничных значений вихря с приграничными значениями функции тока и краевыми значениями скорости.

Инициализация задачи.

Удобно начальное поле горизонтальной скорости определить через профиль скорости на верхнем отрезке прямоугольника $u_0(x)$.

Пусть горизонтальная скорость линейно уменьшается от $u_0(x)$ на верхнем отрезке ($y=1$) до нуля на его нижнем отрезке ($y=0$).

Тогда начальное поле горизонтальной скорости в закрытой каверне [22,29] запишем по формуле

$$u(x_n, y_m) = -u_0(x_n) \sin\left(\frac{3\pi y_m}{2}\right), x_n = nh_1, y_m = mh_2, h_1 = \frac{1}{n_1}, h_2 = \frac{1}{n_2}, n = \overline{1, n_1 - 1}, m = \overline{0, n_2}, u_0(x_n) \equiv 1 \quad (12)$$

с использованием профиля (10) $u_0(x_n) \equiv u(x_n, 1), n = \overline{1, n_1 - 1}$.

Центр масс в модели несжимаемой жидкости не перемещается по оси x . Однако для начального приближения потребуем, чтобы поле горизонтальной компоненты скорости $u(x, y)$ хотя бы раз изменило знак вдоль оси y (в формуле (12)) при каждом фиксированном значении x . Найдем начальное поле вертикальной скорости несжимаемой жидкости, используя интегральную формулу трапеции:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow v(x_n, y_m) = -\int_0^{y_m} \frac{\partial u}{\partial x}(x_n, y) dy \Leftrightarrow v(x_n, y_m) = -h_2 \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x}(x_n, y_m) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial u}{\partial x}(x_n, y_k) \right) =$$

$$= -h_2 \left(\frac{1}{2} \frac{u(x_{n+1}, y_m) - u(x_{n-1}, y_m)}{2h_1} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{u(x_{n+1}, y_k) - u(x_{n-1}, y_k)}{2h_1} \right), m = \overline{2, n_2 - 1}, n = \overline{1, n_1 - 1} \quad (13)$$

$$v(x_n, y_1) = -h_2 \frac{\partial u}{\partial x}(x_n, y_1), n = \overline{1, n_1 - 1}$$

Итерационные методы интегрирования гидродинамической задачи (11) для закрытой каверны описаны в работах [20,21,22],[39,40] с применением решения уравнения Пуассона за конечное число элементарных операций. В работе [22] и в данной работе все дифференциальные операторы аппроксимированы с 4 порядком погрешности $O(h^4)$. За исключением граничных значений вихря, которые зависят от граничных значений функции тока и скорости и имеют точность аппроксимации $O(h^2)$ [40,22,39]. Запишем граничные значения вихря на k+1 слое времени, они являются отдельной частью численного алгоритма решения задачи для закрытой каверны:

$$\begin{cases} w^{k+1}_{m,0} = \frac{7\psi^{k+1}_{m,0} - 8\psi^{k+1}_{m,1} + \psi^{k+1}_{m,2}}{2h_1^2} - 3\frac{v^{k+1}_{m,0}}{h_1}, m = \overline{1, n_2 - 1}, \\ w^{k+1}_{m,n_1} = \frac{7\psi^{k+1}_{m,n_1} - 8\psi^{k+1}_{m,n_1-1} + \psi^{k+1}_{m,n_1-2}}{2h_1^2} + 3\frac{v^{k+1}_{m,n_1}}{h_1}, m = \overline{1, n_2 - 1} \\ w^{k+1}_{0,n} = \frac{7\psi^{k+1}_{0,n} - 8\psi^{k+1}_{1,n} + \psi^{k+1}_{2,n}}{2h_2^2} + 3\frac{u^{k+1}_{0,n}}{h_2}, n = \overline{1, n_1 - 1} \\ w^{k+1}_{n_2,n} = \frac{7\psi^{k+1}_{n_2,n} - 8\psi^{k+1}_{n_2-1,n} + \psi^{k+1}_{n_2-2,n}}{2h_2^2} - 3\frac{u^{k+1}_{n_2,n}}{h_2}, n = \overline{1, n_1 - 1} \end{cases} \quad (14)$$

