www.esa-conference.ru

УДК 519.6

Вычисление производных дробного порядка явной квадратурной формулой Гаусса с двумя узлами

Волосова Н.К., аспирант
Московский государственный технический университета МГТУ им. Н.Э. Баумана
Волосов К.А., профессор, д.ф. - м.н., Волосова А.К. , к.ф.- м.н.
МИИТ, г. Москва
Пастухов Д.Ф., к. ф.-м. н., доц., Пастухов Ю.Ф., к. ф.-м. н., доц.
Полоцкий государственный университет

Получен алгоритм вычисления производной дробного порядка, принимающего значения с явной квадратурной формулой Гаусса на двух узлах (с относительной точностью REAL(4)).

Ключевые слова: *численное интегрирование функций с особенностями*, *численные методы, гамма-функция, ортогональные полиномы*

Calculation fractional derivatives by an axplicit Gauss quadrative formula with two nodes

Volosova N.K., Volosov K.A., Volosova A.K., Pastuhov D.F., Pastuhov Y.F.

Введение. Дробные производные появились в научных исследованиях несколько десятилетий назад. Приведем известные работы Нахушева А.М. [4], А.Н. Корчагиной[5]. В связи с этим представляют интерес нелинейные и квазилинейные уравнения дробного порядка[8],[9],[10],[11],[12],[13], использование уравнений эллиптического и гиперболического типов с частными производными дробного порядка[14],[15],[16],[17],[18],[19],[20],[21],[22]. Данная работа продолжает работу авторов[1] , но в отличие от нее для вычисления дробных производных получена ***явная*** квадратурная формула Гаусса с двумя узлами с предельной точностью REAL(4) (не менее 8 верных значащих цифр).

Постановка задачи

Рассмотрим задачу численного нахождения производной Капуто[1,3] дробного положительного порядка для значений из интервала (0,1):

$$\left(D_{0+,t}^{\alpha}u\right)(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{du(\tau)}{d\tau}\frac{d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}},\ n=1,0<\alpha<1 \quad (1)$$

Где в формуле (1) гамма-функции определяется интегралом

Определение 1(гамма-функция комплексного аргумента z).

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}t^{z-1}e^{t}dt, z\in C, \mathrm{Re}(z)>0 \quad (2)$$

Внутренней операцией в формуле (1) является вычисление первой производной в точке τ , внешней - взятие интеграла с сингулярным интегральным ядром $K(\tau,t)=\dfrac{1}{(t-\tau)^{\alpha}}$ в точке $\tau\to t$. Отметим, что из-за сингулярности невозможно использовать квадратурную интегральную формулу с равномерным шагом и узловым значением функции $\lim\limits_{\tau\to t}\dfrac{u'(t)}{(t-\tau)^{\alpha}}$ в точке $\tau\to t$. Далее с точностью до множителя $\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}$ разобьем интеграл(1) на два слагаемых. Интеграл и производную на левом отрезке[0,b] аппроксимируем с высоким 10-м порядком погрешности. А на отрезке[b,t] запишем явную квадратурную формулу Гаусса с весовой функцией $\rho(\tau)=K(\tau,t)=\dfrac{1}{(t-\tau)^{\alpha}}\geq 0$ с двумя узлами, не совпадающими с узлами равномерной сетки. В последнем интеграле сделаем замену переменной $z\big|_{t-b}^{0}=t-\tau\big|_{b}^{t}, dz=-d\tau$

$$I(u(t))\equiv\int_0^t\frac{u'(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}=\int_0^b\frac{u'(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}+\int_b^t\frac{u'(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}=\int_0^b\frac{u'(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}-\int_{t-b}^{0}\frac{u'(t-z)dz}{z^{\alpha}}=\int_0^b\frac{u'(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}+\int_0^{t-b}\frac{u'(t-z)dz}{z^{\alpha}} \quad (3)$$

Производную в формуле(3) можно заменить центральной производной с 10-м порядком погрешности и с равномерным шагом независимо от вычисления интегралов. Из формулы (3) следует, что функция $u(t)\in KC^1[0,t]$, то есть функция $u(t)$ непрерывна, кусочно-гладкая, но тогда $\exists I(u(t))\ \forall 0<\alpha<1$ в формуле(3).

