УДК 528.063

КОРРЕЛАТНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ УРАВНИВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ МАТРИЦЫ ПОПРАВОК ИЗМЕРЕНИЙ

д-р техн. наук, доц. В.И. МИЦКЕВИЧ, В.Е. ПЛЮТА
(Полоцкий государственный университет)

Предложены основы алгоритма уравнивания и оценки точности геодезических сетей автоматизированным коррелатно-параметрическим способом с применением корреляционной матрицы поправок измерений.

Из двух известных в уравнительных вычислениях на ЭВМ способов уравнивания, коррелатного и параметрического, последний справедливо признается наиболее удобным для программирования, так как условные уравнения составлять во много раз труднее, чем параметрические. При этом в производственных программах, независимо от способа уравнивания, как правило, составляются и анализируются условные уравнения фигур, полюса и дирекционных углов, так как в инструктивных документах регламентируются допуски на свободные члены этих уравнений. В результате применяют и параметрический, и элементы коррелатного способа уравнивания.

Вопросам автоматизации коррелатного способа уравнивания посвящено много работ, но предлагаемые методы оказались сложнее алгоритмов параметрического способа и поэтому реже используются на производстве. Между тем известные преимущества коррелатного способа уравнивания в анализе грубых ошибок в результатах измерений, уравнивании полигонометрии и обработке нуль-свободной триангуляции стимулируют разработку простых алгоритмов реализации этого метода на ЭВМ.

Цель данной работы заключается в разработке коррелатно-параметрического алгоритма, опираясь на имеющийся опыт в данном вопросе с применением корреляционной матрицы поправок в результаты измерений, используемой в параметрическом способе уравнивания и имеющей вид [1, 2]:

$$\mathrm{K}_V = \left(\mathrm{E} - \mathrm{A}F\right)\mathrm{P}^{-1}, \tag{1}$$

где $\mathrm{E}_{\mathrm{N}\times\mathrm{N}}$ – единичная матрица; $\mathrm{A}_{\mathrm{N}\times\mathrm{t}}$ – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок; $\mathrm{P}_{\mathrm{N}\times\mathrm{N}}$ – матрица весов результатов измерений; при этом

$$F = \left(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{PA}\right)^{-1}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{P}. \tag{2}$$

В работе [3] впервые обнаружена взаимосвязь матрицы коэффициентов условных уравнений B с матрицей K_V:

$$\mathrm{B}^*_{\mathrm{N}\times\mathrm{N}} = \mathrm{K}_V\mathrm{P} = \mathrm{E} - \mathrm{A}F, \tag{3}$$

где N – количество результатов измерений.

В теории коррелатного уравнивания используют матрицу $\mathrm{B}_{\mathrm{r}\times\mathrm{N}}$, где r – количество избыточных измерений. Здесь решают систему условных уравнений:

$$\mathrm{B}V + W = 0, \tag{4}$$

где $\mathrm{V}_{\mathrm{N}\times1}$ – неизвестный вектор поправок в результаты измерений; $\mathrm{W}_{\mathrm{r}\times1}$ – вектор свободных членов независимых условных уравнений.

Чтобы перейти от B* к B, на ЭВМ устанавливают в геодезической сети в произвольном порядке необходимые измерения, а коэффициенты уравнений для оставшихся r избыточных измерений выделяют по строкам из $\mathrm{B}^*_{\mathrm{N}\times\mathrm{N}}$ и записывают их в $\mathrm{B}_{r\times\mathrm{N}}$. При этом для r уравнений

$$W_{r\times1} = \left(-V_{\mathrm{N}\times1}\right)_{\textit{выделенное}}. \tag{5}$$

Известно [4]:

$$V_{\mathrm{N}\times1} = \left(\mathrm{E} - \mathrm{A}F\right)L_{\mathrm{N}\times1}, \tag{6}$$

что позволяет в вычислениях не пользоваться другими выражениями и применять равенство:

$$V_{\mathrm{N}\times1} = \mathrm{B}^*_{\mathrm{N}\times\mathrm{N}}L_{\mathrm{N}\times1}, \tag{7}$$

где L – вектор свободных членов параметрических уравнений поправок, соответствующий произвольному по точности вектору X^0.

