УДК 539.3

О ЛОКАЛИЗОВАННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ВОЛНОВОДА, ЛЕЖАЩЕГО НА ВЯЗКОУПРУГОМ ОСНОВАНИИ

П. А. ГЛАДКОВ
(Витебский государственный университет им. П.М. Машерова)

Рассматривается начально-краевая задача для волнового уравнения в упругой среде, ограниченной поверхностью волновода вращения, искривленного в пространстве. Предполагается, что волновод граничит с вязкоупругой неоднородной средой. Асимптотическое решение построено в виде бегущих в продольном направлении волновых пакетов. Проведен численный анализ построенного решения. Обнаружен эффект отражения волновых пакетов от некоторого поперечного сечения волновода в случае неоднородности внешней вязкоупругой среды.

Введение

В работе строится асимптотическое решение задачи о волновом движении упругой среды, ограниченной поверхностью волновода с центральной осью в виде заданной параметрически пространственной кривой,

Нестационарное решение, локализованное возле пространственно-временного луча, было получено в [1, 2]. Другой метод построения стационарных и нестационарных локализованных решений краевых задач предложен В.П. Масловым в [3]. Нестационарные задачи о волновом движении в упругих средах и зависимость их решений от начальных условий рассматривались в [4-6].

Для решения задачи в настоящей работе используется комплексная ВКБ-процедура, описанная в [7] для исследования волновых процессов в топкой цилиндрической оболочке. Выбранный подход подразумевает сведение трехмерной краевой задачи к последовательности одномерных задач [7, 8] или двухмерных краевых задач [9], решение которых локализовано вблизи поперечного сечения волновода, называемого центром волнового пакета. Упомянутый метод применялся для изучения бегущих волновых пакетов в тонких оболочках [10 - 12], а также в прямом волноводе с круглым поперечным сечением [8]. В работе [9] рассматривается решение задачи о волновом движении упругой среды, ограниченной поверхностью волновода произвольного сечения с прямой центральной осью.

1. Постановка задачи

Введем криволинейную систему координат (r, φ, z) следующим образом:

$$\begin{cases} x = X(z) + r\sin\varphi, \\ y = Y(z) - r\cos\varphi, \\ \quad z = z. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь x, y, z – декартовы прямоугольные координаты. Функции $X(z)$, $Y(z)$ задают искривленную в пространстве центральную ось волновода, ограниченного поверхностью

$$\Omega = \left\{(r, \varphi, z): \ \ r = \tilde{f}[z], \ \ 0 \le \varphi < 2\pi, \ \ -\infty < z < +\infty\right\}.$$

Уравнение, определяющее волновой процесс, имеет вид:

$$\Delta^* U - \frac{1}{c^2(z)} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0. \tag{2}$$

Здесь Δ^* – оператор Лапласа в криволинейных координатах (1):

$$\Delta^* = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + g(z)\frac{\partial^2}{\partial z^2} - g^2(z)\left[X'(z)X''(z) + Y'(z)Y''(z)\right]\frac{\partial}{\partial z},$$

где

$$g(z) = \frac{1}{1 + X'^2(z) + Y'^2(z)}.$$

Считаем, что волновод находится в неоднородной вязкоупругой среде с переменными коэффициентами постели $\alpha(z)$ и вязкости $\mu(z)$. Тогда граничные условия могут быть записаны в виде:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \bar{n}} + \alpha(z)U + i\tilde{\mu}(z)\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{\Omega} = 0. \tag{3}$$

Предполагается, что $X(z)$, $Y(z)$, $\tilde{f}(z)$, $c(z)$, $\alpha(z)$, $\tilde{\mu}(z)$ – непрерывные и бесконечно дифференцируемые по z функции, более того,

$$\theta,\ \frac{\partial^j \theta}{\partial z^j} \sim 1,\ j = 1,2,\ldots \text{ при } \varepsilon \to 0,$$

где θ – любая из вышеупомянутых функций. Малый параметр ε введен для изучения семейств коротких волн, бегущих в направлении оси z, с мгновенной частотой $\varepsilon^{-1}\omega(t)$ и длиной волны порядка ε. Также предполагается, что максимальный диаметр сечения волновода и коэффициент вязкости $\tilde{\mu}(z)$ в условии (3) также имеют порядок ε, таким образом $\tilde{\mu}(z) = \varepsilon\mu(z)$.

