УДК 528.2.223

РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ МОЛОДЕНСКОГО В СЛУЧАЕ НАЛИЧИЯ GPS-ИЗМЕРЕНИЙ

д-р техн. наук, проф. А.С. ЯРМОЛЕНКО
(Новгородский государственный университет),
О.Н. ПИСЕЦКАЯ
(Белорусская государственная сельскохозяйственная академия, Горки)

В случае наличия GPS-измерений по-новому формулируется краевое условие для возмущающего потенциала, выводится новый обобщенный ряд Стокса, решается задача Молоденского при данном условии. В целом статья является развитием теории Молоденского на основе идей Морица.

РЕШЕНИЕ ПРИ СФЕРИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Проблема определения фигуры Земли является постоянно актуальной. Условно ее можно разделить на две задачи: определение параметров земного эллипсоида и определение фигуры квазигеоида относительно эллипсоида.

Настоящая работа посвящена решению второй задачи с использованием GPS-измерений. Составной частью этого решения является определение высот точек земной поверхности относительно поверхности земного эллипсоида. До применения GPS-измерений геодезическая высота определялась так. Из геометрического нивелирования находилась нормальная высота точки H^γ и к ней прибавлялась высота геоида над эллипсоидом:

$$H = H^\gamma + \zeta .$$

Применение GPS теперь позволяет непосредственно определить высоту H, но в таком случае без дополнительной информации трудно выделить аномалию высоты с тем, чтобы определить нормальные высоты H^γ точек, которые применяются на практике.

Данному вопросу посвящена работа [1]. Высоко оценивая это исследование, отметим, что в нем решение задачи Молоденского для определения аномалий высот приведено в реферативном виде. Кроме того, не приводится вывод функции Стокса для сферы. Не дана оценка точности получаемого решения и не выполнено сравнение его с классическим. Все это составляет предмет наших исследований, которые завершаются составлением алгоритма вычисления нормальных высот по GPS-измерениям на ЭВМ. В данной статье излагаются лишь особенности теории.

До настоящего времени краевое условие теории фигуры Земли имело вид [2, с. 188]:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{2T}{\rho}\right|_{\rho \to R} = -\delta g_0 , \tag{1}$$

где T – возмущающий потенциал; ρ – расстояние от центра Земли до произвольной точки, в которой определяется возмущающий потенциал; R – радиус Земли;

$$-\delta g_0 = g_M - \gamma_N - \frac{2(W_0 - U_0)}{R} . \tag{2}$$

Здесь U_o, W_o – известные потенциалы на поверхностях эллипсоида и геоида; g_M, γ_N – ускорение силы тяжести Земли и ускорение нормальной силы тяжести соответственно.

Это уравнение названо краевым, так как оно выполняется (удовлетворяется) на поверхности Земли. Из его решения необходимо найти функцию T по смешанным аномалиям:

$$\Delta g = g_M - \gamma_N$$

и разность

$$W_0 - U_0 .$$

При решении этого уравнения Земля считается шаром.

В связи с внедрением GPS-измерений имеется возможность непосредственного измерения геодезических высот на эллипсоиде. Следовательно, по известным в [2] формулам, зная геодезическую высоту, можно вычислить значение γ непосредственно в точке M, тогда краевое условие (1) будет таким:

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} = \gamma_M - g_M, \tag{3}$$

или же просто

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} = \Delta g, \tag{4}$$

где Δg – уже не смешанная, а чистая аномалия.

Условие (4) было сформулировано ранее в [2, § 51] и на современном этапе в [1]. Однако из-за больших ошибок измерений геодезических высот в 70-х годах прошлого столетия, его решение не было осуществлено в такой же полноте, как краевого условия (1).

В связи с появлением точных GPS-методов определения геодезических высот, решение (4) приобретает актуальность [1]. Однако выводы в [1] приведены без соответствующих выкладок. Кроме этого, для изложения полной теории решения уравнения (4) необходимо решить следующие задачи:

- вывести обобщенный ряд Стокса для данного случая;
- определить соответствующий возмущающий потенциал на сфере;
- решить задачу Молоденского при краевом условии (4);
- сравнить полученное решение с классическим и оценить его точность.

