УДК 528.063

МЕТОДЫ УРАВНИВАНИЯ НИВЕЛИРНЫХ СЕТЕЙ БЕЗ ИСХОДНЫХ ПУНКТОВ

Д.В. УСОВ
(Полоцкий государственный университет)

Одна и та же нивелирная сеть, не содержащая исходные пункты, уравнивается различными девятью методами, в том числе двумя новыми способами.

Рассматриваются и сравниваются девять способов уравнивания нивелирной сети без исходных пунктов применительно к одному и тому же нивелирному построению [1], показанному на рисунке.

1. Уравнивание нивелирной сети с вырожденной матрицей нормальных уравнений

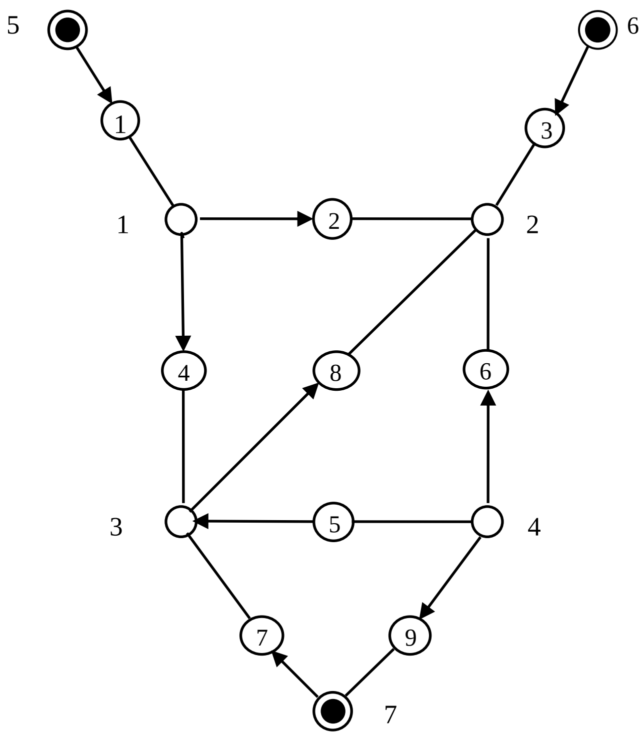

Схема нивелирной сети

Матрица коэффициентов нормальных уравнений имеет вид:

$$R = A^T PA,$$

где $A_{N\times t}$ – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок.

В нашем случае $N = 9, t = 7$. Система нормальных уравнений имеет вид:

$$\left(A^T PA\right)\delta H + A^T PL = 0;$$

$$\delta H = -\left(A^T PA\right)^+ A^T PL, \tag{1}$$

где $P_{N\times N}$ – матрица весов измерений; $\delta H_{t\times 1}$ – вектор поправок в приближенные отметки $H^0_{t\times 1}$; $L_{N\times 1}$ – вектор свободных членов параметрических уравнений.

$$H^{ур} = H_0 + \delta H; \tag{2}$$

$$L = h^0 - h^{изм}; \tag{3}$$

$$h^0 = AH^0,\ h^{yp} = AH^{yp}. \tag{4}$$

Для нашего примера матрицы A и P будут такими:

$$A_{9\times 7} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$P_{9\times 9} = \begin{pmatrix} 1{,}2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}0 \end{pmatrix}.$$

Матрица нормальных уравнений:

$$R_{7\times 7} = \begin{pmatrix} 3{,}6 & -0{,}9 & -1{,}5 & 0 & -1{,}2 & 0 & 0 \\ & 3{,}8 & -1{,}1 & -0{,}7 & 0 & -1{,}1 & 0 \\ & & 4{,}7 & -0{,}9 & 0 & 0 & -1{,}2 \\ & & & 2{,}6 & 0 & 0 & -1{,}0 \\ sim & & & & 1{,}2 & 0 & 0 \\ & & & & & 1{,}1 & 0 \\ & & & & & & 2{,}2 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что $det(R) = 0$, поэтому вместо обратной матрицы используем псевдообратную матрицу и вместо (1) имеем:

$$\delta H = -\left(A^T PA\right)^{+} A^T PL. \tag{5}$$

Матрица $\left(A^T PA\right)^{+}$ имеет вид:

$$\left(A^T PA\right)^{+} = \begin{pmatrix} 0{,}2810 & -0{,}0417 & -0{,}0016 & -0{,}1115 & 0{,}1619 & -0{,}1716 & -0{,}1165 \\ & 0{,}2353 & -0{,}0174 & -0{,}0318 & -0{,}1608 & 0{,}1054 & -0{,}0889 \\ & & 0{,}1984 & 0{,}0311 & -0{,}1206 & 0{,}1473 & 0{,}0574 \\ & & & 0{,}3798 & -0{,}2306 & -0{,}1617 & 0{,}1247 \\ sim & & & & 0{,}8762 & -0{,}2906 & -0{,}2355 \\ & & & & & 0{,}8846 & -0{,}2188 \\ & & & & & & 0{,}4776 \end{pmatrix};$$

$$h^{изм} = \begin{pmatrix} 6,125 \\ 8,320 \\ 5,580 \\ 1,368 \\ 4,694 \\ 11,652 \\ -0,905 \\ 6,944 \\ 5,585 \end{pmatrix}, \quad H_0 = \begin{pmatrix} 189,000 \\ 198,000 \\ 191,000 \\ 186,000 \\ 183,506 \\ 192,353 \\ 191,892 \end{pmatrix}, \quad h_0 = \begin{pmatrix} 5,494 \\ 9,000 \\ 5,647 \\ 2,000 \\ 5,000 \\ 12,000 \\ -0,890 \\ 7,000 \\ 5,890 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} -0,631 \\ 0,680 \\ 0,067 \\ 0,632 \\ 0,306 \\ 0,348 \\ 0,015 \\ 0,056 \\ 0,305 \end{pmatrix}.$$

Значение параметров будет такое:

$$\delta H = \begin{pmatrix} 0,5006 \\ -0,1804 \\ -0,1308 \\ 0,1763 \\ -0,1304 \\ -0,1134 \\ -0,1217 \end{pmatrix};$$

применяя формулу (2), получим

$$H^{ур} = \begin{pmatrix} 189,5006 \\ 197,8196 \\ 190,8692 \\ 186,1763 \\ 183,3756 \\ 192,2396 \\ 191,7683 \end{pmatrix}.$$

В результате, применяя формулу

$$V = A\delta H + L, \tag{6}$$

имеем

$$V = \begin{pmatrix} 0,0000; & -0,0010; & 0,0000; & 0,0006; & -0,0011; & -0,0087; & 0,0059; & 0,0064; & 0,0071 \end{pmatrix}^T.$$

Выполним оценку точности:

$$\mu = \sqrt{\frac{V^T PV}{r}} = 0,0080; \tag{7}$$

$$Q = FP^{-1}F^T, \tag{8}$$

где

$$F_{7\times 9} = R^+ A^T P, \tag{9}$$

$$F_{7\times 9}=\begin{pmatrix} 0,1429 & -0,2904 & 0,1429 & -0,4239 & 0,0990 & 0,0489 & 0,1379 & -0,0441 & -0,0050 \\ 0,1429 & 0,2493 & 0,1429 & 0,0364 & 0,0130 & 0,1870 & 0,0858 & 0,2780 & -0,0571 \\ 0,1429 & -0,0143 & 0,1429 & 0,3000 & 0,1506 & -0,0340 & 0,1692 & -0,2374 & 0,0263 \\ 0,1429 & 0,0717 & 0,1429 & 0,2140 & -0,3138 & -0,2882 & -0,1123 & -0,0693 & -0,2551 \\ -0,8571 & -0,2904 & 0,1429 & -0,4239 & 0,0990 & 0,0489 & 0,1379 & -0,0441 & -0,0050 \\ 0,1429 & 0,2493 & -0,8571 & 0,0364 & 0,0130 & 0,1870 & 0,0858 & 0,2780 & -0,0571 \\ 0,1429 & 0,0248 & 0,1429 & 0,2609 & -0,0605 & -0,1495 & -0,5042 & -0,1610 & 0,3529 \end{pmatrix};$$

$$Q_{7\times 7}=\begin{pmatrix} 0,2810 & -0,0417 & -0,0016 & -0,1115 & 0,1619 & -0,1716 & -0,1165 \\ & 0,2353 & -0,0174 & -0,0318 & -0,1608 & 0,1054 & -0,0889 \\ & & 0,1984 & 0,0311 & -0,1206 & 0,1473 & 0,0574 \\ & & & 0,3798 & -0,2306 & -0,1617 & 0,1247 \\ sim & & & & 0,8762 & -0,2906 & -0,2355 \\ & & & & & 0,8846 & -0,2188 \\ & & & & & & 0,4776 \end{pmatrix},$$