2. Метод решения

В соответствии с методикой, предложенной в [7], решение задачи (2), (3) будем конструировать в виде семейства волн, бегущих вдоль искривленной оси волновода и локализованных в окрестности плоскости $z = q(t)$, которую в дальнейшем будем называть центром волнового пакета (ВП).

Локальная система координат вводится аналогично случаю [8]:

$$z = q(t) + \varepsilon^{1/2}\xi,\quad r = \varepsilon\rho.$$

При этом $0 < \rho < f[\varphi, z] = \varepsilon^{-1}\tilde{f}[\varphi, z]$, а уравнение (2) может быть переписано, как

$$\begin{aligned} &c^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \varepsilon g(z)\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \varepsilon^{3/2} g^2(z)\left[X'(z)X''(z) + Y'(z)Y''(z)\right]\frac{\partial U}{\partial \xi}\right) - \\ &-\varepsilon^2\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2\varepsilon^{3/2}\dot{q}\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial t} - \varepsilon\dot{q}^2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \varepsilon^{3/2}\ddot{q}\frac{\partial U}{\partial \xi} = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Функции $f(z)$, $c(z)$, $g(z)$, $\alpha(z)$, $\mu(z)$, $X(z)$, $Y(z)$ вблизи центра ВП $z = q(t)$ раскладываются в ряд Тейлора, например:

$$f(z) = f[q(t)] + \varepsilon^{1/2} f'[q(t)]\xi + \frac{1}{2}\varepsilon f''[q(t)]\xi^2 + \cdots.$$

Решение краевой задачи будем искать в виде [8]:

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} u_k(\rho, \xi, t)\exp\left\{i\left[\varepsilon^{-1} S(\xi, t, \varepsilon) + m\varphi\right]\right\}, \tag{5}$$

$$S = \int \omega(t)\,dt + \varepsilon^{1/2} p(t)\xi + \tfrac{1}{2}\varepsilon\, b(t)\xi^2,\ \operatorname{Im} b(t) > 0, \tag{6}$$

где $u_k(\rho, \xi, t)$ – полиномы по ξ, $p(t)$ – волновое число, $b(t)$ характеризует ширину ВП.

Подстановка (5), (6) в уравнение (4) приводит к последовательности краевых задач:

$$\sum_{j=0}^{k} L_j u_{k-j} = 0,\ k = 1,2,\ldots; \tag{7}$$

$$\sum_{j=0}^{k} \Gamma_j u_{k-j}\Big|_{\rho = f[q(t)]} = 0,\ k = 1,2,\ldots. \tag{8}$$

$$L_0 = c^2\left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} - \left(\frac{m^2}{\rho^2} + p^2 g\right)\right] + (\omega - \dot{q}p)^2;$$

$$L_1 = \left(b\frac{\partial L_0}{\partial p} + \frac{\partial L_0}{\partial q} + \dot{p}\frac{\partial L_0}{\partial \omega}\right)\xi - i\frac{\partial L_0}{\partial p}\frac{\partial}{\partial \xi};$$

$$L_2=\frac{1}{2}\left(b^2\frac{\partial^2 L_0}{\partial p^2}+2b\frac{\partial^2 L_0}{\partial p\partial q}+\frac{\partial^2 L_0}{\partial q^2}+\frac{\partial^2 L_0}{\partial \omega^2}+2\dot p\frac{\partial^2 L_0}{\partial q\partial \omega}+2\dot p b\frac{\partial^2 L_0}{\partial p\partial \omega}+\dot b\frac{\partial L_0}{\partial \omega}\right)\xi^2-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 L_0}{\partial p^2}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}-i\left(b\frac{\partial^2 L_0}{\partial p^2}+\frac{\partial^2 L_0}{\partial p\partial q}+\dot p\frac{\partial^2 L_0}{\partial p\partial \omega}\right)\xi\frac{\partial}{\partial \xi}-i\frac{\partial L_0}{\partial \omega}\frac{\partial}{\partial t}-$$

$$-i\left(\frac{1}{2}b\frac{\partial^2 L_0}{\partial p^2}+\frac{1}{2}\dot\omega\frac{\partial^2 L_0}{\partial \omega^2}+\dot p\frac{\partial^2 L_0}{\partial p\partial \omega}-\ddot q p\right)-iN\,.$$

