

ГЕОДЕЗИЯ

УДК 528.063

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ ПУНКТА В СЛАБОМ МЕСТЕ ПРИ РАЗЛИЧНОМ НАЗНАЧЕНИИ ВЕСОВ ИЗМЕРЕНИЙ В НЕСВОБОДНОЙ, СВОБОДНОЙ И НУЛЬ-СВОБОДНОЙ УГЛОВОЙ, ЛИНЕЙНО-УГЛОВОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ И ПОЛИГОНОМЕТРИИ

М.Г. ГЛЕБКО

(Полоцкий государственный университет)

Выполнена оценка точности положения пунктов на примерах геодезических сетей, проведен анализ результатов и сделаны выводы.

1. Использование традиционного метода установления весов измерений

Будем выполнять сплошную оценку точности положения пунктов на примерах геодезических сетей триангуляции, трилатерации и линейно-угловой триангуляции (рис. 1).

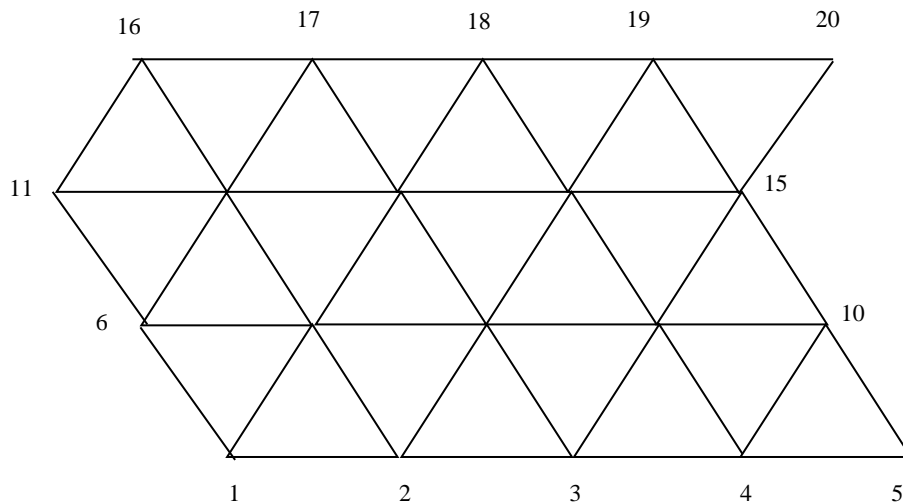


Рис. 1. Сети триангуляции, трилатерации и линейно-угловые

Также выполним обработку сети полигонометрии (рис. 2, табл. 1).

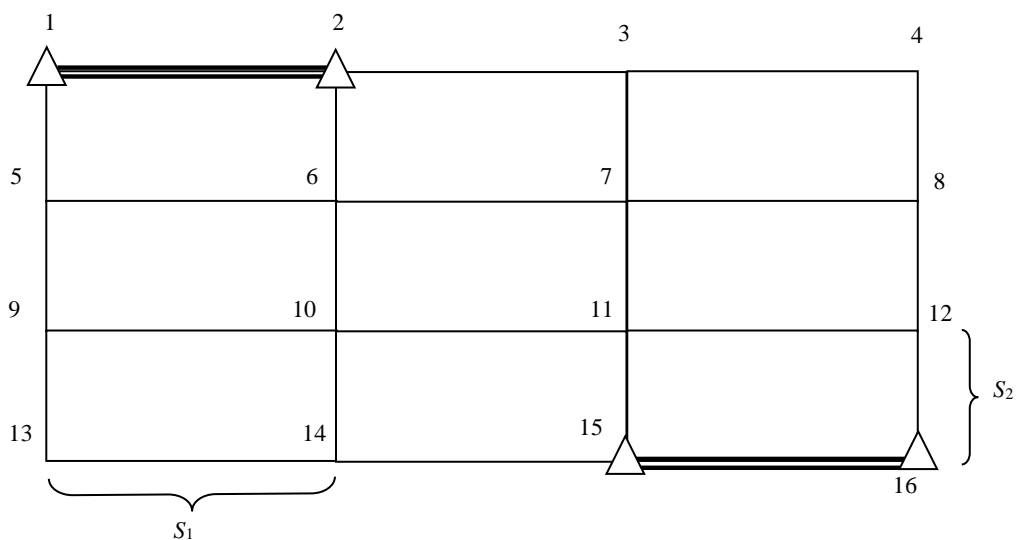


Рис. 2. Сети полигонометрии

Таблица 1

Длины сторон в полигонометрии

Сеть	Длины сторон	
	S ₁ , м	S ₂ , м
D	1000	1000
E	1000	500
F	1000	250
G	2000	250
H	3000	250