Практическая ценность решения заключается в определении высот геоида, и соответственно, в применении GPS-измерений для нивелирования.

Дальнейшие выводы в статье будут вестись в соответствии с [2].

Обобщенный ряд Стокса для случая GPS-измерений. В теории фигуры Земли обобщенный ряд Стокса применяется для вывода возмущающего потенциала на сфере. И хотя геоид не является сферой, решение Стокса является нулевым приближением в теории фигуры Земли.

По Стоксу, геоид считается сферой, и все измерения выполняются на сфере. В этом случае, пренебрегая сжатием эллипсоида, говорят, что возмущающий потенциал получается с точностью до сжатия. Если $\alpha = \frac{1}{298}$, то говорят, что решение получается с точностью до 0,003.

С тем чтобы найти возмущающий потенциал на сфере по Стоксу, необходимо вывести обобщенный ряд Стокса для краевого условия:

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} = \Delta g. \tag{5}$$

Обобщенный ряд Стокса базируется на теории сферических функций, а также на использовании полиномов Лежандра.

Согласно [2, с. 190] запишем возмущающий потенциал в виде следующего ряда:

$$T(\rho,\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n(\theta,\lambda)}{\rho^{n+1}}. \tag{6}$$

Выражение (6) базируется на выводах [2, с. 108 (IV. 33), с. 132 (VI. 4), § 21].

Теория шаровых функций изложена в [2, § 14].

В выражении (6) $Y_n(\theta, \lambda)$ – некоторая произвольная сферическая функция степени n, координат θ, λ. С другой стороны, значение Δg в (5), измеренное на сфере, можно записать также в виде функции координат θ и λ.

Согласно [2, с. 189], запишем

$$\Delta g = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\theta,\lambda), \tag{7}$$

где $g_n(\theta, \lambda)$ – сферическая функция, которую согласно [2, (III. 21)] можно записать в зависимости от полиномов Лежандра степени n в виде:

$$g_n(\theta,\lambda) = \frac{2n+1}{4\pi} \iint_{\omega} \Delta g P_n(\cos\psi)\, d\omega, \tag{8}$$

где $P_n(\cos\psi)$ – полином Лежандра степени n. Вычисление таких полиномов представлено в [2, с. 68, табл. 1]; g – значение аномалии, измеренное на сфере; ω – телесный угол, соответствующий элементу поверхности $d\sigma$ на сфере.

Между ними существует зависимость:

$$d\omega = \frac{d\sigma}{R^2}. \qquad (9)$$

Вид полиномов Лежандра известен. Задача заключается в том, чтобы, зная полиномы Лежандра, выразить неизвестную сферическую функцию $Y_n(\theta, \lambda)$ через $g_n(\theta, \lambda)$. Естественно, что вид сферических функций будем определять для краевого условия (5).

Для решения поставленной задачи найдем производную

$$\frac{\partial T}{\partial H} = \frac{\partial T}{\partial R} = -\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{Y_n(\theta,\lambda)}{R^{n+2}}. \qquad (10)$$

Поскольку решение ищется на сфере, то здесь принято $\rho = R$.

Согласно краевому условию (5) и выражению (7) можно записать следующее равенство:

$$-(n+1)\frac{Y_n(\theta,\lambda)}{R^{n+2}} = g_n(\theta,\lambda); \qquad (11)$$

из (11) получаем

$$Y_n(\theta,\lambda) = -\frac{g_n(\theta,\lambda)R^{n+2}}{n+1}. \qquad (12)$$

Подставив (12) в (5), получаем

$$T(\rho,\theta,\lambda) = -\sum \frac{R^{n+2}}{\rho^{n+1}(n+1)} g_n(\theta,\lambda). \qquad (13)$$

Выражение (13) является решением краевого условия (5). Составляющая $g_n(\theta, \lambda)$ определяется в соответствии с (8).

Для представления решения в явном виде рассмотрим пример.

В соответствии с [2, табл. 1] запишем полиномы Лежандра:

- нулевой степени:

$$P_0(\cos\psi) = 1;$$

- первой степени:

$$P_1(\cos\psi) = \cos\psi;$$

- второй степени:

$$P_2(\cos\psi) = \frac{3}{2}\cos^2\psi - \frac{1}{2};$$

………………………………….