Операторы L_0, L_1 аналогичны [8, 9], L_2 содержит дополнительное слагаемое

$$N=pc^2g^2\left[X'X''+Y'Y''\right].$$

Операторы Γ_j, фигурирующие в граничных условиях, имеют следующий вид:

$$\Gamma_0 = \alpha+\frac{\partial}{\partial\rho};$$

$$\Gamma_1 = \alpha\xi f'\frac{\partial}{\partial\rho}+\alpha'\xi+\xi f'\frac{\partial^2}{\partial\rho^2};$$

$$\Gamma_2 = \frac{\alpha}{2}\xi^2\left(f''\frac{\partial}{\partial\rho}+f'^2\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\right)+\alpha'\xi^2 f'\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\alpha''}{2}\xi^2+\frac{1}{2}\xi^2\left(f''\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+f'^2\frac{\partial^3}{\partial\rho^3}\right)-ipf'-\mu(\omega-\dot q p)\,.$$

3. Построение решения в форме бегущих волновых пакетов

В нулевом приближении имеем однородную краевую задачу:

$$L_0u_0 \equiv c^2\left[q(t)\right]\left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_0}{\partial\rho}-\left(\frac{m^2}{\rho^2}+p^2g\right)u_0\right]+\left(\omega-\dot q\,p\right)^2u_0 = 0; \tag{9}$$

$$\alpha u_0+\left.\frac{\partial u_0}{\partial\rho}\right|_{\rho=f[q(t)]} = 0\,. \tag{10}$$

Решение (9), (10) может быть сведено к задаче на собственное значение:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial y}{\partial\rho}-\frac{m^2}{\rho^2}y+\lambda y=0\,,\quad \alpha y+\left.\frac{\partial y}{\partial\rho}\right|_{\rho=f[q(t)]} = 0\,. \tag{11}$$

Пусть $\lambda_n\left[q(t)\right]$ – собственное значение краевой задачи (11), а $y_n\left[\rho,q(t)\right]$ – соответствующая этому значению собственная функция. Так как координата z не присутствует явным образом в задаче (9), (10), решение этой задачи может быть представлено в виде:

$$u_0 = P_0(\xi,\ t)y_n\left[\rho,q(t)\right],$$

но лишь в том случае, если выполняется условие:

$$\omega(t)=\dot q(t)p(t)-H^{\pm}[p(t),q(t)]\,.$$

Здесь $P_0(\xi,t)$ – неизвестный полином по ξ, а $H^{\pm}(p,q)=\pm c(q)\sqrt{p^2g(q)+\lambda_n(q)}$ – функция Гамильтона. Знаки ($\pm$) указывают на наличие двух веток (положительной и отрицательной) решения. В дальнейшем эти знаки будем опускать.

В [8] показано, что условие разрешимости неоднородной краевой задачи в первом приближении приводит к системе Гамильтона:

$$\dot q=\partial H/\partial p\,,\ \ \dot p=-\partial H/\partial q\,.$$

При этом функция u_1 может быть представлена в виде:

$$u_1(\rho,\xi,t) = P_1(\xi,t)y(\rho,t) + u_1^{(P)}(\rho,\xi,t),$$

где $P_1(\xi,t)$ – неизвестный полином по ξ; $u_1^{(P)}(\rho,\xi,t)$ – частное решение уравнения (7) при $k = 1$.