Лемма 1. Первая центральная производная функции $u'(0)$ с десятым порядком погрешности на равномерной сетке имеет вид

$$u'(0)=\frac{1}{h}\left(\frac{5}{6}(u_1-u_{-1})-\frac{5}{21}(u_2-u_{-2})+\frac{5}{84}(u_3-u_{-3})-\frac{5}{504}(u_4-u_{-4})+\frac{1}{1260}(u_5-u_{-5})\right)+O\left(h^{10}\right) \quad (4)$$

Доказательство. Формула (4) методом неопределенных коэффициентов получена в работе[1]. Используя шаблон с 10 симметричными относительно центра узлами, включая центр, получим

Лемма 2. Составная интегральная квадратура с равномерным шагом и точностью $O\left(h^{12}\right)$ имеет вид

$$\int_a^b u(x)dx=5h\sum_{i=0}^{n}C_i u(x_i)+O\left(h^{12}\right), n=10m, h=\frac{b-a}{n}, m\in N \text{ ,где } (5)$$

$$C_i=\begin{cases}\frac{16067}{299376}, i=0\vee i=n\\ \frac{16067}{149688}, (i\equiv 0\bmod 10)\wedge(0<i<n)\\ \frac{26575}{74844}, (i\equiv 1\bmod 10)\vee(i\equiv 9\bmod 10)\\ \frac{-16175}{99792}, (i\equiv 2\bmod 10)\vee(i\equiv 8\bmod 10)\\ \frac{5675}{6237}, (i\equiv 3\bmod 10)\vee(i\equiv 7\bmod 10)\\ \frac{-4825}{5544}, (i\equiv 4\bmod 10)\vee(i\equiv 6\bmod 10)\\ \frac{17807}{12474}, i\equiv 5\bmod 10\end{cases} \quad (6)$$

Доказательство формул(5),(6) получено в работах[1,26].

Рассмотрим действие композиции производной функции и интеграла на простом примере[1] с использованием алгоритмов(4) и(5),(6). Пусть $u(x)=x^{15}$, тогда $u'(x)=15x^{14}$ и

$$I(t)=\int_0^t u'(\tau)d\tau=\int_0^t 15\tau^{14}d\tau=\tau^{15}\Big|_0^t=t^{15}, t=1, I(1)=\int_0^1 u'(\tau)d\tau=1$$

Программа с использованием алгоритмов(4) и(5),(6) для последнего примера даёт абсолютную погрешность

$$\Delta_n=\left|I_{num}(n)-I\right|, \Delta_{30}=\left|I_{num}(n=30)-I\right|=1.167193\cdot 10^{-10}, \Delta_{60}=\left|I_{num}(n=60)-I\right|=8.10463\cdot 10^{-14}$$

$$\Delta_{n=30}/\Delta_{n=60}=1.647193\cdot 10^{-10}/8.10463\cdot 10^{-14}\approx 2032\left(2^{10}<2032<2^{11}\right)$$

Данный пример подтверждает, что порядок аппроксимации композиции функций равен наименьшему из порядков[2]. Алгоритм(4), (5),(6) на равномерной сетке мы используем для вычисления первого слагаемого в формуле(3) $I_1=\int_0^b \frac{u'(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}$. Для вычисления второго интеграла в (3) $\int_0^{t-b}\frac{u'(t-z)dz}{z^{\alpha}}$ рассмотрим вспомогательный интеграл $I_2=\int_0^{t-b}\frac{u(t-z)dz}{z^{\alpha}}$, более того, добавим под аргумент функции параметр а:

$$I_2(b,t,a,\alpha)=\int_0^{t-b}\frac{u(t+a-z)dz}{z^{\alpha}} \quad (7)$$

Параметр а в программе принимает значения $a=\{-5h,-4h,-3h,-2h,-h,h,2h,3h,4h,5h\}$ и используется для вычисления центральной производной в интеграле(3). Далее для неотрицательной весовой функции $\rho(z)=\frac{1}{z^{\alpha}}\geq 0$ на отрезке $[0,t-b]$ нужно найти квадратурную формулу Гаусса [2,стр.45] с двумя узлами.

Теорема 1. Пусть функция $u(t)\in KC^1[0,t]$. Тогда квадратура Гаусса с двумя узлами для интеграла (7) с неотрицательной весовой функцией $\rho(z)=\frac{1}{z^{\alpha}}\geq 0, z\in[0,t-b]$ имеет вид

$$\int_0^{t-b}\frac{u(t+a-z)dz}{z^\alpha}=\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}\left(1-\frac{\alpha}{(2-\alpha)\sqrt{2(2-\alpha)/(3-\alpha)}}\right)\cdot u\left(\frac{t}{(4-\alpha)}\left(2-\sqrt{\frac{2(2-\alpha)}{(3-\alpha)}}\right)+a+\frac{b}{(4-\alpha)}\left(2-\alpha+\sqrt{\frac{2(2-\alpha)}{(3-\alpha)}}\right)\right)+$$

$$+\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}\left(1+\frac{\alpha}{(2-\alpha)\sqrt{2(2-\alpha)/(3-\alpha)}}\right)\cdot u\left(\frac{t}{(4-\alpha)}\left(2+\sqrt{\frac{2(2-\alpha)}{(3-\alpha)}}\right)+a+\frac{b}{(4-\alpha)}\left(2-\alpha-\sqrt{\frac{2(2-\alpha)}{(3-\alpha)}}\right)\right)+O\left((t-b)^4\right)(8)$$