- степени $n + 1$:

$$P_{n+1}(\cos\psi) = \frac{2n+1}{n+1}\cos\psi P_n(\cos\psi) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(\cos\psi).$$

Если же теперь подставить эти полиномы в (8), то получим следующий ряд сферических функций:

$$g_0(\theta,\lambda) = \frac{2n+1}{4\pi}\iint_{\omega} \Delta g\, d\omega;$$

$$g_1(\theta,\lambda) = \frac{2n+1}{4\pi}\iint_{\omega} \Delta g \cos\psi\, d\omega;$$

$$g_2(\theta,\lambda) = \frac{2n+1}{4\pi}\iint_{\omega} \Delta g \left(\frac{3}{2}\cos^2\psi - \frac{1}{2}\right) d\omega;$$

$$g_3(\theta,\lambda) = \frac{2n+1}{4\pi}\iint_{\omega} \Delta g \left(\frac{15}{16}\cos^2\psi - \frac{5}{6}\cos\psi\right) d\omega;$$

....

$$g_n(\theta,\lambda)=\frac{2n+1}{4\pi}\iint_{\omega}\Delta g\left(\frac{2n+1}{n+1}\cos\psi P_n(\cos\psi)-\frac{n}{n+1}P_{n-1}(\cos\psi)\right)d\omega .$$

Подстановкой сферических функций всех степеней в ряд (13) решается вопрос определения возмущающего потенциала на сфере.

Решение Стокса для GPS-измерений. Общее решение Стокса (13) приводят к виду, более удобному для интегрирования. Для этого сумму в (13), содержащую полиномы Лежандра, преобразуют в функцию $S(\rho,\psi)$, зависящую от радиуса Земли R, радиус-вектора ρ, точки, в которой находим потенциал T и угла ψ. Функцию $S(\rho,\psi)$ называют функцией Стокса. Выведем ее для нашего случая, и с учетом этого вывода перепишем формулу возмущающего потенциала (13) с тем, чтобы перед знаком суммы не стоял знак «–».

Сферическую функцию $g_n(\theta,\lambda)$ представим так:

$$g_n(\theta,\lambda)=-\frac{2n+1}{4\pi}\iint_{\omega}(g-\gamma)P_n(\cos\psi)d\omega . \tag{14}$$

Поэтому (13) с учетом (14) примет вид:

$$T(\rho,\theta,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{R^{n+2}(2n+1)}{\rho^{n+1}(n+1)4\pi}\int\int_{\varpi}(g-\gamma)P_n\left(\cos\psi\right)d\varpi . \tag{15}$$

Выделим в выражении (15) составляющие нулевой и первой степеней. Тогда

$$T(\rho,\theta,\lambda)=\left(\frac{R^2}{\rho}\cdot\frac{1}{4\pi}\int\int(g-\gamma)d\varpi+\frac{R^3}{\rho^2}\cdot\frac{3}{2\cdot 4\,\pi}\int\int(g-\gamma)\cos\psi d\varpi+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{R^{n+2}}{\rho^{n+1}}\cdot\frac{2n+1}{n+1}\cdot\frac{1}{4\pi}\cdot\int\int_{\varpi}(g-\gamma)\rho_n(\cos\psi)d\varpi\right). \tag{16}$$

Последний член в выражении (16) перепишем так:

$$\frac{R}{4\pi}\int\int(g-\gamma)\left[\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+1}\cdot\frac{2n+1}{n+1}P_n\left(\cos\psi\right)\right]d\varpi . \tag{17}$$

Так же, как и в теории фигуры Земли [2, с. 193], сумму в квадратных скобках выражения (17)

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+1}\frac{2n+1}{n+1}P_n(\cos\psi) \tag{18}$$

назовем обобщенной функцией Стокса. Именно эту сумму выразим в виде конечной формулы от R,ρ,ψ.

Введем обозначение $\frac{R}{\rho}=x$, а также функцию $\frac{1}{r}=\frac{1}{\rho\sqrt{1+x^2-2x\cos\psi}}$ или $\frac{\rho}{r}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2-2x\cos\psi}}$.

