УДК 517.51, УДК 004.94, УДК 519. 6

Поиск наилучшего приближения в метрике квадратичного отклонения ступенчатыми функциями для обратной функции плотности распределения Лапласа (Определение уровней восстановления для плотности распределения Лапласа)

Пастухов Ю.Ф., к.ф.-м.н., доц
Полоцкий государственный университет
Пастухов А.Ю., Карлов М.И., к.ф.-м.н., доц
Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)
Пастухов Д.Ф., к.ф.-м.н., доц,
Полоцкий государственный университет
Волосова Н.К., аспирант
МГТУ им. Н.Э.Баумана
Чернов С.В.
ОАО «*Конструкторское бюро «Дисплей*», Витебск

Предложен метод нахождения наилучшего приближения обратной плотности распределения Лапласа(уровни восстановления) в пространстве ступенчатых функций на заданном интервале. В данной работе описан метод и алгоритм, заменяющий обратную функцию плотности распределения Лапласа ступенчатой функцией, являющейся наилучшим приближением обратной плотности распределения Лапласа в метрике квадратичного отклонения. По сути получен алгоритм восстановления функции плотности распределения Лапласа в пространстве ступенчатых функций на заданном интервале. Данный метод и алгоритм, отличается от алгоритма квантования Ллойда.

Ключевые слова: *наилучшим приближением функции в метрике квадратичного отклонения, численная аппроксимация интегралов с двенадцатым порядком погрешности, алгоритм Ллойда, уровни восстановления, уровни квантования, квантование, восстановление.*

1. Введение

Новым в данной работе является алгоритм нахождения наилучшего приближения обратной функции плотности распределения Лапласа в пространстве ступенчатых функций на заданном интервале.(уровни восстановления)

2. Квантование функции плотности распределения в метрике квадратичного отклонения

Определение. Пусть $m \in N$. Функция $f_m:[a,b] \to R(a<b)$ называется m-кусочно-постоянной на $[a,b]$, если $\exists\ x_1 < x_2 < \ldots < x_{m-1}$ такие что:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{m-1} < b = x_m,$$

$$f_m(x) = y_i = const\ \forall x \in (x_{i-1}, x_i),\ f_m(x_i) = y_i,\ f_m(x_{i+1}) = y_{i+1}\ y_i \neq y_{i+1},\ \forall i = \overline{1, m-1}.$$

Множество $m-$ ступенчатых функций ($m-$ уровней) $f_m:[a,b] \to R(a<b)$ обозначим как $S_m[a,b]$.

Пусть $f:[a,b] \to \Re$, $f \in C^2[a,b]$, $f'(x) < 0\ \forall x \in [a,b]$, $m \in N$. Для минимизации ошибки квантования требуется в пространстве $m-$ступенчатых функций найти наилучшее приближение $h_m:[a,b] \to R$ функции $f:[a,b] \to \Re$ в метрике квадратичного отклонения, такое что $dist = \|f - h_m\|_{C^2_{[a,b]}} = \min\limits_{f_m \in S_m[a,b]} \|f - f_m\|_{C^2_{[a,b]}}$. С учетом этого, расстояние оценивается как:

$$dist = \|f - h_m\|_{C^2_{[a,b]}} = \sqrt{\int_a^b (f(x) - h_m(x))^2 dx} = \min_{f_m \in S_m[a,b]} \sqrt{\int_a^b (f(x) - f_m(x))^2 dx} = \min_{f_m \in S_m[a,b]} \|f - f_m\|_{C^2_{[a,b]}}$$

Пусть ступенчатая функция $h_m(x) = y_k$ равна константе на отрезке $x \in (x_{k-1}, x_k)$, $k = \overline{1,m}$, при этом функция ошибки $G(x_1, \ldots, x_{m-1}, y_1, \ldots, y_m) = \sum\limits_{k=1}^{m} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - y_k)^2 dx$ описывает квадрат отклонения ступенчатой функции $h_m:[a,b] \to R$ от функции распределения $f:[a,b] \to \Re$. Необходимое условие экстремума функции $G(x_1, \ldots, x_{m-1}, y_1, \ldots, y_m)$описывается системой уравнений:

$$\frac{\partial G(x_1, \ldots, x_{m-1}, y_1, \ldots, y_m)}{\partial x_i} \equiv G'_{x_i} = 0, i = \overline{1, m-1},\ G'_{y_i} = 0,\ i = \overline{1, m},$$

Получим явный вид этих уравнений.