Доказательство. Построим[2,стр.45] ортогональный полином $P_2(z)=z^2+b_1z+c, z\big|_{t-b}^{0}=t-\tau\big|_b^t\geq 0$ с 2 узлами и с весовой функцией $\rho(z)=\frac{1}{(z)^\alpha}\geq 0, z\in[0,t-b], t>b$ с системой двух уравнений

$$\begin{cases}\int_0^{t-b}\rho(z)P_2(z)dz=0\Leftrightarrow\int_0^{t-b}\frac{z^2+b_1z+c}{z^\alpha}dz=0\\ \int_a^{t-b}\rho(z)P_2(z)zdz=0\Leftrightarrow\int_0^{t-b}\frac{\left(z^2+b_1z+c\right)z}{z^\alpha}dz=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{(t-b)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)}+b_1\frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}+c\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}=0\\ \frac{(t-b)^{4-\alpha}}{(4-\alpha)}+b_1\frac{(t-b)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)}+c\frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\frac{(t-b)^2}{(3-\alpha)}+b_1\frac{(t-b)}{(2-\alpha)}+\frac{c}{(1-\alpha)}=0\cdot\left(\frac{1}{(2-\alpha)}\right)\\ \frac{(t-b)^2}{(4-\alpha)}+b_1\frac{(t-b)}{(3-\alpha)}+\frac{c}{(2-\alpha)}=0\cdot\left(\frac{1}{(1-\alpha)}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{(t-b)^2}{(3-\alpha)(2-\alpha)}+b_1\frac{(t-b)}{(2-\alpha)^2}+\frac{c}{(1-\alpha)(2-\alpha)}=0\\ \frac{(t-b)^2}{(4-\alpha)(1-\alpha)}+b_1\frac{(t-b)}{(3-\alpha)(1-\alpha)}+\frac{c}{(2-\alpha)(1-\alpha)}=0\end{cases}\quad(9)$$

В системе уравнений(9) из второго вычтем первое, получим

$$b_1(t-b)\left(\frac{1}{(1-\alpha)(3-\alpha)}-\frac{1}{(2-\alpha)^2}\right)=(t-b)^2\left(\frac{1}{(2-\alpha)(3-\alpha)}-\frac{1}{(1-\alpha)(4-\alpha)}\right)\Leftrightarrow(t>b)$$

$$\Leftrightarrow b_1\left(\frac{4-4\alpha+\alpha^2-\left(3-4\alpha+\alpha^2\right)}{(1-\alpha)(3-\alpha)(2-\alpha)^2}\right)=(t-b)\left(\frac{4-5\alpha+\alpha^2-\left(6-5\alpha+\alpha^2\right)}{(2-\alpha)(3-\alpha)(1-\alpha)(4-\alpha)}\right)\Leftrightarrow b_1=-2(t-b)\frac{(2-\alpha)}{(4-\alpha)}\quad(10)$$

Подставляя(10) в первое уравнение системы(9) выразим коэффициент c

$$c=-(1-\alpha)\left(\frac{(t-b)^2}{(3-\alpha)}+b_1\frac{(t-b)}{(2-\alpha)}\right)=-(1-\alpha)(t-b)^2\left(\frac{1}{(3-\alpha)}-\frac{2}{(4-\alpha)}\right)=\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)(t-b)^2}{(3-\alpha)(4-\alpha)}\quad(11)$$

С учетом формул(10),(11) запишем ортогональный полином и найдем его корни. Так как согласно теореме Гаусса [2,стр.45] , если корни ортогонального полинома степени n с неотрицательной весовой функцией на отрезке взяты в качестве узлов квадратурной формулы Гаусса, то квадратура точна для всех многочленов степени не выше чем 2n-1, а погрешность имеет вид $O\left(h^{2n}\right)$.