Если матрица $B_{r\times N}$ каким-либо образом получена, то [2]

$$V_{N\times 1} = -P^{-1}_{N\times N}B^{T}_{N\times r}\left(B_{r\times N}P^{-1}_{N\times N}B^{T}_{N\times r}\right)^{-1}W_{r\times 1}. \quad (8)$$

Поскольку обусловленность матриц $A^{T}PA$ и $BP^{-1}B^{T}$ разная, то не одинаковыми, но близкими в пределах 5 %, будут компоненты векторов V, полученные по формулам (7) и (8).

Отметим, что матрица $B_{r\times N}$ может выбираться не всегда для всех r строк из $B^{*}_{N\times N}$, входящих в (3). Для плановой геодезической сети можно составлять на ЭВМ наиболее простые условные уравнения фигур, горизонта и дирекционных углов со своими значениями W, а остальные, дополняющие до r независимые уравнения, переписать из (3), с W, выбранными согласно (5), что приводит к автоматизированному коррелатно-параметрическому способу уравнивания. Например, при уравнивании геодезического четырехугольника триангуляции предлагаемым способом достаточно составить три условных уравнения фигур, а вместо одного из пяти возможных вариантов условия полюса выбрать из матриц B^{*} и V любую из восьми строк.

Отметим, что коррелатно-параметрический способ основывается на матричном выражении (3) или

$$B^{*} = E - AF, \quad (9)$$

где $E_{N\times N}$ – единичная матрица для N измерений; $A_{N\times t}$ – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок; $F = (A^{T}PA)^{-1}A^{T}P$ – расширенная псевдообратная матрица, содержащая весовую матрицу $P_{N\times N}$.

Умножим справа равенство (8) на матрицу A, в результате получим:

$$B^{*}A = EA - AFA = EA - AE = 0, \quad (10)$$

Это равенство служит доказательством известного тождества BA = 0, где $B_{r\times N}$ – матрица коэффициентов условных уравнений, которую можно найти путём выделения строк из матрицы $B^{*}_{N\times N}$ для избыточных измерений.

Переходя к вопросам оценки точности функций измеренных и уравненных величин, запишем известную формулу:

$$m_F = \mu\sqrt{\frac{1}{P_F}}. \quad (11)$$

Обратный вес функции $\left(\frac{1}{P_F}\right)$ определим:

- для параметрического способа:

$$\frac{1}{P_F} = f_P Q f_P^{T}, \quad (12)$$

где f_P – параметрическая функция; $Q = \left(A^{T}PA\right)^{-1}$;

- для коррелатного способа:

$$\frac{1}{P_F} = f_K P^{-1} f_K^{T} - f_K P^{-1}B^{T}\left(BP^{-1}B^{T}\right)^{-1}BP^{-1}f_K^{T}, \quad (13)$$

где f_K – оценочная функция при коррелатном уравнивании.

Поскольку f_K во много раз труднее получить, чем f_P, то в коррелатно-параметрическом способе предлагается равенство:

$$f_K = f_P F. \quad (14)$$

Следуя уравнению (13), получим:

$$\frac{1}{P_F} = f_P F P^{-1} F^{T} f_P^{T} = f_P Q f_P^{T}. \quad (15)$$

На основании этого вместо (13) запишем:

$$\frac{1}{P_F} = f_K P^{-1} f_K^{T}, \quad (16)$$

что справедливо, если f_K получать по (14).