Пусть $H(x) = \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(y,x) dy$ Известно, что

ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ
EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

$$\frac{dH(x)}{dx}=-f(g_1(x),x)\frac{dg_1(x)}{dx}+f(g_2(x),x)\frac{dg_2(x)}{dx}+\int_{g_1(x)}^{g_2(x)}\frac{\partial f(y,x)}{\partial x}dy$$

Пусть $H_k(x_{k-1},x_k,y_k)=\int_{x_{k-1}}^{x_k}(f(x)-y_k)^2dx$ Так как $\frac{dx_{k-1}}{dy_k}=\frac{dx_k}{dy_k}=0$, то

$$\frac{\partial H_k(x_{k-1},x_k,y_k)}{\partial y_k}=-(f(x_{k-1})-y_k)^2\frac{dx_{k-1}}{dy_k}+(f(x_k)-y_k)^2\frac{dx_k}{dy_k}+\int_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{\partial}{\partial y_k}(f(x)-y_k)^2dx=$$

$$=\int_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{\partial}{\partial y_k}(f(x)-y_k)^2dx=(-2)\int_{x_{k-1}}^{x_k}(f(x)-y_k)dx=0\Rightarrow\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x)dx=\int_{x_{k-1}}^{x_k}y_kdx=y_k(x_k-x_{k-1})$$

$$\frac{\partial H_k(x_{k-1},x_k,y_k)}{\partial x_{k-1}}=-(f(x_{k-1})-y_k)^2\frac{dx_{k-1}}{dx_{k-1}}+(f(x_k)-y_k)^2\frac{dx_k}{dx_{k-1}}+\int_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{\partial}{\partial x_{k-1}}(f(x)-y_k)^2dx=-(f(x_{k-1})-y_k)^2$$

При подстановке вместо k $k+1$ получим

$$\frac{\partial H_{k+1}(x_{k+1-1},x_{k+1},y_{k+1})}{\partial x_{k+1-1}}=\frac{\partial H_{k+1}(x_k,x_{k+1},y_{k+1})}{\partial x_k}=-(f(x_{k+1-1})-y_{k+1})^2=-(f(x_k)-y_{k+1})^2$$

$$\frac{\partial H_k(x_{k-1},x_k,y_k)}{\partial x_k}=-(f(x_{k-1})-y_k)^2\frac{dx_{k-1}}{dx_k}+(f(x_k)-y_k)^2\frac{dx_k}{dx_k}+\int_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}(f(x)-y_k)^2dx=(f(x_k)-y_k)^2$$

$$G(x_1,\ldots,x_{m-1},y_1,\ldots,y_m)=\sum_{k=1}^{m}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(f(x)-y_k)^2dx=\sum_{k=1}^{n}H_k(x_{k-1},x_k,y_k)$$

$$\frac{\partial G(x_1,\ldots,x_{m-1},y_1,\ldots,y_m)}{\partial y_k}=\frac{\partial H_k(x_{k-1},x_k,y_k)}{\partial y_k}=(-2)\int_{x_{k-1}}^{x_k}(f(x)-y_k)dx=0\Rightarrow\int_{x_{k-1}}^{x_k}y_kdx=y_k(x_k-x_{k-1})$$

$$\frac{\partial G(x_1,\ldots,x_{m-1},y_1,\ldots,y_m)}{\partial x_k}=\frac{\partial H_k(x_{k-1},x_k,y_k)}{\partial x_k}-\frac{\partial H_{k+1}(x_k,x_{k+1},y_{k+1})}{\partial x_k}=(f(x_k)-y_k)^2-(f(x_k)-y_{k+1})^2=$$

$$=(f(x_k)-y_k+f(x_k)-y_{k+1})(f(x_k)-y_k-f(x_k)+y_{k+1})=(2f(x_k)-y_k-y_{k+1})(y_{k+1}-y_k)=0$$

Так как $y_{k+1}\neq y_k \Rightarrow 2f(x_k)-y_k-y_{k+1}=0\Rightarrow f(x_k)=\frac{1}{2}(y_k+y_{k+1})$