$P_2(z)=z^2+b_1z+c=0\Leftrightarrow z^2-2(t-b)\frac{(2-\alpha)}{(4-\alpha)}z+\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)(t-b)^2}{(3-\alpha)(4-\alpha)}=0$. Откуда корни многочлена

$$z_{1,2}=(t-b)\frac{(2-\alpha)}{(4-\alpha)}\pm(t-b)\sqrt{\frac{(2-\alpha)^2}{(4-\alpha)^2}-\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{(3-\alpha)(4-\alpha)}}=(t-b)\left(\frac{(2-\alpha)}{(4-\alpha)}\pm\sqrt{\frac{(2-\alpha)}{(4-\alpha)}\left(\frac{(2-\alpha)}{(4-\alpha)}-\frac{(1-\alpha)}{(3-\alpha)}\right)}\right)=$$

$$=(t-b)\left(\frac{(2-\alpha)}{(4-\alpha)}\pm\sqrt{\frac{(2-\alpha)}{(4-\alpha)}\left(\frac{6-5\alpha+\alpha^2-(4-5\alpha+\alpha^2)}{(4-\alpha)(3-\alpha)}\right)}\right)=\frac{(t-b)}{(4-\alpha)}\left(2-\alpha\pm\sqrt{\frac{2(2-\alpha)}{(3-\alpha)}}\right)\quad(12)$$

Возвращаясь к аргументу функции $u(t+a-z)$ в левой части формулы(8), имеем

$$t+a-z_{1,2}=t+a-\frac{(t-b)}{(4-\alpha)}\left(2-\alpha\pm\sqrt{\frac{2(2-\alpha)}{(3-\alpha)}}\right)=a+\frac{t}{(4-\alpha)}\left(2\mp\sqrt{\frac{2(2-\alpha)}{(3-\alpha)}}\right)+\frac{b}{(4-\alpha)}\left(2-\alpha\pm\sqrt{\frac{2(2-\alpha)}{(3-\alpha)}}\right)\quad(13)$$

Теперь методом неопределенных коэффициентов определим веса в квадратурной формуле

$$\begin{cases}1.u(t+a-z)\equiv 1:\int_0^{t-b}\frac{u(t+a-z)dz}{z^\alpha}=\int_0^{t-b}\frac{dz}{z^\alpha}=\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}=C_1+C_2\\ 2.u(t+a-z)=t+a-z:\int_0^{t-b}\frac{(t+a-z)dz}{z^\alpha}=(t+a)\int_0^{t-b}\frac{dz}{z^\alpha}-\int_0^{t-b}\frac{zdz}{z^\alpha}=(t+a)\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}-\frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}\end{cases}\Leftrightarrow(14)$$

$$\begin{cases}C_1+C_2=\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}\\ C_1x_1+C_2x_2=(t+a)\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}-\frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}=(t-b)^{2-\alpha}\left(\frac{1}{1-\alpha}-\frac{1}{2-\alpha}\right)+(a+b)\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}=\frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}+(a+b)\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}\end{cases}$$

Упростим второе уравнение с использованием первого уравнения последней системы

$$C_1x_1+C_2x_2=C_1\left(a+\frac{t}{(4-\alpha)}\left(2-\sqrt{\frac{2(2-\alpha)}{(3-\alpha)}}\right)+\frac{b}{(4-\alpha)}\left(2-\alpha+\sqrt{\frac{2(2-\alpha)}{(3-\alpha)}}\right)\right)+C_2\left(a+\frac{t}{(4-\alpha)}\left(2+\sqrt{\frac{2(2-\alpha)}{(3-\alpha)}}\right)+\frac{b}{(4-\alpha)}\left(2-\alpha-\sqrt{\frac{2(2-\alpha)}{(3-\alpha)}}\right)\right)=$$

$$(C_1+C_2)\left(a+\frac{2t}{(4-\alpha)}+\frac{(2-\alpha)b}{(4-\alpha)}\right)+(C_2-C_1)\left(\frac{(t-b)}{(4-\alpha)}\sqrt{\frac{2(2-\alpha)}{(3-\alpha)}}\right)=\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}\left(a+\frac{2t}{(4-\alpha)}+\frac{(2-\alpha)b}{(4-\alpha)}\right)+(C_2-C_1)\left(\frac{(t-b)}{(4-\alpha)}\sqrt{\frac{2(2-\alpha)}{(3-\alpha)}}\right)=$$

$$=\frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}+(a+b)\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}\Leftrightarrow\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}\left(a+\frac{2t}{(4-\alpha)}+\frac{(2-\alpha)b}{(4-\alpha)}\right)+(C_2-C_1)\left(\frac{(t-b)}{(4-\alpha)}\sqrt{\frac{2(2-\alpha)}{(3-\alpha)}}\right)=\frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}+(a+b)\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}\left(-b+\frac{2t}{(4-\alpha)}+\frac{(2-\alpha)b}{(4-\alpha)}\right)+(C_2-C_1)\left(\frac{(t-b)}{(4-\alpha)}\sqrt{\frac{2(2-\alpha)}{(3-\alpha)}}\right)=\frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}\left(\frac{2(t-b+b)}{(4-\alpha)}+\frac{(-2)b}{(4-\alpha)}\right)+(C_2-C_1)\left(\frac{(t-b)}{(4-\alpha)}\sqrt{\frac{2(2-\alpha)}{(3-\alpha)}}\right)=\frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(1-\alpha)}\left(\frac{2}{(4-\alpha)}-\frac{1}{(2-\alpha)}\right)+(C_2-C_1)\left(\frac{(t-b)}{(4-\alpha)}\sqrt{\frac{2(2-\alpha)}{(3-\alpha)}}\right)=0\Leftrightarrow\frac{\alpha(t-b)^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}=(C_2-C_1)\left((t-b)\sqrt{\frac{2(2-\alpha)}{(3-\alpha)}}\right)\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow(C_2-C_1)=\dfrac{\alpha(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}\sqrt{\dfrac{(3-\alpha)}{2(2-\alpha)}}$. Получим систему двух линейных уравнений относительно C_1,C_2

