УДК 528.063

АЛГОРИТМ ОБОБЩЁННОГО МЕТОДА Lp-ОЦЕНОК НА ОСНОВЕ МЕТОДА НЬЮТОНА

д-р техн. наук, доц. В.И. МИЦКЕВИЧ, А.Ю. БУДО
(Полоцкий государственный университет)

Предложен новый метод уравнивания геодезических сетей. Приведен числовой пример, необходимый для отладки программ.

Обобщённый метод наименьших квадратов, разработанный в середине XX столетия, реализуется по формулам [1]:

$$x = -\left(A^T K^{-1} A\right)^{-1} A^T K^{-1} L\,; \tag{1}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{V^T K^{-1} V}{N-t}}\,, \tag{2}$$

где $A_{N\times t}$ – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок; $K_{N\times N}$ – недиагональная корреляционная матрица результатов измерений; $L_{N\times 1}$ – вектор свободных членов параметрических уравнений поправок; $V_{N\times 1} = Ax + L$ – вектор поправок в результаты измерений; $\hat{X}_{t\times 1} = X^0 + x$ – вектор уравненных координат определяемых пунктов; N – количество результатов измерений; t – число параметров.

Метод Lp-оценок для диагональной матрицы весов результатов измерений $P_{N\times N}$ реализуется по формулам [2 – 4]:

- целевая функция:

$$\Phi(X) = \left(\left|L(X)\right|^{\frac{n}{2}}\right)^T P_n \left|L(X)\right|^{\frac{n}{2}}, \tag{3}$$

где n – показатель степени; диагональный элемент P_n равен $P_i = \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_i}\right)^n$; σ – стандарт измерения;

$$x = -\left(A^T C A\right)^{-1} A^T C L(\,X\,), \tag{4}$$

где диагональная матрица

$$C = P_n\left(diag\left|L(X)\right|^{n-2}\right); \tag{5}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{V_n^T P_n V_n}{N-t}}\,; \tag{6}$$

$$V_n = L(\hat{X})\,;\ \hat{X} = X^0 + x\,. \tag{7}$$

Матрица обратных весов:

$$Q = F P_n^{-1} F^T, \tag{8}$$

где

$$F_{t\times N} = \left(A^T C A\right)^{-1} A^T C\,. \tag{9}$$

Формулы, реализующие обобщённый алгоритм метода Lp-оценок, имеют вид:

- целевая функция:

$$\Phi(X) = \left(\left|L(X)\right|^{\frac{n}{2}}\right)^T \cdot K_n^{-1} \cdot \left|L(X)\right|^{\frac{n}{2}}, \tag{10}$$

где $K_n = P_n^{-\frac{1}{2}} R P_n^{-\frac{1}{2}}$, R – корреляционная матрица, содержащая на диагонали единицы, а внедиагональные числа равны коэффициентам корреляции.

Вспомогательные в общем случае недиагональные матрицы размером $N \times N$ будут такими:

$$C_1 = K_n^{-1} \boxdot \left\{ \left|L(X)\right|^{\frac{n-4}{2}} \cdot \left[\left|L(X)\right|^{\frac{n}{2}} \right]^T \right\}; \tag{11}$$

$$C_2 = K_n^{-1} \boxdot S \cdot \left\{ \left|L(X)\right|^{\frac{n-2}{2}} \cdot \left[S \cdot \left|L(X)\right|^{\frac{n-2}{2}} \right]^T \right\}, \tag{12}$$

где $S_{N \times N}$ – диагональная матрица сигналов (единица на диагонали со знаком числа $L(X)$);

$$C_3 = K_n^{-1} \boxdot S \cdot \left\{ \left|L(X)\right|^{\frac{n-2}{2}} \cdot \left[\left|L(X)\right|^{\frac{n}{2}} \right]^T \right\}; \tag{13}$$

$$x = -H^{-1} G, \tag{14}$$

где $H_{t \times t}$ – матрица Гессе (вторых частных производных от функции (10)):

$$H = \frac{n|n-2|}{2} Z + \frac{n \cdot n}{2} A^T C_2 A, \tag{15}$$

где $Z_{t \times t}$ – матрица, элементы которой вычисляются с использованием A и C_1 по формуле:

$$Z_{i,j} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{r=1}^{N} a_{k,i} a_{k,j} \left(C_1\right)_{k,r}. \tag{16}$$

Матричную запись для матрицы Z найти не удалось.