что совпадает с матрицей $\left(A^T PA\right)^+$, удовлетворяющей условиям Мура–Пенроуза [2, с. 29].

$$AA^+A=A;\ A^+AA^+A;\ \left(A^+A\right)^T=A^+A;\ \left(AA^+\right)^T=AA^+, \tag{10}$$

$$m=\mu\sqrt{Q_{ii}}=\left(0,0022;\quad 0,0019;\quad 0,0016;\quad 0,0030;\quad 0,0070;\quad 0,0071;\quad 0,0038\right)^T.$$

2. Уравнивание нивелирной сети методом псевдообращения без составления матрицы нормальных уравнений [3]

Получим расширенную псевдообратную матрицу F по формуле:

$$F=\left(P^{\frac{1}{2}}A\right)^+P^{\frac{1}{2}}, \tag{11}$$

$$\delta H=-FL, \tag{12}$$

что полностью совпадает с предыдущим методом.

Однако $\left(P^{\frac{1}{2}}A\right)^+\neq\left(A^T PA\right)^+\neq Q$, а будет такой:

$$Q_{7\times 9}=\begin{pmatrix} 0,1304 & -0,3061 & 0,1362 & -0,3461 & 0,1043 & 0,0584 & 0,1259 & -0,0421 & -0,0050 \\ 0,1304 & 0,2628 & 0,1362 & 0,0297 & 0,0137 & 0,2235 & 0,0783 & 0,2651 & -0,571 \\ 0,1304 & -0,0150 & 0,1362 & 0,2449 & 0,1587 & -0,0406 & 0,1544 & -0,2264 & 0,0263 \\ 0,1304 & 0,0756 & 0,1362 & 0,1747 & -0,3308 & -0,3444 & -0,1025 & -0,0660 & -0,2551 \\ -0,7825 & -0,3061 & 0,1362 & -0,3461 & 0,1043 & 0,0584 & 0,1259 & -0,0421 & -0,0050 \\ 0,1304 & 0,2628 & -0,8173 & 0,0297 & 0,0137 & 0,2235 & 0,0783 & 0,2651 & -0,571 \\ 0,1304 & 0,0262 & 0,1362 & 0,2130 & -0,0638 & -0,1787 & -0,4603 & -0,1535 & 0,3529 \end{pmatrix}.$$

3. Уравнивание нивелирной сети методом регуляризации, предложенным академиком А.Н. Тихоновым

Вместо формул (9) и (11) применяется следующая формула [4]:

$$F=\left(R^2+\alpha E\right)^{-1}RA^T P, \tag{13}$$

где α – коэффициент регуляризации; E – единичная матрица; $R=A^T PA$ – матрица нормальных уравнений.

Для поиска α применяются следующие формулы:

$$\delta H_1 = -\left(R^2 + \alpha E\right)^{-1} RB_1;$$
$$\delta H_2 = -\left(R^2 + \alpha E\right)^{-1} RB_2;$$
$$B_1 = A^T PL;$$
$$B_2 = B_1 + \Delta B = B_1 + \frac{B_1}{10}. \qquad (14)$$

Путем минимизации целевой функции

$$\Phi = \left|\delta - \Theta\right|,$$

где $\delta = \sqrt{x^T x};\ \ x = \delta H_1 - \delta H_2;\ \ \Theta = \sqrt{\Delta B^T \Delta B}$.

$$\alpha = 0{,}001 \qquad \Phi = 0{,}29525494;$$
$$\alpha = 0{,}0001 \qquad \Phi = 0{,}29525429;$$
$$\alpha = 0{,}00001 \qquad \Phi = 0{,}29525415;$$
$$\alpha = 0{,}000001 \qquad \Phi = 0{,}29525415.$$

По формуле (13) при $\alpha = 0{,}000001$ получим такое же значение, что и $R^+ A^T P$, или $\left(P^{\frac{1}{2}} A\right)^+ P^{\frac{1}{2}}$.

4. Метод, предложенный Г.Г. Асташенковым [5]

Псевдообратная матрица нормальных уравнений может быть получена по формуле:

$$R^+ = \left(R + I^T I\right)^{-1} - I^T I / t^2, \qquad (15)$$

где $I = (1, 1, 1, \ldots 1)_{1\times t}$, t – число параметров.

Произведение $I^T \cdot I$ при $t = 3$ равно

$$I^T I = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = ones(3).$$

Применительно к Matlab формула (15) будет такой:

$$R^+ = \left(R + ones(7)\right)^{-1} - ones(7)/49,$$

I получается такой же, как и в (15).