В данной работе, как и в работах [22,39] для построения поля линий тока по полю скорости использовалась линейная аппроксимация его значений в любой точке по значениям скорости в 4 узловых точках окружающей данную точку $(x_n, y_m), (x_{n+1}, y_m), (x_n, y_{m+1}), (x_{n+1}, y_{m+1}), x_n \leq x \leq x_{n+1}, y_m \leq y \leq y_{m+1}$:

$$\begin{cases} u(x, y) = \left(u_{m,n} \frac{(x_{n+1}-x)}{h_1} + u_{m,n+1} \frac{(x-x_n)}{h_1} \right) \frac{(y_{m+1}-y)}{h_2} + \left(u_{m+1,n} \frac{(x_{n+1}-x)}{h_1} + u_{m+1,n+1} \frac{(x-x_n)}{h_1} \right) \frac{(y-y_m)}{h_2} \\ v(x, y) = \left(v_{m,n} \frac{(x_{n+1}-x)}{h_1} + v_{m,n+1} \frac{(x-x_n)}{h_1} \right) \frac{(y_{m+1}-y)}{h_2} + \left(v_{m+1,n} \frac{(x_{n+1}-x)}{h_1} + v_{m+1,n+1} \frac{(x-x_n)}{h_1} \right) \frac{(y-y_m)}{h_2} \end{cases} \quad (15)$$

Дифференциал дуги линии тока определяется по найденному полю скоростей $u^{n_0}(x, y_m) \equiv u_{m,n}^{n_0}, v_{m,n}^{n_0}, m = \overline{1, n_2 - 1}, n = \overline{1, n_1 - 1}$ на конечном временном слое n_0 дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{u(x, y)} = \frac{dy}{v(x, y)} \quad (16)$$

Используя (15), (16), получим связь соседних точек линии тока (h_3 -дифференциал дуги линии тока - геометрический шаг, который не связан с шагом основной сетки кроме ограничений $h_3 < \min\{h_2, h_1\}$) по формуле

$$x^{l+1} = x^l + h_3 \frac{u(x, y)}{\sqrt{u(x, y)^2 + v(x, y)^2}}, y^{l+1} = y^l + h_3 \frac{v(x, y)}{\sqrt{u(x, y)^2 + v(x, y)^2}}, l = 1, 2, \dots \quad (17)$$

Рисунки поля линий тока получены программой с помощью формул (15), (16), (17).

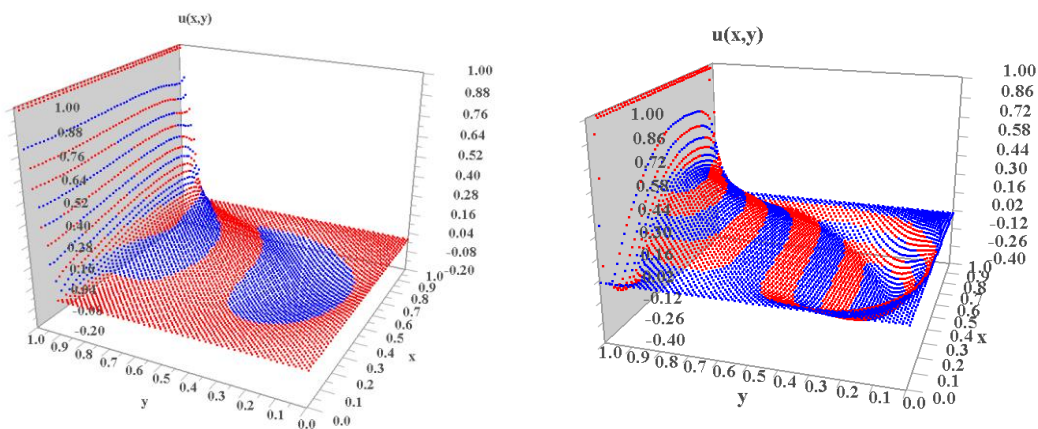


Рис.6. Поле горизонтальной скорости в открытой каверне с линейным профилем скорости в зазоре и шириной $\Delta = 1/10$ и закрытой каверне ($Re=1000$).