Матрица для градиента, входящего в (14), вычисляется по формуле:

$$G = n A^T C_3 l, \tag{17}$$

где

$$l_{N \times 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{N \times 1};$$

$$\mu = \sqrt{\frac{V^T K_n^{-1} V}{N - t}}, \tag{18}$$

где

$$V = Ax + L(X). \tag{19}$$

Матрицу обратных весов вычисляют по формуле:

$$Q = F K_n F^T, \tag{20}$$

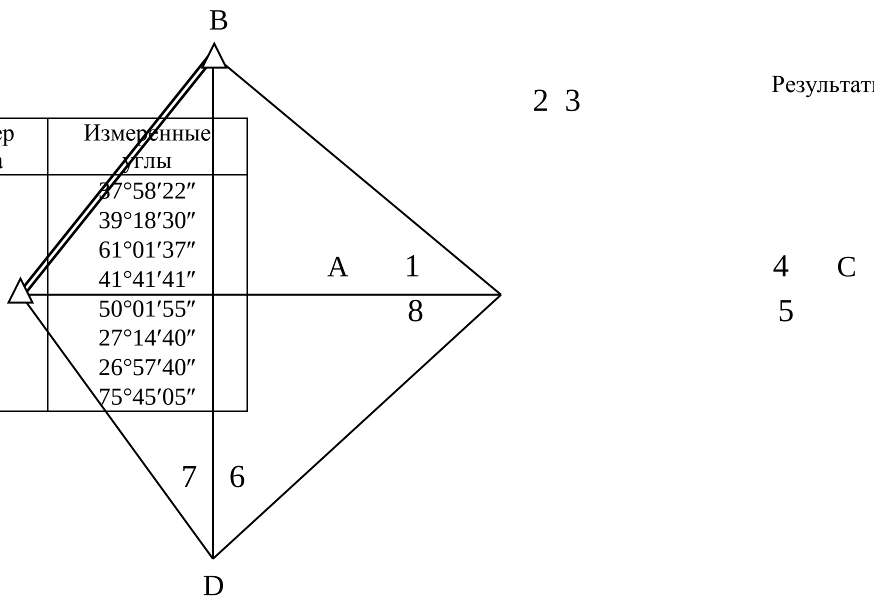
где расширенная псевдообратная матрица

$$F = n H^{-1} A^T C_1. \tag{21}$$

В формулах (11) – (13) знак $\boxdot$ означает поэлементное умножение матриц.

Например, $A \boxdot B = \left(a_{i,j} \cdot b_{i,j}\right)$.

Приведём пример уравнивания геодезического четырехугольника с результатами измерений, представленными в таблице.



Результаты измерений

Номер угла	Измеренные углы
1	37°58′22″
2	39°18′30″
3	61°01′37″
4	41°41′41″
5	50°01′55″
6	27°14′40″
7	26°57′40″
8	75°45′05″

Координаты исходных пунктов: x_A = 1100,00 м; y_A = 100,00 м; x_B = 1650,00 м; y_B = 640,00 м.
Предварительные координаты определяемых пунктов: x_C = 1250 м; y_C = 1230 м; x_D = 100 м; y_D = 500 м.
Уравнивание выполним по направлениям, используя матрицу $A_{8\times4}$, составленную для восьми углов:

$$A=\begin{bmatrix} -179,37 & 23,81 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11,92 & 132,0 \\ 239,51 & 162,38 & 11.92 & -132,0 \\ -60,14 & -186,19 & 0 & 0 \\ -98,2 & -104,03 & -81,15 & 127,84 \\ -81,15 & 127,84 & 69,22 & 4,16 \\ 0 & 0 & 83,04 & 45,81 \\ 179,37 & -23,81 & -71,12 & -177,81 \end{bmatrix};$$

При $P_n = E$ корреляционная матрица $K_{8\times8}$ будет такой:

$$K=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,5 \\ & 1 & -0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & -0,5 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & sim & & & 1 & -0,5 & 0 \\ & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