В теории фигуры земли принято данную функцию выражать в ряд через полиномы Лежандра, т.е. принята следующая запись:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2-2x\cos\psi}}=\sum_{n=0}^{\infty}x^nP_n(\cos\psi) ,$$

или, учитывая полиномы Лежандра нулевой и первой степеней, можно записать:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2-2x\cos\psi}}-1-x\cos\psi=\sum_{n=2}^{\infty}x^nP_n(\cos\psi) . \tag{19}$$

Разобьем теперь функцию (18) на две части:

- первую

$$\sum_{n=2}^{\infty}x^{n+1}\frac{2n}{n+1}P_n\left(\cos\psi\right) ; \tag{20}$$

- и вторую

$$\sum_{n=2}^{\infty} x^{n+1} \frac{1}{n+1} P_n\left(cos\,\psi\right). \tag{21}$$

Сравнивая x^n в (19) с выражением $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ в (21), замечаем, что

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} = \int x^n dx \,. \tag{22}$$

Следовательно, можно записать:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} P_n(cos\,\psi) = \int_0^x \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2-2x\,cos\,\psi}} - 1 - x\,cos\,\psi \right) dx \,. \tag{23}$$

Вычислим неопределенные интегралы в (23).
Очевидно, что

$$\int dx = x \,; \tag{24}$$

$$\int cos\,\psi x dx = cos\,\psi \frac{x^2}{2} \,. \tag{25}$$

Для вычисления интеграла

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2-2x\,cos\,\psi}} dx \tag{26}$$

подкоренное выражение запишем так:

$$(x - cos\,\psi)^2 - cos^2\,\psi + 1 \,. \tag{27}$$

Тогда (26) будет

$$\int \frac{d(x - cos\,\psi)}{\sqrt{(x - cos\,\psi)^2 - cos^2\,\psi + 1}} \,. \tag{28}$$

Известно [3, с. 338], что

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+a^2}} = ln\left| z + \sqrt{z^2+a^2} \right| + c \,. \tag{29}$$

В (28)

$$\begin{aligned} z &= x - cos\,\psi; \\ a^2 &= 1 - cos^2\,\psi. \end{aligned} \tag{30}$$

Тогда на основании (29), (30) интеграл (28) будет

$$ln\left| x - cos\,\psi + \sqrt{(x - cos\,\psi)^2 + 1 - cos^2\,\psi)} \right| . \tag{31}$$

Таким образом, с учетом (31), (25) и (24) интеграл в (23) будет

$$\left(ln\left| x - cos\,\psi + \sqrt{(x - cos\,\psi)^2 + (1 - cos^2\,\psi)} \right| - x - \frac{x^2}{2} cos\,\psi \right)\Bigg|_0^x \,. \tag{32}$$

Рассмотрим теперь первое слагаемое (18).
Перепишем его так:

$$\sum_{n=2}^{\infty} x^{n+1} \frac{2(n+1-1)}{n+1} P_n(cos\,\psi) \,, \tag{33}$$

или

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}(2n+1)}{n+1}P_n(\cos\psi)-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}2}{n+1}P_n(\cos\psi). \tag{34}$$

После простых сокращений (34) будет иметь вид:

$$2\sum_{n=2}^{\infty}x^{n+1}P_n(\cos\psi)-2\frac{x^{n+1}}{n+1}P_n(\cos\psi). \tag{35}$$

Следуя (19), первая составляющая в (35) будет

$$2\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2-2x\cos\psi)}}-x-x^2\cos\psi\right); \tag{36}$$

вторая, согласно (23) и (32):

$$2\left(\ln\left|x-\cos\psi+\sqrt{(x-\cos\psi)^2+\sin^2\psi}\right|-x-\frac{x^2}{2}\cos\psi\right)\Big|_0^x. \tag{37}$$

Теперь, чтобы найти (18), следует сложить (20) и (21) или сложить (34), учитывая (36) и (37), с (32). Таким образом, найдем

$$2\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2-2x\cos\psi}}-x-x^2\cos\psi\right)-\left(\ln\left|x-\cos\psi+\sqrt{(x-\cos\psi)^2+\sin^2\psi}\right|-x-\frac{x^2}{2}\cos\psi\right)\Big|_0^x. \tag{38}$$