Из всех рассмотренных способов данный метод самый простой не только в вычислительном отношении, но и в реализации.

Так, матрицу *ones* можно не хранить, а к коэффициентам матрицы $R = A^T PA$ прибавить единицу, обратить матрицу обычным путем и отнять от каждого полученного элемента число $1/t^2$.

5. Классический коррелатный способ уравнивания

Выбор поправок в измерения получают по формуле [1]:

$$V = -P^{-1} B^T \left(BP^{-1} B^T\right)^{-1} W, \qquad (16)$$

где B – матрица коэффициентов условных уравнений; W – вектор свободных членов условных уравнений (вектор невязок).

Недостатком способа является отсутствие простой методики по оценке точности при составлении функции уравненных величин.

Для нашего примера

$$B_{3\times 9} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad W = \begin{pmatrix} 0,0080 \\ -0,0140 \\ -0,0140 \end{pmatrix}.$$

$$h^{изм} = \begin{pmatrix} 6,125 \\ 8,320 \\ 5,580 \\ 1,368 \\ 4,694 \\ 11,652 \\ -0,905 \\ 6,944 \\ 5,585 \end{pmatrix}; \quad V = \begin{pmatrix} 0,0000 \\ -0,0010 \\ 0,0000 \\ 0,0006 \\ -0,0011 \\ -0,0087 \\ 0,0059 \\ 0,0064 \\ 0,0071 \end{pmatrix}; \quad h^{ур} = \begin{pmatrix} 6,125 \\ 8,319 \\ 5,580 \\ 1,369 \\ 4,693 \\ 11,643 \\ -0,899 \\ 6,950 \\ 5,592 \end{pmatrix}; \quad \mu = 0,0080.$$

Для контроля вычисления B и A служит равенство $BA = 0$.

Оценку точности отметок не выполняем ввиду ее сложности.

6. Коррелатно-параметрический способ, предложенный Н.Д. Герасименко [6] и В.Е. Плюта

Составляется вспомогательная матрица

$$B^* = E - AF, \tag{17}$$

где F вычисляется по формуле $F = R^+ A^T P$.

Из матрицы B^* выделяют строки для избыточных измерений (в нашем случае их 3) и записывают их в матрицу B. При этом работает формула:

$$W = -B^* L, \tag{18}$$

где L – свободный член параметрического уравнения.

Так как матрицы B, P, W известны, то получают поправки в измерения по формуле (16).

Отсюда видно, что новый метод такой же простой, как параметрический. Просто осуществляется оценка точности по формуле:

$$f_к = f_п F, \tag{19}$$

где $f_к$ – функция коррелатного способа; $f_п$ – функция параметрического способа.

При этом

$$\frac{1}{P_F} = f_K P^{-1} f_K^T. \tag{20}$$

Работает формула

$$m_F = \mu\sqrt{1/P_F}. \tag{21}$$

Решим наш пример.

В формуле (17) используется $E_{9\times 9}$.

$$B_{9\times9}^{*}=\begin{pmatrix} 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,4603 & 0,0000 & -0,4603 & 0,0860 & -0,1381 & 0,0521 & -0,3221 & 0,0521 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & -0,2762 & 0,0000 & 0,2762 & -0,0516 & 0,0829 & -0,0313 & 0,1933 & -0,0313 \\ 0,0000 & 0,0860 & 0,0000 & -0,0860 & 0,5356 & -0,2542 & -0,2814 & 0,1682 & -0,2814 \\ 0,0000 & -0,1776 & 0,0000 & 0,1776 & -0,3268 & 0,5248 & -0,1981 & -0,3473 & -0,1981 \\ 0,0000 & 0,0391 & 0,0000 & -0,0391 & -0,2111 & -0,1155 & 0,3266 & 0,0764 & 0,3266 \\ 0,0000 & -0,2636 & 0,0000 & 0,2636 & 0,1376 & -0,2210 & 0,0834 & 0,4846 & 0,0834 \\ 0,0000 & 0,0469 & 0,0000 & -0,0469 & -0,2533 & -0,1386 & 0,3919 & 0,0917 & 0,3919 \end{pmatrix}$$