$$\begin{cases}C_1+C_2=\dfrac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}\\(C_2-C_1)=\dfrac{\alpha(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}\sqrt{\dfrac{(3-\alpha)}{2(2-\alpha)}}\end{cases}\quad(15)$$

Складывая оба уравнения(15) и деля пополам получим

$$C_2=\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}\left(1+\frac{\alpha}{(2-\alpha)}\sqrt{\frac{(3-\alpha)}{2(2-\alpha)}}\right)\quad(16)$$

А из первого уравнения(15) выразим

$$C_1=\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}-C_2=\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}\left(1-\frac{\alpha}{(2-\alpha)}\sqrt{\frac{(3-\alpha)}{2(2-\alpha)}}\right)\quad(17)$$

Окончательно подставив значения C_1,C_2,x_1,x_2 из(13),(16),(17) в квадратуру Гаусса, получим формулу(8)

$$\int_0^{t-b}\frac{u(t+a-z)dz}{z^\alpha}=\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}\left(1-\frac{\alpha}{(2-\alpha)\sqrt{2(2-\alpha)/(3-\alpha)}}\right)\cdot u\left(\frac{t}{(4-\alpha)}\left(2-\sqrt{\frac{2(2-\alpha)}{(3-\alpha)}}\right)+a+\frac{b}{(4-\alpha)}\left(2-\alpha+\sqrt{\frac{2(2-\alpha)}{(3-\alpha)}}\right)\right)+$$

$$+\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}\left(1+\frac{\alpha}{(2-\alpha)\sqrt{2(2-\alpha)/(3-\alpha)}}\right)\cdot u\left(\frac{t}{(4-\alpha)}\left(2+\sqrt{\frac{2(2-\alpha)}{(3-\alpha)}}\right)+a+\frac{b}{(4-\alpha)}\left(2-\alpha-\sqrt{\frac{2(2-\alpha)}{(3-\alpha)}}\right)\right)+O\left((t-b)^4\right)$$

Теорема 1 доказана. Заметим, что от параметра а весовые коэффициенты не зависят.

Замечание 1. В формуле(3) два слагаемых имеют точность $O(h^{10})$ и $O(h^4)$. По свойству "О большое"[28] $O(h^{10})+O(h^4)=O(h^4)$. Однако, при числе интервалов n=1000000 в первом интеграле может сказаться суммарная погрешность от вычисления каждого узлового значения функции, что увеличит конечную минимально возможную предельную погрешность всей формулы(3) при больших значениях n. Оценим порядок погрешности алгоритма(4),(5),(6),(8) при вычислении двух интегралов в формуле(3) . При малых n, $f(\tau)=\tau^{10},t=1,\alpha=1/2$

$$\Delta=|I_{num}-I|,\Delta_{30}=|I_{num}(n=30)-I|=8.326\cdot10^{-6},\Delta_{60}=|I_{num}(n=60)-I|=1.319\cdot10^{-7}$$

$\Delta_{n=30}/\Delta_{n=60}=8.326\cdot10^{-6}/1.319\cdot10^{-7}\approx63.12>16=2^4$. То есть порядок погрешности не менее 4.

Используем почленное дифференцирование дробного порядка, для чего разложим функцию в ряд Тейлора в нуле[1] $\forall0<\alpha<1$.

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)t^n}{\Gamma(n+1)}\Rightarrow\left(D_{0+,t}^{\alpha}f\right)(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)t^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1)}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\alpha)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)t^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)}\quad(18)$$

Для функции $f(t)=\sin(t),\ f^{(n=2k+1)}(0)=(-1)^k$ согласно формуле(18)

$$\left(D_{0+,t}^{\alpha}\sin(t)\right)(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)t^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k+1-\alpha}}{\Gamma(2k+2-\alpha)}=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k+1-\alpha}}{\prod_{i=1}^{2k+1}(i-\alpha)}\quad(19)$$

В таблице 1 для функции $f(t)=\sin(t), t=3, \alpha=\{0.1;0.2,\ldots,0.9\}$ первый столбец – точное значение производной Капуто, второй – численное её значение, последний – разность значений первого и второго столбцов.