На рис. 6 показаны профили горизонтальной скорости для $Re=1000$, в стационарных состояниях (спустя $T=100$ безразмерных масштабов времени) для открытой каверны и закрытой каверны.

Важно подчеркнуть уменьшение гладкости поля скорости на верхнем отрезке закрытой каверны по сравнению с полем скорости в открытой каверне (Рис 6). Так как переход полярной сингулярности скорости в угловых точках каверны в скалярную сингулярность в задаче для открытой каверны увеличивает устойчивость численных алгоритмов.

Переходной режим в открытой каверне с линейным профилем горизонтальной скорости на границе зазора (Рис.2) проявляется в том, что к моменту $T=3$ у левой стенки образуется большой вертикально вытянутый вихрь, который разрушается к моменту $T=4$.

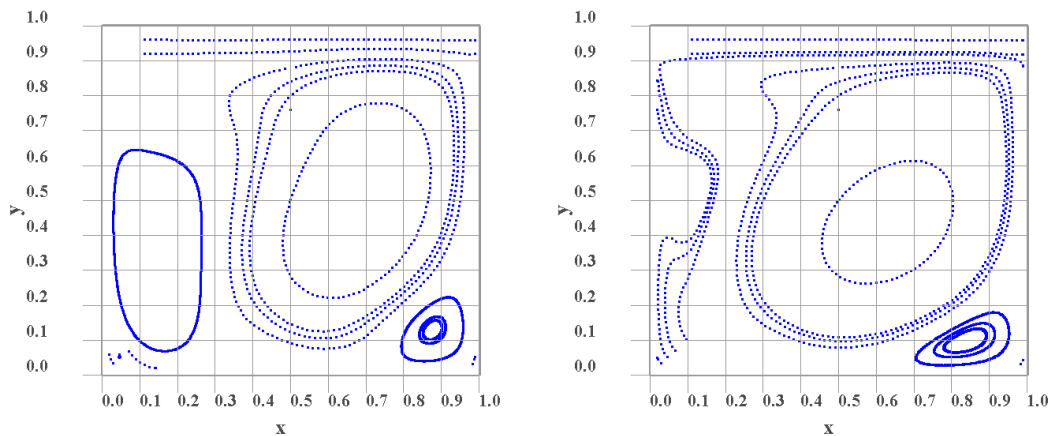


Рис.7. Поле линий тока в открытой каверне и шириной зазора $\Delta = 1/10$ с линейным профилем скорости в моменты $T=3$ и $T=4$ ($Re=1000$).

Аналогичный переходной режим происходит и в закрытой каверне (Рис.3) так, что к моменту $T=2$ вихрь у левой стенки, превосходящий по размерам вторичный нижний вихрь у правой стенки разрушается к моменту $T=3$.

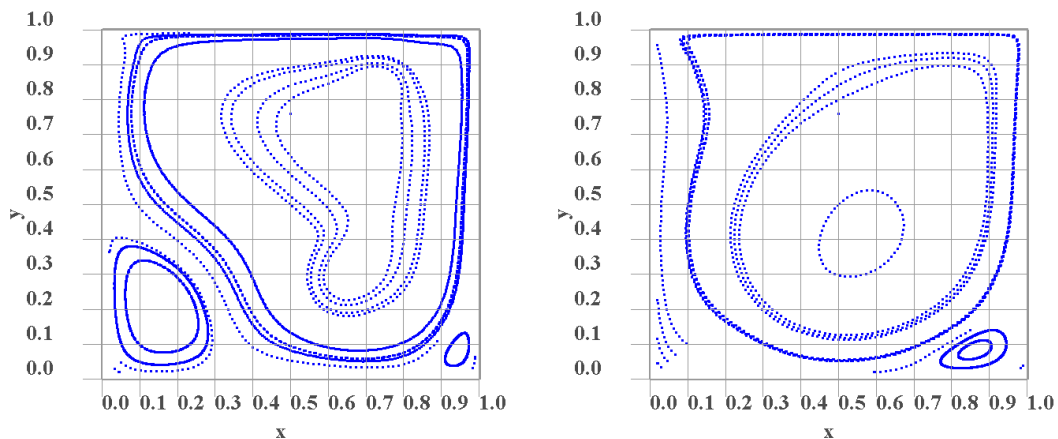


Рис.8. Поле линий тока в закрытой каверне в моменты $T=2$ и $T=3$ ($Re=1000$).

