УДК 528.063

ОПТИМИЗАЦИЯ КАЧЕСТВА ПОСТРОЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ МЕТОДАМИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

канд. техн. наук, доц. Л.А. ЧЕРКАС, Е.В. ГРИЩЕНКОВ
(Полоцкий государственный университет)

Применены известные методы нелинейного программирования (Якоби, Коши, Ньютона и релаксации) для минимизации величины относительной обусловленности, характеризующей качество построения геодезических сетей.

Известно, что автоматизация проектирования геодезических сетей на ЭВМ осуществляется путем минимизации целевой функции, в качестве которой принимают либо ошибку положения пунктов в слабом месте построения геодезических сетей, либо определитель матрицы нормальных уравнений, либо одно из известных чисел обусловленности. Но вместо числа обусловленности можно использовать относительную обусловленность (Ψ), на которую удалось найти её допустимые значения в зависимости от класса геодезического построения.

С помощью величины Ψ сопоставляются обусловленности для реальных сетей с обусловленностью для симметричных сетей с одним и тем же количеством определяемых пунктов.

При анализе величины Ψ для различных геодезических построений установлено, что:

1) самыми надежными по качеству построения являются линейно-угловые сети, затем сети трилатерации и триангуляции;

2) чем ближе проектируемая сеть к сплошной сети, тем выше качество её построения;

3) значение относительной обусловленности Ψ уменьшается, если исходные пункты находятся в центре симметрии сети;

4) чем больше в геодезической сети исходных пунктов, тем меньше Ψ и, следовательно, выше её качество построения;

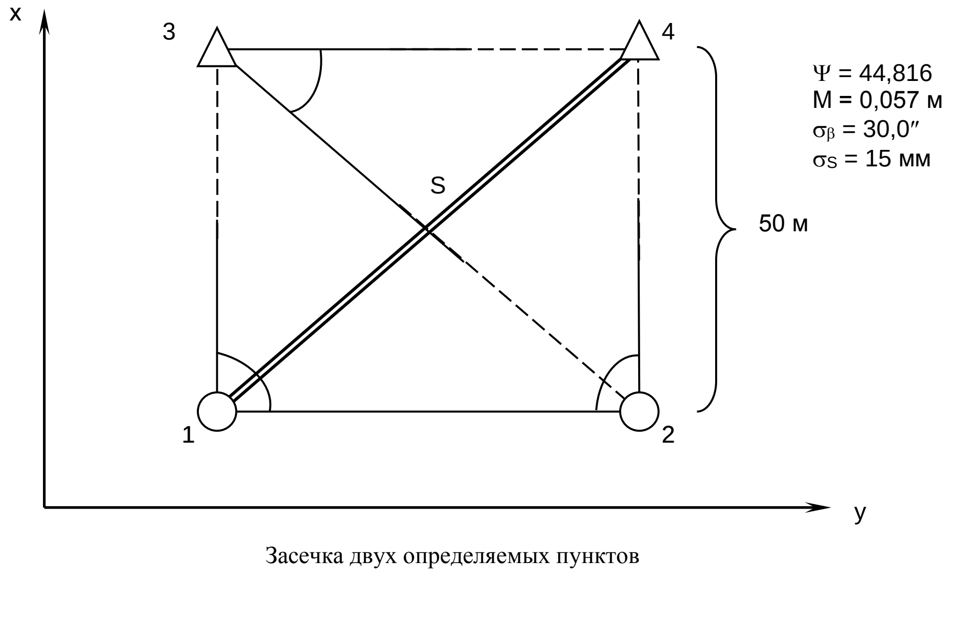
5) изломанные сети лучше по качеству неизломанных;

6) величина Ψ зависит от формы треугольников, из которых состоит геодезическая сеть.

Из всего этого видно, что относительная обусловленность адекватно отражает известные требования к качеству построения геодезических сетей.