После простых сокращений:

$$-x-\frac{3}{2}x^2\cos\psi+\frac{2x}{\sqrt{1+x^2-2x\cos\psi}}-\ln\left|x-\cos\psi+\sqrt{(x-\cos\psi)^2+\sin^2\psi}\right|+\ln|1-\cos\psi|. \tag{39}$$

Теперь, учитывая ранее принятые обозначения, запишем

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2-2x\cos\psi}}=\frac{\frac{P}{\rho}}{\frac{r}{\rho}}=\frac{R}{r}. \tag{40}$$

Тогда (38) примет вид:

$$-\frac{R}{\rho}-\frac{3}{2}\frac{R^2}{\rho^2}\cos\psi+\frac{2R}{r}-\ln\left|\frac{R}{\rho}-\cos\psi+\sqrt{\left(\frac{R}{\rho}-\cos\psi\right)^2+\sin^2\psi}\right|+\ln|1-\cos\psi|. \tag{41}$$

Выражение (41) назовем обобщенной функцией Стокса при наличии GPS-измерений и будем обозначать ее также $S(\psi)$.

Таким образом, формулу возмущающего потенциала (16) можно переписать так:

$$T(\rho,\theta,\lambda)=\left(\frac{R^2}{\rho}\frac{1}{4\pi}\iint g-\gamma)d\varpi+\frac{R^3}{\rho^3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4\pi}\iint(g-\gamma)\cos\psi d\varpi+\frac{R}{4\pi}\iint(g-\gamma)S(\psi)d\varpi\right). \tag{42}$$

Полагая $d\varpi=\dfrac{d\sigma}{R^2}$, (42) перепишем так:

$$T(\rho,\theta,\lambda)=\left(\frac{1}{\rho4\pi}\iint(g-\gamma)d\sigma+\frac{R}{\rho^2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4\pi}\iint(g-\gamma)\cos(\psi)d\sigma+\frac{1}{R4\pi}\iint(g-\gamma)S(\psi)d\sigma\right). \tag{43}$$

Если же ограничиться лишь сферой, т.е. принять

$$R = \rho \tag{44}$$

то (43) будет таким:

$$T(\rho,\theta,\lambda) = \left(\frac{1}{R4\pi} \iint (g-\gamma) d\sigma + \frac{1}{R} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4\pi} \iint (g-\gamma) \cos\psi d\sigma + \frac{1}{R4\pi} \iint (g-\gamma) S(\psi) d\sigma \right). \tag{45}$$

В предположении (44)

$$\frac{1}{R} S(\psi) = -\frac{1}{R} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{R} \cos\psi + \frac{2}{r} - \frac{1}{R} \ln \left| 1 - \cos\psi + \sqrt{(1-\cos\psi)^2 + \sin^2\psi} + \frac{1}{R} \ln |1-\cos\psi| \right|,$$

или

$$\frac{1}{R} S(\psi) = -\frac{1}{R} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{R} \cos\psi + \frac{2}{r} - \frac{1}{R} \ln \left| 1 - \cos\psi + \sqrt{2(1-\cos\psi)} + \frac{1}{R} \ln |1-\cos\psi| \right|. \tag{46}$$

Если же считать R бесконечно большим, то

$$\frac{1}{R} S(\psi) = \frac{2}{r}, \tag{47}$$

и тогда (45) будет таким:

$$T = \left(\frac{1}{R4\pi} \iint (g-\gamma) d\sigma + \frac{1}{R} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{4\pi} \iint (g-\gamma) \cos\psi d\sigma + \frac{1}{4\pi} 2 \iint (g-\gamma) \frac{1}{r} d\sigma \right). \tag{48}$$

Если же принять предположения для нормального потенциала, приведенные в [2, с. 198], то первые две составляющие в (48) будут равны нулю и тогда

$$T = \frac{1}{2\pi} \iint (g-\gamma) \frac{1}{r} d\sigma, \tag{49}$$

а высота геоида над эллипсоидом будет равной

$$S = \frac{T}{\gamma} = \frac{1}{2\pi\gamma} \iint (g-\gamma) \frac{1}{r} d\sigma. \tag{50}$$

Как видим, в нулевом приближении решение с применением GPS-измерений и решение классическое совпадают. Здесь (50) полностью идентична [2, (IX. 55)].