Таблица 1. Производная Капуто для функции $f(t)=\sin(t), t=3, \alpha=\{0.1;0.2,\ldots,0.9\}$

α	$\left(D_{0+,t}^{\alpha}\sin(t)\right)(t=3)$	$\left(D_{0+,t}^{\alpha}\sin(t)\right)_{num}(t=3)$	$\Delta\left(D_{0+,t}^{\alpha}\sin(t)\right)(t=3)$
0.1	-3.952818237E-002	-3.952818237E-002	-3.377534363E-012
0.2	-0.210523575666923	-0.210523575646306	-2.061700810E-011
0.3	-0.369597760040208	-0.369597759944760	-9.5448537962E-011
0.4	-0.514577377794408	-0.514577377403128	-3.912806745E-010
0.5	-0.643428874179188	-0.643428872684715	-1.494473766E-009
0.6	-0.754303725557392	-0.754303720115184	-5.442207351E-009
0.7	-0.845583153631469	-0.845583134510012	-1.912145697E-008
0.8	-0.915921246732911	-0.915921181477879	-6.5255031822E-008
0.9	-0.964285343843524	-0.964285126728259	-2.171152655E-007

В программе на языке FORTRAN переменные и функции двойной точности. Первый интеграл в(3) вычисляется подпрограммой subroutine integral(h,h2,alpfa,b,t,m,int1), второй подпрограммой subroutine fun(t,h,alpfa,a,b,res1), гамма-функция вызовом dgamma(1d0-alpfa) из библиотеки dfimsl . Вычисляется производная Капуто для функции $f(t)=\sin(t), t=3, \alpha=\{0.1;0.2,\ldots,0.9\}$ с алгоритмом (4),(5),(6),(8).

```
program kaputo;use dfimsl;integer(8),parameter::n=100000,m=n*10;integer(8)::i,k,j;
real(8)::t,t0,alpfa,h,res1,r1,r2,r3,r4,kap,res2,pi,fd(4),a;real(8)::r5,r6,r7,r8,r9,r10,c1,c2,xx(4,2),ff(4,2),x1,x2,f1,f2;real(8)::
a1,a2,s1,s2,b,int1,h2,kap1,kap2,g,s,l;t0=3d0;do j=1,9;
alpfa=(1d-1)*dfloat(j);h=t0/dfloat(m+10);pi=2d0*asin(1d0);res2=dgamma(1d0-alpfa);s=0d0;do k=0,100; g=res2;do
i=1,2*k+1;g=g*(dfloat(i)-alpfa);enddo;l=(-1d0)**dfloat(k);s=s+l*(t0**(dfloat(2*k+1)-alpfa))/g;
enddo;t=t0;b=t-10d0*h;h2=1d-2;print*,t,h,alpfa,b,(t-b)/h;t=t0;a=-h2;call fun(t,h,alpfa,a,b,res1);r1=res1;
t=t0;a=h2;call fun(t,h,alpfa,a,b,res1);r2=res1;t=t0;a=-2d0*h2;call fun(t,h,alpfa,a,b,res1);r3=res1;t=t0;a=2d0*h2;
call fun(t,h,alpfa,a,b,res1);r4=res1;t=t0;a=-3d0*h2;call fun(t,h,alpfa,a,b,res1);r5=res1;t=t0;a=3d0*h2;
call fun(t,h,alpfa,a,b,res1);r6=res1;t=t0;a=-4d0*h2; call fun(t,h,alpfa,a,b,res1);r7=res1;t=t0;a=4d0*h2;
call fun(t,h,alpfa,a,b,res1); r8=res1;t=t0;a=-5d0*h2; call fun(t,h,alpfa,a,b,res1); r9=res1;t=t0;a=5d0*h2; call
fun(t,h,alpfa,a,b,res1);r10=res1;call dif(h2,r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9,r10,kap);kap2=kap;
call integral(h,h2,alpfa,b,t,m,int1);kap1=kap+int1;kap=kap1/res2;open(1, file='1.txt');1 write(1,*) "alpfa=",alpfa;2
write(1,*) s,kap,s-kap ,(s-kap)/kap;print*,s,kap,s-kap,(s-kap)/kap;enddo;end program kaputo;