Из перечисленных выше закономерностей только шестая из них подлежит автоматизации путём уменьшения Ψ, перемещая положение определяемых пунктов на величины Δx и Δy, найденные методами нелинейного программирования.

Применим эти методы к проектированию линейно-угловой засечки плохого качества построения, показанной на рисунке.



Засечка двух определяемых пунктов

Приведем основные рабочие формулы для указанных выше методов нелинейного программирования.

Метод Якоби

$$\Delta x = -\frac{\dfrac{\partial\Psi}{\partial x}}{\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}}; \quad \Delta y = -\frac{\dfrac{\partial\Psi}{\partial y}}{\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}}. \tag{1}$$

Метод Коши

$$\Delta x = -\frac{\partial\Psi}{\partial x}\lambda; \quad \Delta y = -\frac{\partial\Psi}{\partial y}\lambda; \tag{2}$$

$$\lambda = \frac{\Psi}{\left(\dfrac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2}.$$

Метод Ньютона

$$\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}\\ \dfrac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\Psi}{\partial x}\\ \dfrac{\partial\Psi}{\partial y}\end{pmatrix}. \tag{3}$$

Поскольку целевая функция Ψ имеет сложный вид и аналитическое её дифференцирование невозможно, то применим следующие формулы численного дифференцирования:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \frac{1}{2\delta}\left(\Psi_{\delta,0} - \Psi_{-\delta,0}\right);$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial y} = \frac{1}{2\delta}\left(\Psi_{0,\delta} - \Psi_{0,-\delta}\right);$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{\delta^2}\left(\Psi_{\delta,0} - 2\Psi_{0,0} + \Psi_{-\delta,0}\right);$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = \frac{1}{\delta^2}\left(\Psi_{0,\delta} - 2\Psi_{0,0} + \Psi_{0,-\delta}\right);$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y} = \frac{1}{4\delta^2}\left(\Psi_{\delta,\delta} - \Psi_{\delta,-\delta} - \Psi_{-\delta,\delta} + \Psi_{-\delta,-\delta}\right).$$

Здесь $\Psi_{а,в}$ – это относительная обусловленность при изменении координат определяемого пункта геодезической сети на величину $x = x_0 + a$; $y = y_0 + b$, а $\Psi_{0,0}$ соответствует x_0 и y_0.

Шаг численного дифференцирования можно вычислить по формуле:

$$\delta = \frac{\sqrt{|x| + 10^{-\frac{m}{3}}}}{m/3}, \tag{4}$$

где x – координата, к которой задается приращение δ; m – число знаков в разрядной сетке ЭВМ. Например, при $x = 100$; $m = 8$ величина $\delta = 4$ м.

Приведём числовые данные для примера, показанного на рисунке при $\delta = 1$ м.

Метод Якоби

Первое приближение для точки № 1:

$\Psi_{0,0} = 44{,}816$; $\Psi_{\delta,0} = 45{,}206$; $\Psi_{0,\delta} = 49{,}383$;
$\Psi_{-\delta,0} = 44{,}493$; $\Psi_{0,-\delta} = 40{,}731$.

$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = 0{,}3565$; $\frac{\partial\Psi}{\partial y} = 4{,}326$; $\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = 0{,}0670$; $\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = 0{,}4820$.

$\Delta x = -5$ м; $\Delta y = -9$ м; $x_1 = 1 - 5 = -4$ м; $y_1 = 1 - 9 = -8$ м;
$x_2 = 1$ м; $y_2 = 51$ м; $\Psi_{нов.} = \Psi_{0,0} = 21{,}150$;

Первое приближение для точки № 2 при новых значениях $x_1 = -4$ м; $y_1 = -8$ м;

$\Psi_{\delta,0} = 21{,}935$; $\Psi_{0,\delta} = 20{,}124$;
$\Psi_{-\delta,0} = 20{,}424$; $\Psi_{0,-\delta} = 22{,}238$.