При n = 2,0 уравнивание по углам и направлениям даёт

$$V_{угл}=\begin{pmatrix} -8,67 \\ 12,25 \\ -13,80 \\ 0,219 \\ -1,31 \\ 21,89 \\ 0,450 \\ 18,97 \end{pmatrix}; \quad \left(V_{угл}\right)_{напр}=\begin{pmatrix} -12,26 \\ 15,92 \\ -13,40 \\ -0,260 \\ 3,92 \\ 16,75 \\ -2,29 \\ 21,63 \end{pmatrix}=L(X).$$

$$S=diag\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

При n = 2,5, когда $k1$ = 1,3333, $k2$ = 0,6667, имеем

$$K_n^{-1} = \begin{bmatrix} k1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k2 \\ & k1 & k2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & k1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & k1 & k2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & k1 & 0 & 0 & 0 \\ & & sim & & & k1 & k2 & 0 \\ & & & & & & k1 & 0 \\ & & & & & & & k1 \end{bmatrix};$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 4,6685 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4,7466 \\ 0 & 5,3199 & 2,1446 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3,0271 & 4,8807 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,6799 & 10,0997 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0444 & 2,6398 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5,4568 & 0,2268 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12,1359 & 2,0176 & 0 \\ 1,5249 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6,2009 \end{bmatrix};$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 4,6685 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2,6904 \\ & 5,3189 & -2,5480 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & -2,5480 & 4,8807 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0,6799 & -0,6699 & 0 & 0 & 0 \\ & & & -0,6699 & 2,6398 & 0 & 0 & 0 \\ & & sim & & & 5,4568 & -1,6592 & 0 \\ & & & & & -1,6592 & 2,0176 & 0 \\ & & & & & & & 6,2009 \end{bmatrix};$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} -57,24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -58,19 \\ 0 & 84,69 & 34,14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -40,56 & -65,40 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,1768 & -2,6254 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1742 & 10,350 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 91,40 & 3,7995 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -27,79 & -4,6204 & 0 \\ 32,98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 134,13 \end{bmatrix};$$

$$Z = \begin{bmatrix} 395064 & -233802 & 92598 & -255045 \\ & 1244949 & -662300 & -56851 \\ & & 590536 & -301221 \\ sim & & & 827263 \end{bmatrix};$$

$$H = 10^6 \cdot \begin{bmatrix} 2,9305 & 0,1100 & -0,2356 & -1,8535 \\ & 1,5696 & -0,1881 & -0,4967 \\ & & 0,5938 & -0,0933 \\ sim & & & 2,1090 \end{bmatrix};$$

$$G=\begin{pmatrix}41775\\-30840\\-28800\\538\end{pmatrix};\quad x=\begin{pmatrix}-0{,}0132\\0{,}0253\\0{,}0504\\-0{,}0042\end{pmatrix};\quad V_{n=2.5}=\begin{pmatrix}-9{,}1800\\14{,}7655\\-11{,}4405\\-4{,}1449\\-1{,}9836\\24{,}5784\\1{,}7017\\15{,}7130\end{pmatrix};$$

Применяя формулу (10), при n = 2 $\Phi(X)$ = 10052; а при n = 2,5 $\Phi(X)$ = 9044.

В заключение отметим, что приближения при минимизации целевой функции (10) выполняют до тех пор, пока значение этой функции не начнёт возрастать при числе приближений не более 6.

Например:

- во втором приближении:

$$V_{n=2.5}=\begin{pmatrix}-4{,}1706\\9{,}1408\\-15{,}4843\\0{,}5141\\-0{,}6450\\22{,}6250\\-3{,}0640\\21{,}0938\end{pmatrix};\quad \Phi(X)=8913;$$

- в третьем приближении:

$$V_{n=2.5}=\begin{bmatrix}-9{,}2991 & 13{,}3948 & -10{,}0175 & -4{,}0781 & -4{,}2282 & 25{,}3332 & 2{,}3736 & 16{,}5307\end{bmatrix}^T,$$

а $\Phi(X)$ = 9145, поэтому эти результаты в обработку не берём.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кемниц Ю.В. Математическая обработка зависимых результатов измерений. – М: Недра, 1970. – 192 с.
2. Мещеряков Г.А., Волжанин С.Д., Киричук В.В. Об уравнивании геодезических измерений с учётом закона распределения ошибок измерений // Геодезия и картография. – 1984. – № 2. – С. 9 – 11.
3. Маркузе Ю.И., Бойко Е.Г., Голубев В.В. Геодезия. Вычисление и уравнивание геодезических сетей. – М.: Картгеоцентр – Геодезиздат, 1994. – 431 с.
4. Бондаренко В.А., Мицкевич В.И., Сырова Н.С. Уравнивание нивелирных сетей с поиском грубых ошибок измерений // Геодезия и картография. – 2003. – № 5. – С. 26 – 28.