Условие существования решения u_2 неоднородной краевой задачи (7), (8) во втором приближении ($k = 2$) влечет за собой уравнение Риккати:

$$\dot{b} + \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} b^2 + 2\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} b + \frac{\partial^2 H}{\partial q^2} = 0$$

и амплитудное уравнение (см. выкладки [8]):

$$\chi_0(t)\frac{\partial^2 P_0}{\partial \xi^2} + \chi_1(t)\xi\frac{\partial P_0}{\partial \xi} + \chi_2\frac{\partial P_0}{\partial t} + \chi_3(t)P_0 = 0, \tag{12}$$

где

$$\chi_0(t) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}; \quad \chi_1(t) = i\left(b\frac{\partial^2 H}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q}\right); \ \chi_2 = i;$$

$$\chi_3(t) = \frac{i}{2H}\left\{bH\frac{\partial^2 H}{\partial p^2} - \dot{\omega} - 2\frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} + \ddot{q}p - pc^2 g^2\left[X'X'' + Y'Y''\right] - \int_0^{f(q)} \rho \ y\left(\frac{\partial L_0}{\partial \omega}\frac{\partial y}{\partial t}\right)d\rho + Z(t)\right\}.$$

В сравнении со случаем [8], коэффициент $\chi_3(t)$ содержит дополнительное слагаемое $Z(t)$, характеризующее поправку, которую добавляет к значению амплитуды $P_0(t)$ коэффициент $h(z)$ из граничного условия (3):

$$Z(t) = c^2 f\left[pf' - i\mu H\right]y^2\Big|_{\rho=f}.$$

4. Пример

Для анализа влияния граничных условий на динамику ВП рассмотрим прямой однородный волновод постоянного сечения:

$$c(z) = f(z) = g(z) = 1. \tag{13}$$

Численные расчеты показывают, что в случае граничных условий [8] при выполнении (13) координата центра ВП будет изменяться по линейному закону, т.е. ВП будет двигаться прямолинейно, без отражений от поперечной плоскости.

Рассмотрим теперь граничные условия (3) со следующими параметрами:

$$\mu(z) = 0; \ \alpha(z) = \exp(1/5z). \tag{14}$$

Ставится цель подтвердить или опровергнуть факт влияния коэффициентов (14) на возникновение эффекта отражения ВП от поперечного сечения волновода. На рисунках 1, 2 представлены результаты численного решения системы Гамильтона.

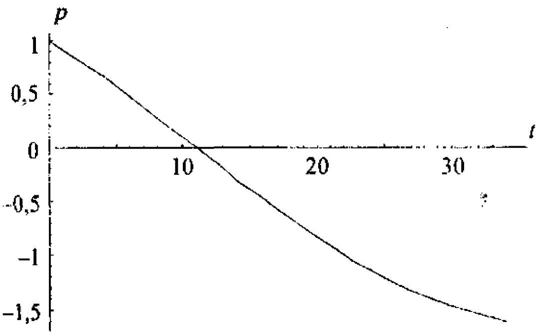

Рис. 1. Зависимость параметра p от времени

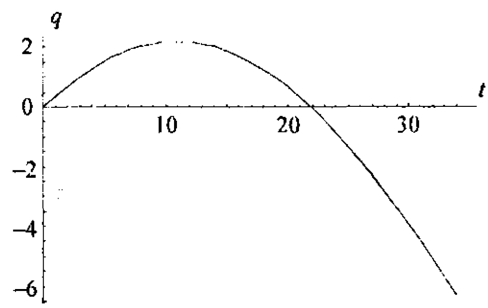

Рис. 2. Зависимость параметра q от времени

Как видно из рисунка 2, существует такое значение $t = t_r$, что при $0 < t < t_r$ выполняется неравенство $\dot{q} > 0$, а для $t_r < t < \infty$ справедливо $\dot{q} < 0$. Отражение ВП от поперечного сечения волновода происходит при его движении в направлении возрастания функции $\alpha(z)$. После отражения ВП движется прямолинейно в направлении убывания $\alpha(z)$. Таким образом, доказана зависимость направления движения центра ВП от значений коэффициента $\alpha(z)$. На рисунках 3, 4 изображены результаты численного интегрирования уравнения Риккати и амплитудного уравнения соответственно.