Отметим, что в работе Фоминых [23] переходной режим короче, чем в нашем алгоритме(5 масштабов), так как неподвижная жидкость в каверне разгоняется верхней крышкой за 1 масштаб времени (в закрытой каверне).

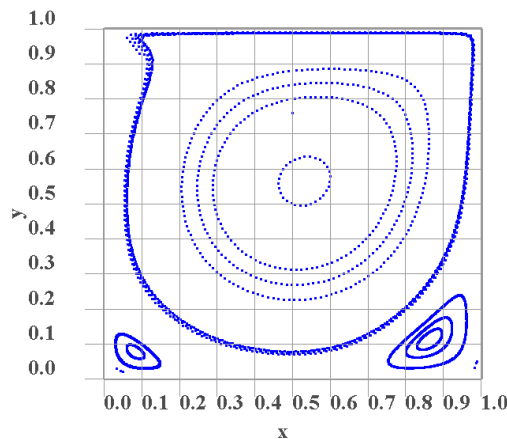


Рис.9. Поле линий тока в закрытой каверне в стационарном режиме в момент $T=100$ ($Re=1000$).

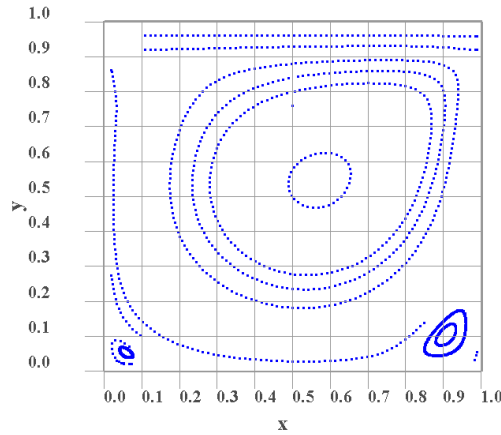


Рис.10. Поле линий тока в открытой каверне с линейным профилем скорости в зазоре и шириной зазора $\Delta = 1/10$ в момент $T=41$ ($Re=1000$).

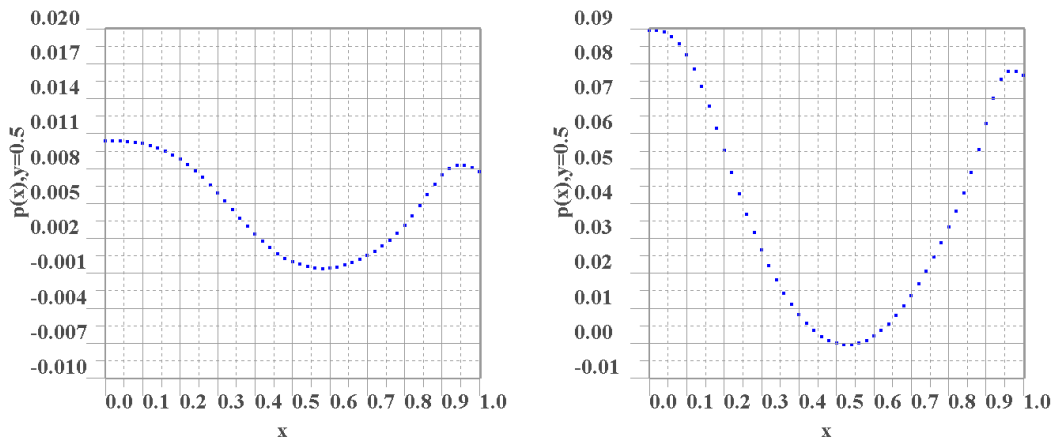


Рис.11. Профили давления на отрезке $y=0.5$ в открытой каверне с шириной зазора $\Delta = 1/10$ и закрытой каверне в момент времени $T=100$ ($Re=1000$).