subroutine fun(t,h,alpfa,a,b,res1); real(8)::s1,s2,s3,s4,s5,s6,t,h,alpfa,res,a,b; real(8)::c1,c2,c3,x,f,res1,tb,kor;
real(8)::b1,c,d,p1,r,p,q,fi,pi;real(8)::x1,x2,x3,y1,y2,y3,s;f(x)=dsin(x);
s=t-b;s1=1d0-alpfa;s2=2d0-alpfa;s3=3d0-alpfa;s4=4d0-alpfa;y1=(s**s1)/(2d0*s1);y2=1d0-
alpfa/(s2*dsqrt(2d0*s2*s3));y3=1d0+alpfa/(s2*dsqrt(2d0*s2*s3));x1=(t/s4)*(2d0-
dsqrt(2d0*s2/s3))+a+(b/s4)*(s2+dsqrt(2d0*s2/s3));
x2=(t/s4)*(2d0+dsqrt(2d0*s2/s3))+a+(b/s4)*(s2-
dsqrt(2d0*s2/s3));c1=y1*y2*f(x1)+y1*y3*f(x2);res=c1;res1=res;end subroutine;
subroutine integral(h,h2,alpfa,b,t,m,int1);integer(8)::i,m;real(8)::h,alpfa,b,t,f,ff,tau,a,s;
real(8)::int1,h2,c1,c2,c3,c4,c5,c0,c6;real(8)::f1,f2,f3,f4,f5,f6,f7,f8,f9,f10;
real(8)::x1,x2,x3,x4,x5,kap;f(tau)=dsin(tau);ff(a,t,tau)=f(tau+a)/(t-
tau)**alpfa;c0=16067d0/299376d0;c1=16067d0/149688d0;c2=26575d0/74844d0; c3=-16175d0/99792d0;
c4=5675d0/6237d0; c5=-4825d0/5544d0;c6=17807d0/12474d0;x1=5d0/6d0;x2=-5d0/21d0;x3=5d0/84d0; x4=-
5d0/504d0; x5=1d0/1260d0; s=0d0;do i=0,m;tau=h*dfloat(i);f1=ff(-h2,t,tau);f2=ff(h2,t,tau); f3=ff(-
2d0*h2,t,tau);f4=ff(2d0*h2,t,tau);
f5=ff(-3d0*h2,t,tau);f6=ff(3d0*h2,t,tau);f7=ff(-4d0*h2,t,tau); f8=ff(4d0*h2,t,tau);
f9=ff(-5d0*h2,t,tau);f10=ff(5d0*h2,t,tau); kap=(x1*(f2-f1)+x2*(f4-f3)+x3*(f6-f5)+x4*(f8-f7)+x5*(f10-
f9))/h2;if(mod(i,10)==4.or.mod(i,10)==6)then; s=s+kap*c5;elseif(mod(i,10)==3.or.mod(i,10)==7)then;
s=s+kap*c4;elseif(mod(i,10)==2.or.mod(i,10)==8)then;s=s+kap*c3;elseif(mod(i,10)==1.or.mod(i,10)==9)then;s=s+ka
p*c2;elseif(mod(i,10)==5)then;
s=s+kap*c6;elseif(mod(i,10)==0.and.i>0.and.i<m)then;s=s+kap*c1;elseif(i==0.or.i==m)then;s=s+kap*c0;en-
dif;enddo;int1=s*5d0*h;end subroutine;
subroutine dif(h2,r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9,r10,kap);
real(8)::r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9,r10,kap,h2;real(8)::c1,c2,c3,c4,c5;c1=5d0/6d0;c2=-5d0/21d0;c3=5d0/84d0;c4=-
5d0/504d0;c5=1d0/1260d0;kap=(c1*(r2-r1)+c2*(r4-r3)+c3*(r6-r5)+c4*(r8-r7)+c5*(r10-r9))/h2;end subroutine;
```

В примере почленного дробного дифференцирования(19) использовано 100 первых слагаемых ряда для тестирования алгоритма (4),(5),(6),(8). Сохраняются ли интегральные инварианты в динамических системах с уравнениями и производными дробного порядка аналогично инвариантам в системах[23],[24],[25]? Необходимо исследовать вопрос о возможности применения уравнения Пуассона дробного порядка для шифрования QR-кодов в работах[14],[15],[22] и в гидродинамике[6],[7],[29]. Необходимо создать ***отечественные программы*** с использованием дробных производных для решения задач по уравнениям математической физики как в работе[27].