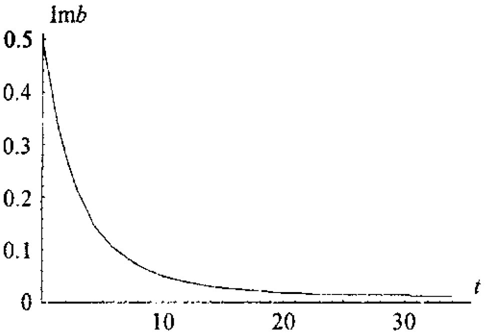

Рис. 3. Зависимость параметра b от времени

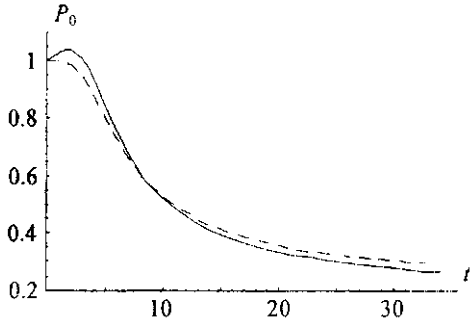

Рис. 4. Зависимость амплитуды от времени

При этом на рисунке 3 видно, что ВП «расплывается» со временем. Расчет амплитуды был произведен с двумя различными начальными условиями. Случай нулевой начальной скорости обозначен на рисунке 4 пунктирной линией, случай единичной начальной скорости - сплошной линией. Рисунок 4 представляет собой классическую картину затухания амплитуды.

Заключение

В работе впервые построено формальное асимптотическое решение начально-краевой задачи с граничными условиями (3) в форме волновых пакетов, бегущих в направлении искривленной оси волновода. Задача определяет волновое движение упругой среды, ограниченной поверхностью пространственного волновода переменного сечения.

Найден новый вид амплитудного уравнения (12).

Получено численное решение системы Гамильтона, уравнения Риккати и амплитудного уравнения.

Анализ численного решения системы Гамильтона позволил обнаружить эффект отражения центра волнового пакета от некоторого поперечного сечения волновода при движении волнового пакета в направлении возрастания коэффициента постели a(z).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабич В.М., Булдырев В.С., Молотков И.А. Пространственно-временной лучевой метод. Линейные и нелинейные волны. - Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. - 272 с.
2. Kiselev A,P. Quasiphotons and nondispersive waves // Proceedings of the International seminar Day of Difffaction-97. - St. Petersburg, Russia. - 1997. - P. 87 - 90.
3. Маслов В.П. Комплексный ВКБ-метод в нелинейных уравнениях. - М.: Наука, 1977. - 384 с.
4. Whitham G,B. Linear and Nonlinear Waves. - Wiley, New York, 1974. - 636 p.
5. Bretherton F.P. Propagation in slowly varying waveguides // Proc. Roy. Soc. - London, - 1968. - A 302. - P. 555 - 576.
6. Tromp J. and Dahlen F.A. The Berry phase of a slowly varying waveguide // Proc. Roy. Soc. - London. 1992.-A 437.-P.329 -342.
7. Михасев Г.И. О комплексном ВКБ-решении задачи Коши для уравнений движения тонкой цилиндрической оболочки // Доклады АН Беларуси. - 1994. -Т. 38, № 4. - С. 24 - 27.
8. Mikhasev G.I. Traveling wave packets in a non-homogeneous narrow medium bounded by a surface of revolution // Wave Motion. - 2003. - Vol. 37, № 3. - P. 207- 217,
9. Гладков П.А. Волновые пакеты в упругом волноводе произвольного сечения // Вестник ВГУ - 2005. -Вып. 36.-С. 125 - 129.
10. Михасев Г.И. Локализованные семейства изгибных волн в некруговой цилиндрической оболочке с косыми краями // Прикл. математика и механика. - 1996. - Т. 60, № 4. - С. 635 - 643.
11. Авдошка И.В., Михасев Г.И. Волновые пакеты в тонкой цилиндрической оболочке с учетом воздействия внешних сил // Веснік ВДУ. - 1997. - № 3 (5). - С, 50 - 54.
12. Mikhasev G.I. Travelling wave packets in an infinite thin cylindrical shell under internal pressure // Journal of Sound and Vibration. - 1998. - Vol. 209. - P. 543 - 559.