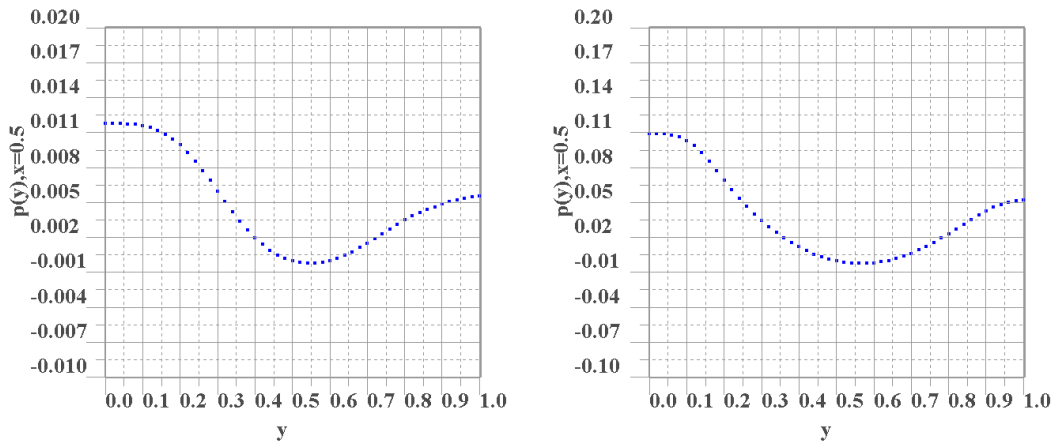


Рис.12. Профили давления на отрезке $x=0.5$ в открытой каверне с шириной зазора $\Delta = 1/10$ и закрытой каверне в момент времени $T=100$ ($Re=1000$).

Отметим, что графики давления на отрезках $y=0.5$, $x=0.5$ такие же по форме, как и в работе Фоминых[6] ($Re=10000$) для закрытой каверны. Однако сравнение профилей на рисунках 11,12 показывает, что колебание профиля давления в открытой каверне в несколько раз меньше колебания давления в закрытой каверне. Как следует из системы уравнений Навье - Стокса, градиент давления имеет компоненты в безразмерных уравнениях

$$\begin{cases} p_x = -u \cdot u_x - v \cdot u_y + \frac{1}{Re}(u_{xx} + u_{yy}) & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ p_y = -u \cdot v_x - v \cdot v_y + \frac{1}{Re}(v_{xx} + v_{yy}) & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \end{cases} \quad (18)$$

Как следует из формул(18) на элементах прямоугольной границы - дно, а также правая и левая стенки $u = v = 0, p_x|_{x=0} \approx 0, p_x|_{x=1} \approx 0, p_y|_{y=0} \approx 0$ при больших числах Рейнольдса. Что мы и видим на правой ($x=1$) и левой стенке ($x=0$) Рис.11 и на дне ($y=0$) левой части Рис.12.

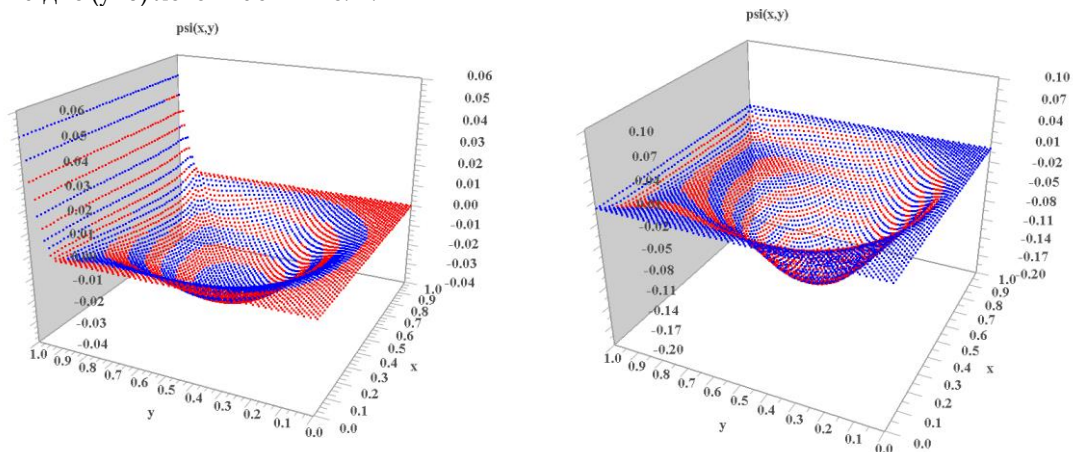


Рис.12. Поле функции тока в открытой каверне с линейным профилем скорости в зазоре с шириной зазора $\Delta = 1/10$ и закрытой каверне($Re=1000$).