Отсюда следует следует:

$$\begin{cases} f(B_i)=\frac{1}{2}(C_i+C_{i+1}),\ i=\overline{1,n-1} \\ f(B_i)=\frac{1}{2}C_n \\ \int_{B_{j-1}}^{B_j}f(x)dx=C_j(B_j-B_{j-1}),\ j=\overline{1,n} \end{cases} \quad (2)$$

Для n+1 ненулевой ступеньки система (1) имеет вид :

$$\begin{cases} f(B_i)=\frac{1}{2}(C_i+C_{i+1}),\ i=\overline{1,n} \\ \int_{B_{j-1}}^{B_j}f(x)dx=C_j(B_j-B_{j-1}),\ j=\overline{1,n+1} \end{cases} \quad (3)$$

И содержит 2n+1 уравнений и 2n+1 неизвестных.

В работе при вычислении интегралов был использован алгоритм для составной интегральной квадратурной формулы с 12 порядком погрешности, когда исходный отрезок интегрирования делится на число частей кратное десяти (11 узлов равномерной сетки на каждой части). C_i, x_i, r - соответственно веса, узлы и невязка квадратурной формулы.

$$\int_a^b f(z)dz=\sum_{i=0}^{n}C_if(x_i)+r(f) \quad (4)$$

Интегрируя степенные координатные функции z^{2s} на каноническом отрезке[-1,1], $n_0=10$ число частей, на которое делится отрезок[-1,1], учитывая симметрию весов относительно центрального узла $z=0$ получим:

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1}dz=2=C_0+2\sum_{k=1}^{n_0/2}C_k \\ \int_{-1}^{1}z^{2s}dz=2/(2s+1)=2\sum_{k=1}^{n_0/2}C_k(2k/n_0)^{2s},\ s=\overline{1,n_0/2} \end{cases} \quad (5)$$

Для канонического отрезка [-1,1] запишем квадратурную формулу в виде эквивалентном (4)

$$\int_{-1}^{1}f(z)dz=\frac{hn_0}{2}\sum_{i=0}^{n_0}C_if(x_i)=5h\sum_{i=0}^{10}C_if(x_i),\quad \frac{hn_0}{2}=1,\ x_i=-1+ih,\ i=\overline{0,n_0} \quad (6)$$

Где h - шаг интегрирования, $n_0=10$ число отрезков, на которое делится канонический отрезок [-1,1] и каждая часть из k в составной формуле исходного отрезка [a,b] .

А определённый интеграл на отрезке $[a,b]$ отличается от(6) на отрезке [-1,1]длиной интервала в $k = n/n_0 = \frac{b-a}{2}$ раз, используем замену переменных и формулу(4) $x = \frac{b+a}{2} + \left(\frac{b-a}{2}\right)z, a \le x \le b, -1 \le z \le 1, dx = \left(\frac{b-a}{2}\right)dz = kdz$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 f(z)\left(\frac{b-a}{2}\right)dz = \frac{hn_0}{2}\sum_{i=0}^{n_0*k} C_i f(x_i), \sum_{i=0}^{n_0} C_i = 2, h = \frac{b-a}{n}, hn = b-a, x_i = a+ih, i = \overline{0,n}$$

Разбивая канонический отрезок[-1,1] $n_0 = 10$ равных частей (из соображений удобства разбиения), используя симметрию весовых коэффициентов, можно получить решение системы уравнений(5) ($n_0 = 10$), в которой 6 неизвестных коэффициентов C_0, C_1, C_2, C_3 C_4, C_5 являются решением системы $n_0/2+1 = 6$ линейных неоднородных уравнений с 11 алгебраическим порядком точности:

$$\left\{ C_0 = \frac{17807}{12474}, C_1 = -\frac{4825}{5544}, C_2 = \frac{5675}{6237}, C_3 = -\frac{16175}{99792}, C_4 = \frac{26575}{74844}, C_5 = \frac{16067}{299376} \right. \quad (7)$$

Проверим на компьютере, что рациональный вид коэффициентов (7)(символьное решение системы (5) для $n_0 = 10$) удовлетворяет с двойной точностью(16 значащих цифр). В таблице 1 в левой части указано точное значение интеграла $a(s) = \int_{-1}^1 z^s dz, s = \overline{0{,}12}$, а справа численное значение правой части уравнений системы (5) - $b(s)$ с использованием значений весовых коэффициентов (7) (s – показатель степенной функции).