Сравнивая (13) и (16), найдем равенство:

$$f_{\mathrm{K}}\mathrm{P}^{-1}\left(\mathrm{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{BP}^{-1}\mathrm{B}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathrm{BP}^{-1}f_{\mathrm{K}}^{\mathrm{T}}=0\,, \tag{17}$$

которое легко доказать, так как согласно (17) и (14)

$$\mathrm{BP}^{-1}f_{\mathrm{K}}^{\mathrm{T}}=\mathrm{BP}^{-1}F^{\mathrm{T}}f_{\mathrm{K}}^{\mathrm{T}}=\mathrm{BA}\left(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{PA}\right)^{-1}f_{\mathrm{P}}^{\mathrm{T}}=0 \tag{18}$$

из-за того, что BA = 0.

При применении (14) формулы (12) и (16) идентичны и могут использоваться при оценке точности в коррелатно-параметрическом способе уравнивания.

Выше отмечалось, чтобы перейти от B* к B на ЭВМ устанавливают в геодезической сети в произвольном порядке необходимые измерения, а коэффициенты уравнений для оставшихся r избыточных измерений выделяют по строкам из $\mathrm{B}^{*}_{\mathrm{N}\times\mathrm{N}}$ и записывают их в $\mathrm{B}_{r\times\mathrm{N}}$. При этом для r уравнений:

$$W_{r\times1}=\left(-V_{\mathrm{N}\times1}\right)_{\text{выделенное}}. \tag{19}$$

Из теории метода наименьших квадратов известна формула:

$$W_{\text{доп.}}=t\sqrt{\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}b_i^2\sigma_i^2}\,, \tag{20}$$

где t – вероятностный квантиль, принимаемый в зависимости от вероятности величины 2,0 или 2,5; b – коэффициенты условного уравнения (или строка матрицы $\mathrm{B}_{r\times\mathrm{N}}$); σ – стандарт измерений, участвующий при вычислении весов измерений.

Известно [4], что матрицы AF и B^{*} идемпотентны, т.е.

$$\mathrm{B}^{*}=\mathrm{B}^{*}\mathrm{B}^{*}\cdots\mathrm{B}^{*}. \tag{21}$$

Согласно (19) вместо (20) можно записать:

$$V_{\text{доп}}=t\sqrt{\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}(b^{*})_i^2\sigma_i^2}\,, \tag{22}$$

но в силу (21) имеем:

$$V_{\text{доп}}=t\sqrt{\mathrm{B}^{*}_{ii}\sigma_i^2}=t\sigma\sqrt{\mathrm{B}^{*}_{ii}}=t\sqrt{\mathrm{B}^{*}_{ii}/\mathrm{P}_i}\,. \tag{23}$$

Как отмечалось в работах [1, 2], диагональные элементы матрицы K_v суть дисперсии $m^2_{v_i}$ соответствующих поправок. Поэтому допуск для i-той поправки определяется формулой:

$$V_{\text{доп}\,i}=tm_{v_i}=t\sqrt{\mathrm{K}_{v_{ii}}}\,, \tag{24}$$

аналогично (23).

Формула (3) справедлива и для зависимых измерений, если записать

$$F=(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{K}^{-1}\mathrm{A})^{-1}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{K}^{-1}. \tag{25}$$

Например, зная K для углов при уравнивании по направлениям [4], можно реализовать уравнивание по направлениям, составляя A для углов коррелатным или параметрическим способами. При этом вектор поправок в углы при уравнивании по направлениям будет таким:

$$V_{t\times1}=\mathrm{B}^{*}_{\mathrm{N}\times\mathrm{N}}(L_{\mathrm{N}\times1})_{\text{для углов}}. \tag{26}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Коугия В.А. Сравнение методов обнаружения и идентификации ошибок измерений // Геодезия и картография. – 1998. – № 5. – С. 23 – 27.
2. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. – М.: Физматиздат, 1962. – 352 с.
3. Герасименко М.Д. Уравнивание триангуляции по методу условий с использованием однотипных условных уравнений // Изв. вузов. Сер. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1973. – № 3. – С. 43 – 46.
4. Маркузе Ю.И. Основы уравнительных вычислений: Учеб. пособие для вузов – М.: Недра, 1990. – 240 с.