$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = 0{,}7555$; $\frac{\partial\Psi}{\partial y} = -1{,}057$; $\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = 0{,}0590$; $\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = 0{,}0620$.

$\Delta x = -13$ м; $\Delta y = 17$ м; $x_2 = 1 - 13 = -12$ м; $y_2 = 51 + 17 = 68$ м;
$\Psi_{нов.} = 8{,}578$.

Метод Коши

Первое приближение для точки № 1:
Значения производных для точки № 1 такие же, как и в методе Якоби.

$\lambda = 2{,}378$; $\Delta x = -1$ м; $\Delta y = -10$ м; $x_1 = 1 - 1 = 0$ м; $y_1 = 1 - 10 = -9$ м;
$x_2 = 1$ м; $y_2 = 51$ м; $\Psi_{нов.} = \Psi_{0,0} = 18{,}844$.

Первое приближение для точки № 2:

$\Psi_{\delta,0} = 19{,}468$; $\Psi_{0,\delta} = 17{,}992$;
$\Psi_{-\delta,0} = 18{,}266$; $\Psi_{0,-\delta} = 19{,}746$.

$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = 0{,}601$; $\frac{\partial\Psi}{\partial y} = -0{,}877$; $\lambda = 16{,}67$; $\Delta x = -10$ м; $\Delta y = 15$ м;

$x_2 = 1 - 10 = -9$ м; $y_2 = 51 + 15 = 66$ м; $\Psi_{нов.} = 9{,}016$.

Метод Ньютона

Первое приближение для точки № 1:

$\Psi_{0,0} = 44{,}816$; $\Psi_{\delta,\delta} = 45{,}911$; $\Psi_{\delta,-\delta} = 41{,}005$;

$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y} = 0{,}130$ $\Psi_{-\delta,\delta} = 48{,}937$; $\Psi_{-\delta,-\delta} = 40{,}551$.

$\Delta x = 25$ м; $\Delta y = -16$ м; $x_1 = 1 + 25 = 26$ м; $y_1 = 1 - 16 = -15$ м;

$x_2 = 1$ м; $y_2 = 51$ м; $\Psi_{нов.} = \Psi_{0,0} = 8{,}646$.

Первое приближение для точки № 2:

$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = -0{,}0195$; $\frac{\partial\Psi}{\partial y} = -0{,}1708$; $\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = 0{,}0050$; $\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = 0{,}0100$; $\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y} = -0{,}0050$; $\Delta x = 42$ м;

$\Delta y = 38$ м; $x_2 = 1 + 42 = 43$ м; $y_2 = 51 + 38 = 89$ м; $\Psi_{нов.} = 12{,}950$.

Здесь видно, что первое приближение получено не так уверенно, как в методах Якоби и Коши.

Метод релаксации

В этом методе перемещаются сразу все точки геодезической сети по x и по y на величину шага λ, заданного в исходной информации.

Решим пример.

Траектория минимизации по методу релаксации

№ приближения	λ	x_1	y_1	x_2	y_2	Ψ
1	25	1	1	1	51	44,816
2	13	1	–12	–12	64	8,163
3	6	–5	–18	–18	70	4,927
4	3	–5	–21	–21	73	4,052
5	2	–5	–21	–21	73	4,052

По данным таблицы видно, что методом релаксации получен стабильный результат после четвертого приближения.

Но метод релаксации имеет недостаток – требуется большое количество времени при вычислении на ЭВМ величины Ψ для десяти и более определяемых пунктов.

В заключение отметим:

- при малом количестве определяемых пунктов (до десяти) метод релаксации уверенно приводит к конечным результатам;
- при большом числе определяемых пунктов предпочтение отдается методу Коши, так как в нем не используются вторые производные величины Ψ, затем методу Якоби.

Исследования показали, что методом Ньютона можно получить конечный результат после того, как получено стабильное начальное приближение, иначе процесс итераций может быть расходящимся.