Таблица 1. Сравнение интеграла от координатной степенной функции и квадратурной интегральной формулы

a(0)=2.0000000000000000	b(0)=2.0000000000000004
a(1)=0.0000000000000000	b(1)=0.0000000000000000
a(2)=0.6666666666666666	b(2)=0.6666666666666669
a(3)=0.0000000000000000	b(3)=-0.0000000000000000
a(4)=0.4000000000000000	b(4)=0.4000000000000001
a(5)=0.0000000000000000	b(5)=-0.0000000000000000
a(6)=0.2857142857142857	b(6)=0.2857142857142858
a(7)=0.0000000000000000	b(7)=0.0000000000000000
a(8)=0.2222222222222222	b(8)=0.2222222222222223
a(9)=0.0000000000000000	b(9)=-0.0000000000000000
a(10)=0.1818181818181818	b(10)=0.1818181818181819
a(11)= .0000000000000000	b(11)=-.0000000000000000
a(12)= .1538461538461539	b(12)= .1554621683809524

Из таблицы 1 видно, что алгебраический порядок точности системы уравнений (5) при $n_0 = 10$ равен11, а порядок погрешности квадратурной формулы $\int_{-1}^1 f(z)dz = 5h\sum_{i=0}^{10} C_i f(x_i), 5h = 1, \sum_{i=0}^{10} C_i = 2, x_i = -1+ih, i = \overline{0{,}10}$ равен 12(C_i определяются с помощью (7)).

Из (6) для $n_0 = 10$ получим составную формулу:

$$\int_a^b f(z)dz = 5h\sum_{i=0}^{n} C_i f(x_i), h = \frac{(b-a)}{n}, \sum_{i=0}^{10} C_i = 2, x_i = a+ih, n = 10k \quad (8)$$

в которой весовые коэффициенты C_i определяются алгоритмом (9):

$$\begin{cases} если \;\; j = 0 \;\; или \;\; j = n : C_j = \frac{16067}{299376}; \\ если \;\; j \equiv 1 \bmod 10 \;\; или \;\; j \equiv 9 \bmod 10 : C_j = \frac{26575}{74844}; \\ если \;\; j \equiv 2 \bmod 10 \;\; или \;\; j \equiv 8 \bmod 10 : C_j = -\frac{16175}{99792}; \\ если \;\; j \equiv 3 \bmod 10 \;\; или \;\; j \equiv 7 \bmod 10 : C_j = \frac{5675}{6237}; \\ если \;\; j \equiv 4 \bmod 10 \;\; или \;\; j \equiv 6 \bmod 10 : C_j = -\frac{4825}{5544}; \\ если \;\; j \equiv 5 \bmod 10 : C_j = \frac{17807}{12474}; \\ если \;\; j \equiv 0 \bmod 10 \;, j > 0, \; j < n : C_j = \frac{16067}{149688}; \end{cases} \quad (9)$$

Методы точных вычислений в стеганографии описаны также в работах[6-9].

Для исследования рассмотренного алгоритма разработана программа, которая позволяет получать пороговые уровни и ошибку приближения для различного числа n (таблица 2) с учетом интегральных квадратурных формул(8, 9).

Таблица 2. Результаты исследований ошибки квантования обратной функции распределения Лапласа(уровни восстановления) для различного количества уровней

n	8	16	32
G= *dist*^{2}	$8.294{*}10^{-3}$	$2{,}37 * 10^{-3}$	$5{,}69{*}\ 10^{-4}$
dist	$9{,}11{*}\ 10^{-2}$	$4{,}87{*}\ 10^{-2}$	$2{,}39{*}\ 10^{-2}$

На рисунке 1 представлен пример квантования обратной функции плотности распределения Лапласа(уровни восстановления)