Так как избыточными будут измерения с номерами 2, 5, 8, то матрица B будет такой:

$$B_{3\times9}=\begin{pmatrix} 0,0000 & 0,4603 & 0,0000 & -0,4603 & 0,0860 & -0,1381 & 0,0521 & -0,3221 & 0,0521 \\ 0,0000 & 0,0860 & 0,0000 & -0,0860 & 0,5356 & -0,2542 & -0,2814 & 0,1682 & -0,2814 \\ 0,0000 & -0,2636 & 0,0000 & 0,2636 & 0,1376 & -0,2210 & 0,0834 & 0,4846 & 0,0834 \end{pmatrix}.$$

$$W_{9\times1}=V_{9\times1}=\begin{pmatrix} 0,0000 \\ 0,0010 \\ 0,0000 \\ -0,0006 \\ 0,0011 \\ 0,0087 \\ -0,0059 \\ -0,0064 \\ -0,0071 \end{pmatrix}$$, отсюда выделяем строки 2, 5, 8 $$W_{3\times1}=\begin{pmatrix} 0,0010 \\ 0,0011 \\ -0,0064 \end{pmatrix}.$$

По формуле (16) получим V .

Выполним оценку точности. Для этого воспользуемся формулами (18) – (20).

$$m=\mu\sqrt{FP^{-1}F^{T}}=(0,0022;\quad 0,0019;\quad 0,0016;\quad 0,0030;\quad 0,0070;\quad 0,0071;\quad 0,0038)^{T}.$$

7. Получение уравненных отметок относительно средней плоскости

Применим формулу В.Н. Ганьшина [7]:

$$F=G\left(S^{T}PS\right)^{-1}S^{T}P, \tag{22}$$

$$G_{t\times(t-1)}=\frac{1}{t}\begin{pmatrix} t-1 & -1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & t-1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & -1 & t-1 & \ldots & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & -1 & -1 & \ldots & t-1 \\ -1 & -1 & -1 & \ldots & -1 \end{pmatrix}, \tag{23}$$

где $S_{N,t-1}$ – матрица A без столбца для одного исходного пункта.

$$H^{cp}=-FL, \tag{24}$$

$$h^{yp}=AH^{yp}, \tag{25}$$

$$V = h^{ур} - h^{изм}. \tag{26}$$

Для нашего примера получим:

$H^{ср} = (-0,749;\ \ 7,570;\ \ 0,619;\ \ -4,074;\ \ -6874;\ \ 1,990;\ \ 1,518\ )^T;$

$h^{ур} = (\ 6,125;\ \ 8,319;\ \ 5,580;\ \ 1,369;\ \ 4,693;\ \ 11,643;\ \ -0,899;\ \ 6,950;\ \ 5,592\ )^T;$

$m = (0,0052;\ \ 0,0047;\ \ 0,0044;\ \ 0,0060;\ \ 0,0092;\ \ 0,0092;\ \ 0,0068)^T.$

8. Получение отметок относительно средней плоскости новым методом

Приведем формулы метода [8]:

$$\begin{aligned}
&H_j^{ср} = H_j^{ур} - \frac{\sum_{i=1}^{t} H_j^{ур}}{t};\\
&H^{ур} = H^0 - FL;\\
&F = \left(S^T PS\right)^{-1} S^T P;\\
&Q = fP^{-1} f^T;\\
&f = \frac{\left(H^{ср}\right)_\delta - H^{ср}}{\delta}.
\end{aligned} \tag{27}$$

Применим эти формулы для нашего примера

$$H^{ур}_{исх=5} = \begin{pmatrix} 189,631 \\ 197,950 \\ 191,000 \\ 186,307 \\ 183,506 \\ 192,370 \\ 191,899 \end{pmatrix};\quad H^{ср} = \begin{pmatrix} -0,749 \\ 7,570 \\ 0,620 \\ -4,073 \\ -6,874 \\ 1,990 \\ 1,519 \end{pmatrix};\quad m_{мм} = \begin{pmatrix} 5,2 \\ 4,7 \\ 4,4 \\ 6,0 \\ 9,2 \\ 9,2 \\ 6,8 \end{pmatrix}.$$

$$ср = 190,380$$

9. Уравнивание сети без исходных пунктов новым способом с учетом координат исходных пунктов [8]

Как следует из статьи [8],

$$\begin{aligned}
&H_j^{ур} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(H_j^{i-тый}\right)}{n};\\
&\left(H^{i-тый}\right)_n^{ур} = H^0 + \delta H_n;\\
&F_n = \left(S_n^T PS_n\right)^{-1} S_n^T P;\\
&Q = fP^{-1} f^T;\\
&f = \frac{\left(H^{ур}\right)_\delta - H^{ур}}{\delta}.
\end{aligned} \tag{28}$$

Решим наш пример, результаты вычислений сведем в таблицу 1.