Будем обрабатывать несвободные (четыре исходных пункта), свободные (два исходных пункта с номерами 1, 2) и нуль-свободные сети (без исходных пунктов). Если несвободные и свободные сети можно уравнивать обычным путем [1], то нуль-свободные сети будем уравнивать по алгоритму, опубликованному в [2], с использованием формул:

$$Q = FP^{-1}F^T; \tag{1}$$

$$M_i = \sigma_0 \sqrt{Q_{i,i} + Q_{i+1,i+1}}; \tag{2}$$

$$F = (A^T PA)^+ A^T P; \tag{3}$$

$$(A^T PA)^+ = (A^T PA + R^T R)^{-1} - R^T (RR^T R R^T)^{-1} R; \tag{4}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \dots 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \dots 0 & 1 \\ -y_1 & x_1 & -y_2 & x_2 \dots -y_k & x_k \\ x_1 & y_1 & x_2 & y_2 \dots x_k & y_k \end{pmatrix} \tag{5}$$

где $P_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$ – веса измерений; A – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок; x_i, y_i – координаты пунктов относительно центральной точки сети:

$$x_{cp.} = \sum_k \frac{x_i}{k}; \quad y_{cp.} = \sum_k \frac{y_i}{k}.$$

В процессе исследований мы будем по-разному задавать P_i и выполнять оценку точности по формуле (2), выписывая номер пункта, для которого M максимальна.

Отметим, что формулы (3) – (5) пригодны лишь для нуль-свободной геодезической сети. При этом нужно учитывать, что в нуль-свободной триангуляции должна быть известна хотя бы одна сторона.

В этом подразделе для вычисления веса применим формулу:

$$P_s = \frac{\sigma_\beta^2}{\sigma_s^2},$$

полагая что $P_\beta = 1$; $\sigma_\beta = 2,0''$; $\sigma_s = 0,03$ м.

Результаты вычислений представлены в таблицах 2 – 5, где N – номер пункта в слабом месте сети с ошибкой положения M .

Таблица 2

Сеть триангуляции

Имя сети	4 исходных пункта		2 исходных пункта		Нет исходных пунктов	
	N	M	N	M	N	M
A	16	0,022	2	0,048	5	0,084
B	11	0,021	5	0,042	5	0,078
C	6	0,012	5	0,048	5	0,070

Таблица 3

Сеть трилатерации

Имя сети	4 исходных пункта		2 исходных пункта		Нет исходных пунктов	
	N	M	N	M	N	M
A	20	0,080	20	0,187	5	0,059
B	11	0,078	5	0,173	5	0,056
C	6	0,060	5	0,224	6	0,059

Таблица 4

Сеть линейно-угловой триангуляции

Имя сети	4 исходных пункта		2 исходных пункта		Нет исходных пунктов	
	N	M	N	M	N	M
A	16	0,019	20	0,033	5	0,019
B	11	0,019	5	0,031	11	0,018
C	6	0,012	5	0,034	6	0,019

Таблица 5

Сеть полигонометрии

Имя сети	4 исходных пункта		2 исходных пункта		Нет исходных пунктов	
	N	M	N	M	N	M
D	7	0,032	16	0,052	2	0,030
E	7	0,032	16	0,052	2	0,031
F	10	0,031	16	0,051	2	0,031
G	10	0,034	16	0,063	2	0,033
H	7	0,037	16	0,076	14	0,035

По данным таблиц 2 – 5 можно сделать следующие выводы:

1. Чем больше исходных пунктов, тем меньше ошибка положения в слабом месте триангуляции.
2. В трилатерации наименьшие ошибки положения присущи для нуль-свободной сети.
3. В линейно-угловой триангуляции величины M равномерно покрывают весь объект, делая одинаковыми M как вдали, так и вблизи от исходных пунктов. Аналогичный эффект наблюдается в полигонометрии.
4. Нуль-свободная трилатерация лучше несвободной по величинам M на 20 %.
5. Нуль-свободная линейно-угловая сеть дает те же результаты в величинах M , что и несвободная.