Литература:

1. Волосова Н.К. Вычисление производных дробного порядка с высокой степенью точности// Евразийское Научное Объединение. – 2020. № 11-1 (69). С. 1-9.
2. Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2010.240 с.
3. Килбас А.А. Теория и приложения дифференциальных уравнений дробного порядка. Курс лекций – Самара. : Научная конференция "Математическая физика и нанотехрологии".2009. 121С.
4. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 272 с.
5. Корчагина А.Н. Использование производных дробного порядка для решения задач механики сплошных сред/ А.Н. Корчагина// Математика и механика. 2010. С. 65-67.
6. Волосова Н.К. О роли профиля скорости на верхнем отрезке в гидродинамической задаче для прямоугольной каверны // Евразийское Научное Объединение. – 2020. № 5-1 (63). С. 11-17.
7. Волосова Н.К. Вычисление поля давления по полю скорости в гидродинамической задаче для прямоугольной каверны // Евразийское Научное Объединение. – 2020. № 9-1 (67). С. 1-8.
8. Волосова Н.К., Волосова А.К., Волосов К.А. Интегрирование уравнений Гарри Дима и Кортевега де Вриза в параметрической форме. Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2017. № 4. С. 194-214.
9. Вакуленко С.П., Волосов К.А., Волосова Н.К. К методу оценки состояния железнодорожного полотна//Мир транспорта. 2016. Т14. № 3(64) С. 20-35.
10. Вдовина Е.К. , Пугина Л.В., Волосов К.А. Моделирование пульсирующих режимов динамики свертывания крови//Математическое моделирование. 2014. Т. 26. № 12. С. 14-32.
11. Волосов К.А.,Пугина Л.В., Волосова А.К. Нелинейные уравнения как система линейных функциональных уравнений//Математический форум (Итоги науки. Юг России). 2014. Т. 8. № 2. С. 93-104.
12. Вдовина Е.К., Волосов К.А. Моделирование спиральных волн в процессе свертывания крови// Математическое моделирование. 2013. Т. 25. № 3. С. 14-24.
13. Волосов К.А. Конструкция решений квазилинейных уравнений с частными производными//Сибирский журнал индустриальной математики. – 2008 . Т.11. № 2(34). С.29-39.
14. Вакуленко С.П., Волосова Н.К., Пастухов Д.Ф. Способы передачи QR-кода в стеганографии/ С.П. Вакуленко, Н.К. Волосова, Д.Ф. Пастухов //Мир транспорта. – 2018. Т.16. № 5(78). С. 14-25.
15. Пастухов Д.Ф., Волосова Н.К., Волосова А.К. Некоторые методы передачи QR-кода в стеганографии/ Д.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова, А.К. Волосова //Мир транспорта. – 2019. Т.17. № 3(82). С. 16-39.
16. Пастухов Д.Ф. Аппроксимация уравнения Пуассона на прямоугольнике повышенной точности/Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов//Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2017. - № 12. – С. 62-77.
17. Волосова Н.К. О конечных методах решения уравнения Пуассона на прямоугольнике с краевым условием Дирихле/ Волосова Н.К. и др.//Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2020. - № 4. – С. 78-92.
18. Волосова Н.К. Модифицированное разностное уравнение К.Н. Волкова для уравнения Пуассона на прямоугольнике с четвертым порядком погрешности// Евразийское Научное Объединение. –2019. № 6-1 (52). С. 4-11.
19. Волосова Н.К. О решении уравнения Пуассона на прямоугольнике с шестым порядком погрешности за конечное число элементарных операций// Евразийское Научное Объединение. –2020. № 3-1 (61). С. 20-27.
20. Пастухов Д.Ф. К вопросу о редукции неоднородной краевой задачи Дирихле для волнового уравнения на отрезке / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2018. – № 12. – С. 60-74.
21. Пастухов Д.Ф. Минимальная разностная схема для уравнения Пуассона на параллелепипеде с шестым порядком погрешности/ Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2019. – № 4. – С. 154–173.
22. Волосова Н.К. Решение уравнения Пуассона в целых числах по модулю р с кусочно-разрывной правой частью// Евразийское Научное Объединение. – 2019. № 1-1 (47). С. 4-9.
23. Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф. Об интегралах обобщенной энергии на экстремалях системы уравнений Эйлера-Лагранжа/ Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2020. – № 4. – С. 93–107.
24. Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф. Обратная теорема Гамильтона/ Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2019. – № 12. – С. 86–100.
25. Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф. Свойства функции Гамильтона в вариационных задачах со старшими производными/ Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2019. – № 4. – С. 137–153.
26. Аппроксимация двойных и тройных интегралов в математической физике/ Д.Ф. Пастухов [и др.] // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 62–77.

27. Кристалинский В.Р., Кристалинский Р.Е. О решении задач математической физики в системе WOLFRAM MATHEMATICA//Современные информационные технологии и ИТ-образование. Т 15. № 4. 2019. С. 981-991.

28. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу//Издательство Московского университета. 2005. 560 с.

29. Волосова Н.К. Возможные виды течения в закрытой каверне и противоречия в задаче с подвижной крышкой// Евразийское Научное Объединение. – 2020. № 12-1 (70). С. 4-14.