УДК 528.063

О МАЛОСТИ ОТКЛОНЕНИЙ КООРДИНАТ ПУНКТОВ В МЕТОДЕ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ОТ ИХ ИСТИННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

канд. техн. наук П.М. ЛЕВДАНСКИЙ
(Пирамида строй, Минск),
С.Г. ШНИТКО
(Полоцкий государственный университет)

Приведены и применены на практике основные формулы многокритериальной оптимизации в линеаризованном варианте.

Как известно, в методе многокритериальной оптимизации (МК) используется две целевых функции [1]:

$$\Phi_1(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{m_i^{n_i}} \left| L_i(\mathrm{X}) \right|^{n_i}; \tag{1}$$

$$\Phi_2(\mathrm{X}, n) = min\, max\, \mathrm{M}_{\mathrm{K}}, \tag{2}$$

в которых N – число измеренных величин; m – средняя квадратическая ошибка измерения, полученная по МНК; n – показатель степени, отыскиваемый в процессе итераций; $L(\mathrm{X}) = T^{\text{выч.}} - T^{\text{изм.}}$ – свободный член измерения; M_{K} – ошибка положения пункта:

$$\mathrm{M}_{\mathrm{K}} = \mu \sqrt{Q_{\mathrm{K,K}} + Q_{\mathrm{K+1,K+1}}}$$

$$\mu_{\mathrm{MK}} = \sqrt{\frac{V_{MK}^{\mathrm{T}}\, diag\left(\frac{1}{m_i}\right)^{n_i} V_{\mathrm{MK}}}{r}}; \tag{3}$$

$$V_{\mathrm{MK}} = T_{MK}^{урав} - T^{изм}, \tag{4}$$

где r – количество избыточных измерений.

Минимум функции (1) находят как нелинейным, так и линейным методом [2]:

$$X_{\text{мк}}^{(j+1)} = X_{\text{мк}}^{(j)} - (A^T C A)^{-1} A^T diag\left(\frac{1}{n_i - 1}\right) C L\left(X^{(j)}\right) \tag{5}$$

или

$$\delta X^{(j)} = -F diag\left(\frac{1}{n_i - 1}\right) L\left(X^{(j)}\right), \tag{6}$$

$$C_i = n_i (n_i - 1) diag\left(\frac{1}{m_i}\right)^{n_i} \left(\left|V_i(X)\right| + 10^{-6}\right)^{n_i - 2}, \tag{7}$$

а обратная матрица весов

$$Q = F diag\left(m_i^{n_i}\right) F^T \tag{8}$$

используется при оценке точности функций измеренных и уравненных величин, включая M.

В статье приводятся значения:

$$\mu_{\mathrm{M}H\mathrm{K}} = \sqrt{\frac{V_{\text{мнк}}^{\mathrm{T}}\, diag\left(\frac{1}{\sigma_i}\right)^2 V_{\mathrm{M}H\mathrm{K}}}{r}}; \tag{9}$$

$\mu_{МК}$, вычисленные по формуле (3), и ошибки положения из равенства (8) для МК и для МНК:

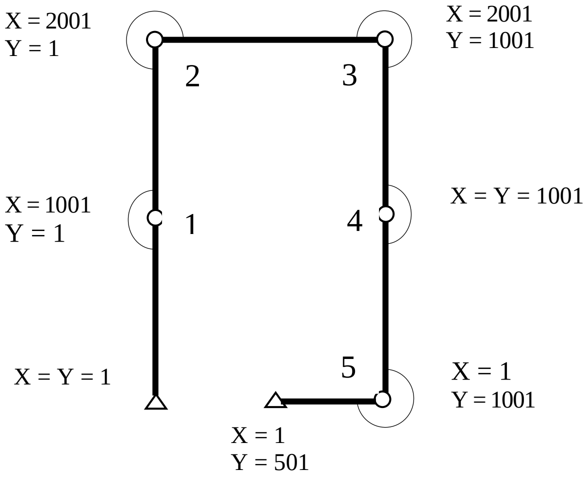
$$Q = \left(A^T diag\left(\frac{1}{\sigma_i} \right)^2 A \right)^{-1}, \tag{10}$$

$$X^{(j+1)}_{МНК} = X^{(j)}_{МНК} - F_{МНК} L_{МНК}; \; F_{МНК} = QA^T P. \tag{11}$$

В формулах (5) и (10) A – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок.

Метод МК особенно эффективен при обработке линейно-угловых сетей с завышенным значением числа обусловленности матрицы R с использованием $Q = R^{-1}$.

Приведём результаты обработки сети полигонометрии (рисунок) при $S_{ср.}$ = 1000 м; σ_β = 2,0″; σ_s = 0,02 м; число обусловленности ≈ 11600.