Таблица 1

Результаты вычислений

№ репера	Исходный пункт 5	Исходный пункт 6	Исходный пункт 7	$H^{ур}$, мм	m_H, мм
1	189,6310	189,6140	189,6223	189,6224	6,5
2	197,9500	197,9330	197,9413	197,9414	6,3
3	190,9996	190,9826	190,9909	190,9910	6,4
4	186,3067	186,2897	186,2980	186,2981	7,8
5	183,5060	183,4890	183,4973	183,4974	8,3
6	192,3700	192,3530	192,3613	192,3614	8,3
7	191,8987	191,8817	191,8900	191,8901	7,2

Выводы

Исследования показали, что для рассматриваемой сети можно вычислить бесконечное множество $H^{ур}$. Все зависит от выбора H_0. Однозначное количество из всего множества решений может достигать до пяти:

1) вычисление $H^{ср}$ для некоторой средней плоскости относительно всех пунктов сети;
2) из уравнивания свободной сети, опирающейся на исходный пункт 5;
3) из уравнивания свободной сети, опирающейся на исходный пункт 6;
4) из уравнивания свободной сети, опирающейся на исходный пункт 7;
5) среднее арифметическое из отметок, полученных в предыдущих пунктах с номерами 2, 3 и 4.

Отметим, что результаты оценки точности зависят от принятого H_0 и будут подразделяться на 3 группы:

1) оценка точности, полученная в разделе 1 настоящей работы;
2) оценка точности, полученная в разделе 8;
3) оценка точности, полученная в разделе 9 для $H^{ур}$.

Для наглядности сведем результаты оценки точности в таблицу 2.

Таблица 2

Результаты оценки точности в мм

№ пунктов	Оценка точности для произвольного H_0	Оценка точности для средней плоскости	Оценка точности (см. табл. 1)
1	2,2	5,2	6,5
2	1,9	4,7	6,3
3	1,6	4,4	6,4
4	3,0	6,0	7,8
5	7,0	9,2	8,3
6	7,1	9,2	8,3
7	3,8	6,8	7,2

Результаты уравнивания измерений $\left(h^{ур}, V\right)$ независимо от выбора H_0 могут совпадать для геодезической сети, содержащей один исходный пункт, либо без исходных пунктов, либо относительно всех исходных пунктов, полученных по правилу, указанному в разделе 9. Различными будут $H^{ур}$ и результаты оценки точности.

Для анализа осадок сооружений из уравнивания эпох наблюдений следует пользоваться методом, изложенным в разделе 9. Если специальными методами, опубликованными в [7], будут найдены стабильные пункты, то $H^{ур}$ и m_H следует получать по методике, изложенной в разделе 9.

ЛИТЕРАТУРА

1. Большаков В.Д., Гайдаев П.А. Теория математической обработки геодезических измерений. – М.: Недра, 1977. – 367 с.
2. Тамутис З.П. Проектирование инженерных геодезических сетей. – М.: Недра, 1990. – 138 с.

3. Мицкевич В.И. Математическая обработка геодезических сетей методами нелинейного программирования. – Новополоцк: Изд-во ПГУ, 1997. – 64 с.
4. О вариационном методе регуляризации при уравнивании свободных геодезических сетей / А.Н. Тихонов, В.Д. Большаков, В.А. Бывшев, А.С. Ильинский, Ю.М. Нейман // Изв. вузов. Сер. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1978. – № 3. – С. 3 – 10.
5. Мизина Г.И. Комплексное исследование результатов уравнивания свободных нивелирных сетей специального назначения: Автореф. дис. … канд. техн. наук. – Новосибирск, 1993. – 19 с.
6. Герасименко М.Д., Шароглазова Г.А. Определение современных движений земной коры из повторных измерений // Геодезия и картография. – 1985. – № 7. – С. 25 – 29.
7. Ганьшин В.И., Стороженко А.Ф., Ильин А.Г. Измерение вертикальных смещений сооружений и анализ устойчивости реперов. – М.: Недра, 1981. – 215 с.
8. Мицкевич В.И., Левданский П.М, Стержанов В.Г. О вычислении начальных координат пунктов для последующего уравнивания нуль-свободных сетей // Автоматизированные технологии изысканий и проектирования. – 2001. – № 2(4). – С. 35 – 36.