Выражаем благодарность за интерес к результатам решения задачи для уравнений Навье -Стокса в 2009 году, который был высказан В.И. Арнольдом на конференции в г. Суздаль при обсуждении доклада по теме [38]. Однако решение такой задачи оказалось сложным, а формулы громоздкими.

Выражаем благодарность за интерес и полезные советы академика РАН В.П. Маслова, д. ф.-м.н. проф. В.Г. Данилову и д.ф.-м.н. проф. С.Ю. Доброхотову.

Литература:

1. F. Romano, H. C. Kuhlmann. Particle- boundary interaction in a shear-driven cavity flow. Theor. Comput. Fluid Dyn., 31:427-445, 2017.
2. J.Jong, F. Hussian On the identification of a vortex. J. Fluid. Mech.A study285:69-94, 1995.
3. T.W. Sheu, S.F. Tsai. Flow topology in a steady three -dimensional lid-driven cavity. Comp. Fluids 31:911-934, 2002.
4. U. Ghia, K.N. Ghia, C.T. Shen. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. J. Comput. Phys., 48: 387-411, 1982.
5. P.N. Shankar Slow viscous Flows. National Aerospace laboratories, India. 2007.
6. A. Salih. An Exact solutions of Navier-Stokes equation. Indian Institute of space science and technology. Thiruvanthapuman. 2011.
7. J.F. Scott. Moffatt-type flows in a trihedral cone. J. Fluid Mech. 725:446-461,2013.
8. W.W. Schultz, H.B. Keller, Drinev cavity flows by efficient numerical techniques. J.Comp. Phys., 49:310-333, 1983.
9. C.Kuhlmann, S.A. Albensoeder. Stability of steady three-dimensional lid-driven in a cube and the supercritical flowdynamics.Pyys.Fluids, 26(2)024104-1-024104-11, Feb. 2014, ISSN 1070-6631, 1089-7666.
10. J.M. Lopez, B.D.Welfert, K.Wu. Yalim, J. YalimTransition to the comp;ex dynamics in the cubic lid-driven cavity. Pyis. Rev. Fluids., 2:074401-1-074401-23, 2017.
11. J. C. Loiseau , J.C. Robinet, E. Leriche Intrmittency and transition to chaos in the cubical lid-driven cavity flow. Fluid Dyn. Res., 48(6) : 164-1421-1-061421-11, 2016.
12. P.D. Anderson, O.S. Galaktionov, G.W. Peters, F.N. van de Vosse,H.E. Meijer. Chaotic fluid mixing in non-quasi-static flows. Int. J. Head Fluid Flow, 21(2): 176+185, 2000, ISSN 0142-727X.
13. W.L. Chien, H.Rising, J. M. Ottino. Laminar mixing and chaotic mixing in several cavity flow. J. FFluid Mech. , 1700:355-377, 1986.
14. Hassan Aref. Chaotic advection of fluid Particles. Philosophical Transactions: Physical Sciences and Engineering. V. 333, No 1631, [http:// www.jstor.org/stable/53810](http://www.jstor.org/stable/53810).
- 15.Hendrik C. Kuhlmann, Franceasco Romano. The Lid-Driven cavity. [http:// www.resachgate.net](http://www.resachgate.net) > 324413434 , 2018.
- 16 .A. Straccia How to Solve a Classic CFD Benchmark: The Lid-Drivev Cavety Problem. [www.comsol.com/blogs/> howtosolve](http://www.comsol.com/blogs/howtosolve). May 2018.
17. A. Salih. Streamfunction - Vorticity Formulation. <http://www.iist.as.i> people> psi> omega>. 2013.
18. Goldstein S. On Laminnar Doundary -Layes Flow Near a Position Separation// Q.J. of Mechanics and Applied Mathematics, 1948 , (1) pp.43-69.
19. A. Salih Streamfunction - Vorticity Formulation//Department of Aerospace Engineering Indian Institute of Space Science and Technology, Thiruvananthapuram-Mach 2013. p.10.