Ход полигонометрии плохого качества

Цель расчётов – сравнить $X^{ист.}$ (координаты даны на рисунке) с $X_{МНК}$ и $X_{МК}$, полученными по указанным выше формулам после задания в каждое измерение (по 10 разным вариантам) поправок (Δ_i – 6 сторон и 5 углов), сгенерированных датчиком псевдослучайных чисел в соответствии с σ_s и σ_β.

Расчёты приведены в таблице, где $\delta S_{МНК}$ и $\delta S_{МК}$ вычисляются по формуле:

$$\delta S_K = \sqrt{\delta x_K^2 + \delta y_K^2}. \tag{12}$$

Здесь $\delta_x = X_t - X_t^{ист.}$; $\delta_y = X_{t+1} - X_{t+1}^{ист.}$.

При этом

$$T^{изм.} = T^{ист.} + \Delta; \tag{13}$$

$$L = T^{выч.} - T^{изм}, \tag{14}$$

где $T^{выч.}$ получают по $X_{МНК}$ и $X_{МК}$ соответственно.

Результаты вычислений

№ п\п	$M_{МНК}$	$M_{МК}$	$\delta S_{МНК}$	$\delta S_{МК}$	$M_{МНК}$	$M_{МК}$	$\delta S_{МНК}$	$\delta S_{МК}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Вариант 1					Вариант 2			
μ	1.612	0.964			2.692	1.289		
1	0.137	0.026	0.149	0.157	0.230	0.035	0.198	0.188
2	0.270	0.048	0.317	0.332	0.450	0.064	0.384	0.363
3	0.288	0.059	0.401	0.417	0.482	0.087	0.370	0.350
4	0.163	0.042	0.213	0.222	0.272	0.068	0.211	0.201
5	0.078	0.036	0.114	0.118	0.130	0.063	0.077	0.073

Продолжение таблицы

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Вариант 3					Вариант 4			
μ	1.037	0.560			0.989	0.547		
1	0.088	0.013	0.021	0.019	0.084	0.014	0.034	0.033
2	0.174	0.024	0.049	0.044	0.166	0.025	0.039	0.033
3	0.186	0.031	0.036	0.031	0.177	0.031	0.071	0.065
4	0.105	0.024	0.027	0.026	0.100	0.024	0.036	0.034
5	0.050	0.022	0.018	0.019	0.048	0.021	0.019	0.018
Вариант 5					Вариант 6			
μ	0.756	0.506			2.414	1.088		
1	0.064	0.014	0.136	0.140	0.206	0.026	0.012	0.018
2	0.126	0.026	0.262	0.271	0.404	0.048	0.029	0.041
3	0.135	0.029	0.244	0.252	0.432	0.071	0.052	0.065
4	0.076	0.020	0.130	0.134	0.244	0.058	0.017	0.023
5	0.036	0.017	0.079	0.081	0.116	0.055	0.043	0.045
Вариант 7					Вариант 8			
μ	0.274	0.221			0.272	0.235		
1	0.023	0.006	0.240	0.242	0.023	0.006	0.066	0.064
2	0.046	0.012	0.490	0.494	0.045	0.011	0.131	0.127
3	0.049	0.013	0.555	0.559	0.049	0.012	0.119	0.116
4	0.028	0.009	0.304	0.306	0.027	0.008	0.068	0.067
5	0.013	0.007	0.158	0.158	0.013	0.006	0.048	0.047
Вариант 9					Вариант 10			
μ	0.818	0.411			1.029	0.581		
1	0.070	0.012	0.129	0.133	0.088	0.016	0.098	0.102
2	0.137	0.023	0.233	0.240	0.172	0.030	0.208	0.216
3	0.146	0.028	0.239	0.246	0.184	0.036	0.215	0.222
4	0.082	0.021	0.135	0.138	0.104	0.026	0.213	0.118
5	0.039	0.019	0.073	0.075	0.050	0.023	0.057	0.059

По данным таблицы можно сделать следующие выводы:

1. Положение определяемых пунктов в методе МК в девяти случаях из 10 ближе к истинным значениям примерно в 1,1…1,2 раза.
2. Во всех случаях $M_{МК} < M_{МНК}$, при плохой обусловленности системы $R = A^T PA$.
3. Метод МК эффективнее МНК при обработке плохо обусловленных систем нормальных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Применение многокритериальной оптимизации при проектировании и уравнивании геодезических сетей / В.И. Мицкевич, О.Г. Скорик, С.Г. Шнитко, В.В. Ялтыхов // Вестник Полоцкого гос. ун-та. Сер. С. Фундаментальные науки. – 2004. – № 4. – С. 77 – 79.
2. Вывод формулы для вычисления весов результатов измерений при многостепенной оптимизации / В.И. Мицкевич, А.А. Скрипленок, П.В. Субботенко, В.В. Ялтыхов // Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 2003. – 4 с. Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 1.09.03. – № 806. – ГД. 03.