$f(x)=\frac{\alpha}{2}e^{-\alpha|x-\beta|}=\frac{1}{2}e^{-|x|}$ *при* $\alpha=1$, $\beta=0$ $x=f^{-1}(y)=-\ln(2\cdot y)$, $0<y\le\frac{1}{2}$ на основе предложенного подхода в метрике квадратичного отклонения для числа ступеней а)m=10 и б)m=20.(на одну сторону). Полученные значения пороговых уровней для n=20(m=10 ступеней): $2.4\cdot10^{-13}$; $8.8\cdot10^{-5}$; 0.133; 0.266; 0.412; 0.559; 0.720; 0.882; 1.064; 1.245; 1.452; 1.658; 1897; 2.137; 2.422; 2.706; 3.058; 3.410; 3.871; 4.331

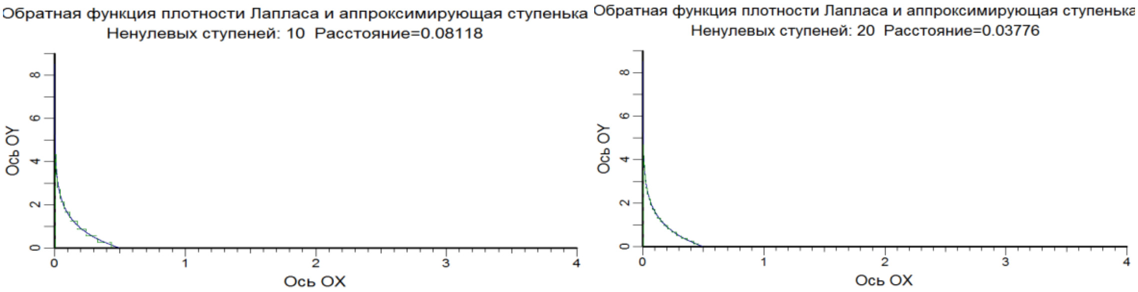

Рис. 1. Результат квантования: а) для m=10; б) для m=20

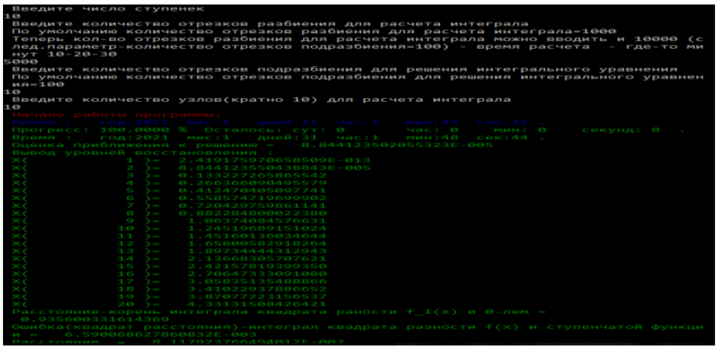

Рис. 3. Уровни квантования(восстановления) обратной функции плотности Лапласа для m=10

Рис. 4. График уровней квантования: для m=10

На рисунке 3,4 приведен результат работы программы для поиска оптимальных уровней восстановления для числа ступеней m=10

Литература:

1. Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф., Богуш Р.П., Пастухов А.Ю. Определение оптимальных уровней восстановления и квантования плотности нормального распределения в метрике квадратичного отклонения для алгоритма сжатия данных/Пастухов Ю.Ф.// Евразийское Научное Объединение. 2018. Т. 1. № 11(45). С. 16-21.

2. Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф., Чернов С.В., Пастухов А.Ю. УСЛОВИЯ СОХРАНЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ЭНЕРГИИ НА ЭКСТРЕМАЛЯХ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА-ЛАГРАНЖА Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов, С.В. Чернов, А.Ю. Пастухов. // Евразийское Научное Объединение. 2020. № 3-1 (61). С. 32-39.
3. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. О КОНЕЧНЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА НА ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ С КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ ДИРИХЛЕ Н.К. Волосова, К.А. Волосов, А.К. Волосова, Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С. Фундаментальные науки. 2020. № 4. С. 78-92.
4. Пастухов Ю. Ф. Необходимые условия в обратной вариационной задаче/ Ю.Ф. Пастухов // Фундаментальная и прикладная математика. 7:1 (2001). С. 285–288.
5. Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф., Богуш Р.П. КВАНТОВАНИЕ ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В МЕТРИКЕ КВАДРАТИЧНОГО ОТКЛОНЕНИЯ В сборнике: Информационно-коммуникационные технологии: достижения, проблемы, инновации (ИКТ-2018)Электронный сборник статей I международной научно-практической конференции, посвященной 50-летию Полоцкого государственного университета. 2018. С. 92-95.
6. Пастухов Д.Ф. Оптимальный порядок аппроксимации разностной схемы волнового уравнения на отрезке / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2018. – № 12. – С. 60–74.
7. Пастухов Д.Ф. К вопросу о редукции неоднородной краевой задачи Дирихле для волнового уравнения на отрезке / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2018. – № 4. – С. 167–186.
8. Пастухов Д.Ф. Минимальная разностная схема для уравнения Пуассона на параллелепипеде с шестым порядком погрешности / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2019. – № 4. – С. 154–173.
9. Пастухов Д.Ф., Волосова Н.К., Волосова А.К. Некоторые методы передачи Q-R кода с помощью стеганогафии / Д.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова, А.К. Волосова // Мир транспорта. 2019. Т. 17. № 3.(82). С. 16–39.
10. Вакуленко С. П., Волосова Н. К., Пастухов Д. Ф. Способы передачи Q-R кода с помощью, стеганогафии / С. П. Вакуленко, Н.К. Волосова, Д. Ф. Пастухов // Мир транспорта. 2018. Т. 16. № 5(78). С. 14–25.
11. Пастухов Ю.Ф., Соловьев А.А., Карабанов Р.Ю., Субботин А.В., Пастухов Д.Ф. РОЛЬ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПОРОГОВЫХ УРОВНЕЙ ВОССТАНОВЛЕНИЯ Вестник современных исследований. 2019. № 2.13 (29). С. 33-41.
12. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф ВОЗМОЖНЫЕ ВИДЫ ТЕЧЕНИЯ В ЗАКРЫТОЙ КАВЕРНЕ И ПРОТИВОРЕЧИЯ В ЗАДАЧЕ С ПОДВИЖНОЙ КРЫШКОЙ Н.К. Волосова, М.А. Басараб, К.А. Волосов, А.К. Волосова, Д.Ф. Пастухов , Ю.Ф. Пастухов // Евразийское Научное Объединение. 2020. № 12-1 (70). С. 4-14.
13. Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф. ТЕНЗОР ЭЙЛЕРА-ЛАГРАНЖА В РАССЛОЕНИИ (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МНОГОМЕРНОГО ОБОБЩЕННОГО 0-ИМПУЛЬСА) Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов // Евразийское Научное Объединение. 2020. № 11-1 (69). С. 27-32.
14. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ВЫСОКОЙ СТЕПЕНЬЮ ТОЧНОСТИ Н.К. Волосова, К.А. Волосов, А.К. Волосова, Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов // Евразийское Научное Объединение. 2020. № 11-1 (69). С. 1-9.
15. Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф. ОБ ИНТЕГРАЛАХ ОБОБЩЕННОЙ ЭНЕРГИИ НА ЭКСТРЕМАЛЯХ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА – ЛАГРАНЖА Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С. Фундаментальные науки. 2020. № 4. С. 93-107.
16. Пастухов Ю.Ф., Пастухов А.Ю., Пастухов Д.Ф. НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ СТУПЕНЧАТЫМИ ФУНКЦИЯМИ В МЕТРИКЕ ВАДРАТИЧНОГО ОТКЛОНЕНИЯ ДЛЯ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЛАПЛАСА Ю.Ф. Пастухов, А.Ю. Пастухов, Д.Ф. Пастухов // Евразийское Научное Объединение. 2020. № 3-1 (61). С. 39-44.
17. Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф. ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ, СОХРАНЯЮЩИЕ ВАРИАЦИОННУЮ ЗАДАЧУ СО СТАРШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф.Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С. Фундаментальные науки. 2018. № 4. С. 194-209.
18. Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф. ЛАГРАНЖЕВЫ СЕЧЕНИЯ Ю.Ф.Пастухов, Д.Ф.Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С. Фундаментальные науки. 2018. № 12. С. 75-99.
19. Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф. ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА ГАМИЛЬТОНА Ю.Ф.Пастухов , Д.Ф.Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С. Фундаментальные науки. 2019. № 12. С. 86-100.
20. Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф. СВОЙСТВА ФУНКЦИИ ГАМИЛЬТОНА В ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ СО СТАРШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф. // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С. Фундаментальные науки. 2019. № 4. С. 137-153.