2. Применение ошибок центрирования теодолита

Здесь для вычисления веса по формуле $P_s = \frac{\sigma_\beta^2}{\sigma_s^2}$; принимаем $\sigma_\beta = \frac{1,4\sigma_c\rho''}{S}$,

где σ_c – ошибка центрирования, равная 0,01 м; S – длина стороны; $\rho'' = 206265$ [3].
Результаты вычислений представлены в таблицах 6 – 8.

Таблица 6

Сеть триангуляции

Имя сети	4 исходных пункта		2 исходных пункта		Нет исходных пунктов	
	N	M	N	M	N	M
A	16	0,041	20	0,091	5	0,098
B	11	0,039	5	0,080	5	0,092
C	6	0,022	5	0,091	5	0,098

Таблица 7

Сеть линейно-угловой триангуляции

Имя сети	4 исходных пункта		2 исходных пункта		Нет исходных пунктов	
	N	M	N	M	N	M
A	16	0,030	20	0,052	5	0,028
B	11	0,030	5	0,050	5	0,024
C	6	0,020	5	0,055	5	0,023

Таблица 8

Сеть полигонометрии

Имя сети	4 исходных пункта		2 исходных пункта		Нет исходных пунктов	
	N	M	N	M	N	M
D	13	0,038	16	0,079	3	0,032
E	13	0,037	16	0,074	15	0,034
F	7	0,038	16	0,073	14	0,034
G	7	0,038	16	0,074	2	0,035
H	7	0,038	16	0,074	14	0,035

По данным таблиц 6 – 8 можно сделать следующие выводы:

1. Чем больше исходных пунктов, тем меньше ошибка положения в слабом месте триангуляции.
2. В линейно-угловой триангуляции величина *M* равномерно покрывает весь объект, делая одинаковыми *M* как вдали, так и вблизи относительно исходных пунктов. Аналогичный эффект наблюдается в полигонометрии.
3. Трилатерацию мы не рассматривали, так как в ней нет угловых измерений и расчет будет совпадать со значениями таблицы 3.
4. Нуль-свободная линейно-угловая сеть дает те же результаты в величинах *M*, что и несвободная.

3. Применение относительной ошибки измерения сторон

Как и в предыдущих случаях, веса вычисляются по формуле: $P_s = \frac{\sigma_\beta^2}{\sigma_s^2}$,

где σ_s – будет получена из выражения $\sigma_s = S / Z_s$ (*S* – длина стороны; *Z_s* – знаменатель относительной ошибки измерения сторон, который примем равным 25000).

Результаты вычислений представлены в таблицах 9 – 11.

Здесь мы не будем обрабатывать трилатерацию, помещая расчет в таблицу 13. Поскольку в триангуляции нет сторон, то в таблице 9 даны расчеты только для нуль-свободной сети, для которой, как указывалось выше, должна быть задана хотя бы одна сторона.

Таблица 9

Сеть триангуляции

Имя сети	4 исходных пункта		2 исходных пункта		Нет исходных пунктов	
	N	M	N	M	N	M
A	–	–	–	–	5	0,121
B	–	–	–	–	5	0,112
C	–	–	–	–	5	0,098

Таблица 10

Сеть линейно-угловой триангуляции

Имя сети	4 исходных пункта		2 исходных пункта		Нет исходных пунктов	
	N	M	N	M	N	M
A	16	0,020	20	0,037	5	0,024
B	11	0,020	5	0,034	11	0,024
C	6	0,012	5	0,037	6	0,025

Таблица 11

Сеть полигонометрии

Имя сети	4 исходных пункта		2 исходных пункта		Нет исходных пунктов	
	N	M	N	M	N	M
D	7	0,042	15	0,070	2	0,039
E	7	0,038	15	0,050	2	0,033
F	7	0,034	15	0,044	14	0,032
G	10	0,067	15	0,084	2	0,063
H	7	0,100	15	0,125	14	0,094

По данным таблиц 9 – 11 можно сделать следующие выводы:

1. В линейно-угловой сети величина M равномерно покрывает весь объект, делая одинаковыми M как вдали, так и вблизи исходных пунктов. Аналогичный эффект наблюдается в полигонометрии.
2. Нуль-свободная линейно-угловая сеть дает те же результаты в величинах M , что и несвободная.