20. Волосова Н.К. О конечных методах решения уравнения Пуассона на прямоугольнике с краевым условием Дирихле // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2020. – № 4. – С. 78–92.
21. Волосова Н.К. Модифицированное разностное уравнение К.Н. Волкова для уравнения Пуассона на прямоугольнике с шестым порядком погрешности // Евразийское Научное Объединение. – 2020. № 3-1 (61). С. 4-11.
22. Волосова Н.К. Вычисление поля давления по полю скорости в гидродинамической задаче для прямоугольной каверны // Евразийское Научное Объединение. – 2020. № 9-1 (67). С. 1-10.
23. Фомин А.А., Фомина Л.Н. Численное моделирование течения жидкости в плоской каверне при больших числах Рейнольдса. Вычислительная механика сплошных сред. 2014. Т.7. №4. С 363–377.
24. Л.Г. Лойцянский Механика жидкости и газа. Главная редакция Физматлит. «Наука», М. 1978 г.
25. А.А. Самарский введение в теорию разностных схем. М. Наука, 1971.
26. М.Ф. Кравченко, М.А. Басараб Булева Алгебра и методы аппроксимации в краевых задачах электродинамики. Физматлит. 2004.
27. Данилов В.Г., Гайдуков В.Г. Асимптотики решения задачи обтекание несжимаемой жидкостью поверхностей малыми неровностями при больших числах Рейнольдса., Асимптотики решений задач обтекания несжимаемой жидкостью поверхностей., 2016, том 15, номер 1, 5–102.
28. Альбом течений жидкости и газа . М. «МИР» , 1986 г.
29. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика.. М. ФИЗМАТЛИТ. 2006, 736с.
30. С. Мизохата Теория уравнений с частными производными. Под ред. О.А.Олейник М. МИР. 1977.
31. Куфнер А. Фучик С. Нелинейные дифференциальные уравнения. Под. Ред. Похожаева С.И. М. ФИЗМАТЛИТ. Наука, 1988.
32. О.А. Ладженская Шестая проблема тысячелетия : уравнения Навье–Стокса. УМН. 2003, том.58, вып. 2 (350) , с.48–78.
33. Бахвалов Н.С. Численные методы. Глав ред. Физ-мат. литерат. «Наука», М. 1973, 631с.
34. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. – М.: Наука, 1981. 399 с.
34. Андрианов И.В., Баранцев Р.Г., Маневич Л.И. Асимптотическая математика и синергетика. М. Едиториал. УРСС.2004 304с.
35. В.П. Маслов, В.Г. Данилов, К.А. Волосов. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса (эволюция диссипативных структур) С добавлением Н.А. Колобова, – М.:Наука, 1987, 352 с.
36. Danilov V. G., Maslov V. P., Volosov K. A. Mathematical Modelling of Heat and Mass Transfer Processes. Kluwer Academic publishers. Dordrecht. Boston. London, 1995. – 316 p.
37. Г.Н. Лазаренко. Предикаты кардиального риска у пациентов с аневризмой брюшного отдела аорты. Автореферат, канд. мед. наук. 2011г. Москва.
38. Волосов К.А. Конструкция решений квазилинейных уравнений с частными производными. Сибирский журнал индустриальной математики. 2008, т.11 н.2 (34), с.29–39
39. Волосова Н.К. О роли профиля скорости на верхнем отрезке в гидродинамической задаче для прямоугольной каверны // Евразийское Научное Объединение. – 2020. № 5-1 (63). С. 11-17.
40. A. Salih. Streamfunction - Vorticity Formulation // Department of Aerospace Engineering Indian Institute of Space Science and Technology, Thiruvananthapuram-Mach 2013. p.10.
41. Пастухов Д.Ф. Аппроксимация уравнения Пуассона на прямоугольнике повышенной точности / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 62–77.