Зная сумму (18), легко найти

$$\sum_{0}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho} \right)^{n+1} \frac{2n+1}{n+1} P_n(\cos\psi), \tag{51}$$

поскольку первые два члена этого ряда будут

$$\frac{R}{\rho}, \frac{3}{2} \left(\frac{R}{\rho} \right)^2 \cos\psi. \tag{52}$$

Прибавлением этих членов к (41) получают

$$S(\psi) = \frac{2R}{r} - \left(\ln \left| \frac{R}{\rho} - \cos\psi + \sqrt{\left(\frac{R}{\rho} - \cos\psi \right)^2 + \sin^2} - \ln |1-\cos\psi| \right| \right). \tag{53}$$

Если же принять (44), то (53) будет таким:

$$\frac{1}{R} S(\psi) = \frac{2}{r} - \frac{1}{R} \ln \frac{\left| 1 - \cos\psi + 2\sin\frac{\psi}{2} \right|}{\left| 1 - \cos\frac{\psi}{2} \right|}, \tag{54}$$

или, поскольку

$$r = 2R\,sin\frac{\psi}{2};$$

$$\frac{1}{R}S(\psi) = \frac{1}{R\,sin\frac{\psi}{2}} - \frac{1}{R}ln\left|1+\frac{1}{sin\frac{\psi}{2}}\right|,$$

тогда в частном случае

$$S(\psi) = \frac{1}{sin\frac{\psi}{2}} - ln\left|1+\frac{1}{sin\frac{\psi}{2}}\right|. \qquad (55)$$

Это соответствует частному случаю, приведенному в [1] и [2]. При этом в [2] применен совершенно другой подход.

Оценка точности решений. Определим теперь стандарты полученных решений. Полагая нулевыми первые два члена ряда возмущающего потенциала согласно (45) запишем

$$\sigma_T = \frac{\sigma_{\Delta g}}{R4\pi}\sqrt{\iint (S(\psi))^2 d\sigma}, \qquad (56)$$

где $\sigma_T, \sigma_{\Delta g}$ – стандарты T, Δg.

С тем чтобы выделить случай применения GPS-измерений от классического, обобщенную функцию Стокса здесь обозначим через $S_{GPS}(\psi)$,

а стандарт потенциала T – через $\sigma_{T_{GPS}}$.

Тогда (56) представим так:

$$\sigma_{T_{GPS}} = \frac{\sigma_{\Delta g}}{4\pi R}\sqrt{\iint (S_{GPS}(\psi))^2 d\sigma}. \qquad (57)$$

В классическом случае формула будет такой, как записана в (56). Полагая точность определения $\sigma_{\Delta g}$ одинаковой, отношение стандартов (57) и (56) составит:

$$\frac{\sigma_{T_{GPS}}}{\sigma_T} = \frac{\sqrt{\iint (S_{GPS}(\psi))^2 d\sigma}}{\sqrt{\iint (S(\psi))^2 d\sigma}}. \qquad (58)$$

Получив функцию Стокса для нашего случая (55), решение осуществляется по алгоритму Молоденского при краевом условии (4). В результате решения находят аномалии силы тяжести Δg_0, Δg_1, Δg_2,…, составляющие потенциала χ_0, χ_1, χ_2,…, и, подставив данные значения в (43) – (47), интегрируют и находят T_0, T_1, T_2 и т.д. По их значениям определяют возмущающий потенциал по формуле (36).

ЛИТЕРАТУРА

1. Мориц Г. Теория Молоденского и GPS (Памяти М.С. Молоденского) // Геодезия и картография. – 2001. – № 6. – С. 7 – 17.
2. Шимбирев Б.П. Теория фигуры Земли. – М.: Недра, 1975. – 432 с.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1. – М.: Наука, 1978.