4. Совместное применение ошибок центрирования и относительной ошибки измерения сторон

Как и ранее, вес будем вычислять по формулам: $P_s = \frac{\sigma_p^2}{\sigma_s^2}$; $\sigma_p = \frac{1,4\sigma_c p''}{S}$,

где σ_s – будет получена из выражения: $\sigma_s = S/Z_s$ (S – длина стороны; Z_s – знаменатель относительной ошибки измерения сторон, который примем равным 25000).

Результаты вычислений представлены в таблицах 12 – 15.

Таблица 12

Сеть триангуляции

Имя сети	4 исходных пункта		2 исходных пункта		Нет исходных пунктов	
	N	M	N	M	N	M
A	–	–	–	–	5	0,131
B	–	–	–	–	5	0,122
C	–	–	–	–	5	0,112

Таблица 13

Сеть трилатерации

Имя сети	4 исходных пункта		2 исходных пункта		Нет исходных пунктов	
	N	M	N	M	N	M
A	20	0,115	20	0,274	5	0,084
B	11	0,111	5	0,250	11	0,079
C	6	0,085	5	0,318	6	0,081

Таблица 14

Сеть линейно-угловой триангуляции

Имя сети	4 исходных пункта		2 исходных пункта		Нет исходных пунктов	
	N	M	N	M	N	M
A	16	0,034	20	0,058	5	0,031
B	11	0,034	5	0,055	5	0,029
C	6	0,022	5	0,060	6	0,029

Таблица 15

Сеть полигонометрии

Имя сети	4 исходных пункта		2 исходных пункта		Нет исходных пунктов	
	N	M	N	M	N	M
D	10	0,046	16	0,091	3	0,041
E	7	0,040	16	0,067	14	0,036
F	7	0,038	16	0,059	3	0,035
G	10	0,068	15	0,087	14	0,064
H	7	0,100	15	0,124	2	0,094

По данным таблиц 12 – 15 можно сделать следующие выводы:

1. Наименьшая ошибка M в трилатерации получена для нуль-свободной сети.
2. В линейно-угловой триангуляции величины M равномерно покрывают весь объект, делая одинаковыми M как вдали, так и вблизи относительно исходных пунктов. Аналогичный эффект наблюдается в полигонометрии.
3. Нуль-свободная сеть полигонометрии дает те же результаты, что и несвободная.

Сделаем **обобщающие выводы** по всем результатам вычислений, сравнивая отдельно триангуляцию, трилатерацию, линейно-угловую триангуляцию и полигонометрию в следующих 4-х случаях назначения весов:

случай 1 – веса вычисляются по σ_B, σ_S ;

случай 2 – веса вычисляются по σ_c, σ_S ;

случай 3 – веса вычисляются по σ_B, Z_S ;

случай 4 – веса вычисляются по σ_c, Z_S .

Для **триангуляции** можно сделать по 4-м случаям следующие выводы:

1. Для несвободной сети, при заданном весе в 1-м случае M меньше по сравнению со 2-м случаем.
2. Для нуль-свободной триангуляции величина M возрастает, последовательно переходя от случая 1 к случаю 4.

Для **трилатерации**, сравнивая все случаи, можно сделать следующие выводы:

1. В случае 1 для несвободной трилатерации M меньше на 50 % по сравнению со случаем 4. Следовательно, не во всех случаях выгодно пользоваться знаменателем Z .
2. Для нуль-свободной трилатерации вместо 50 %, указанных выше, имеем 15 % ухудшение в оценке точности.

Для **линейно-угловой триангуляции** можно сделать следующий вывод: независимо от случаев 1 – 4 мы получаем одинаковые результаты оценки точности в положении пунктов.

Для **полигонометрии** с разными длинами сторон можно сделать следующие выводы:

1. Первый и второй случаи дают одинаковые результаты оценки точности.
2. Третий и четвертый случаи дают одинаковые и завышенные по сравнению со случаями 1 – 2 результаты оценки точности.

Общий вывод: для оценки точности плановых геодезических сетей следует пользоваться весами, задавая их традиционным способом в соответствии со случаем 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Машимов М.М. Уравнивание геодезических сетей. – М.: Недра, 1979. – 367 с.
2. Герасименко М.Д., Шароглазова Г.А. Определение современных движений земной коры из повторных измерений // Геодезия и картография. – 1985. – № 7. – С. 25 – 29.