

МЕХАНИКА

УДК 539.3

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ
СЛОИСТЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

канд. физ.-мат. наук, доц. М.Г. БОТОГОВА
(Белорусский национальный технический университет, Минск),
д-р физ.-мат. наук, проф. Г.И. МИХАСЕВ, Е.А. КОРЧЕВСКАЯ
(Витебский государственный университет им. П.М. Машерова)

Выведены дифференциальные уравнения слоистых композитных оболочек с комплексными коэффициентами, учитывающими вязкоупругие свойства материала. Получены формулы для собственных частот и форм колебаний указанных оболочек с учетом вязкоупругих свойств составляющих слоев и поперечных сдвигов. Решена задача оптимального проектирования трехслойных оболочек, имеющих фиксированную массу, с целью увеличения наименьших частот собственных колебаний.

Введение

Элементы многих инженерных конструкций, используемых в различных областях человеческой деятельности, представляют собой тонкие слоистые оболочки. Особое внимание уделяется исследованию вопросов, связанных с тонкими оболочками в силу того, что такие конструкции сочетают в себе высокую прочность и относительно малый вес. Необходимым элементом исследования на стадии проектирования оболочечных конструкций является определение собственных частот и форм малых колебаний. Использование в инженерной практике полимерных материалов делает обязательным учёт вязкоупругих свойств при исследовании низкочастотных колебаний оболочек.

Исследования колебаний вязкоупругих оболочек проводились в ряде работ [1 - 6]. В частности в [1], с использованием асимптотического метода, собственные формы вязкоупругих колебаний построены в виде функций, убывающих во времени и локализованных вблизи образующей, испытывающей наибольшую осевую нагрузку. В работе [2] произведен анализ параметров демпфируемых свободных колебаний слоистых композитных цилиндрических оболочек с использованием концепции комплексного модуля упругости. Применена теория деформаций поперечного сдвига, согласно которой предполагается равномерное распределение их по толщине оболочки, и введен компенсирующий поправочный коэффициент. В работе [1] авторы сформулировали модель для анализа частот колебаний трубки с кратным числом слоев демпфирования. Трехслойная несимметричная по толщине круглая пластинка с легким наполнителем рассматривается в [4]. Здесь для описания кинематики пакета приняты гипотезы ломаной нормали: в несущих слоях справедливы гипотезы Кирхгофа, в легком наполнителе нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол. Материалы слоев здесь приняты линейно-вязкоупругими. В работе [5] представлена конечно-элементная формулировка свободных затухающих колебаний. Методом конечных элементов, используя теорию деформации сдвига первого порядка, изучено демпфирование свободных колебаний слоистых конических оболочек в [6].

Применение многослойных оболочек при их рациональном проектировании позволяет обеспечить достижение высокой удельной жесткости и прочности, требуемых звуко- и теплоизоляционных свойств, демпфирующих и вибропоглощающих характеристик. Так, в статье [7] рассматривается тонкая круговая цилиндрическая оболочка, собранная из нечетного числа неоднородных слоев постоянной толщины. Оболочка совершает изгибные свободные колебания или находится под действием сжимающих сил. Ставится оптимизационная задача управления неоднородностью слоев таким образом, чтобы при фиксированной массе оболочки собственные частоты свободных колебаний или критическая сила достигли максимального значения. В [8] собственные частоты укрепленных волокном слоистых цилиндрических оболочек максимизируются относительно ориентации волокна с использованием метода золотого сечения.

Целью данной работы является вывод уравнений движения слоистых композитных оболочек с комплексными коэффициентами, учитывающими вязкоупругие свойства материала, а также наличие поперечных сдвигов. Используется обобщенная кинематическая гипотеза Тимошенко, которая позволяет описать нелинейную зависимость тангенциальных перемещений от поперечной координаты.

Постановка задачи и основные гипотезы

Рассмотрим тонкую круговую цилиндрическую оболочку длиной L , состоящую из N изотропных вязкоупругих слоев, характеризующихся толщиной h_k , модулем Юнга E_k , плотностью ρ_k и коэффициентом Пуассона ν_k , $k = 1, 2, \dots, N$ (рис. 1).

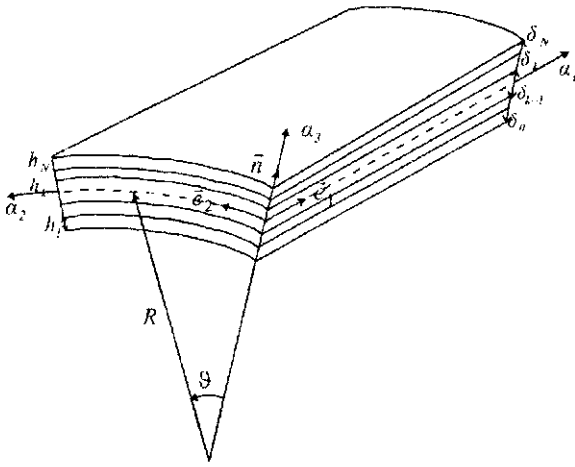


Рис. 1. Система координат в слоистой оболочке

В качестве исходной поверхности примем срединную поверхность какого-либо k -го слоя, которую отнесем к криволинейным ортогональным координатам $\alpha_1 = R s, \alpha_2 = R \vartheta$. Здесь R – радиус цилиндра исходной поверхности, ϑ и s – окружная и продольная координаты соответственно. В общем случае оболочка может быть некруговой с радиусом кривизны $R_2(\alpha_2)$. Пусть δ_k – расстояние между исходной поверхностью и верхней границей k -го слоя; u_i, w – тангенциальные и нормальное перемещения точек исходной поверхности; $u_i^{(k)}$ – тангенциальные перемещения точек k -го слоя; σ_{β} – поперечные касательные напряжения; θ_i – углы поворота нормали \vec{n} к поверхности оболочки вокруг векторов e_i , где $i = 1, 2$.

Будем считать, что выполняются гипотезы теории слоистых оболочек, сформулированные Э.И. Григolloм и Г.М. Куликовым [9].

1. Поперечные касательные напряжения изменяются по толщине k -го слоя оболочки по заданному закону:

$$\sigma_{i3} = f_0(\alpha_3) \mu_i^{(0)}(\alpha_1, \alpha_2) + f_k(\alpha_3) \mu_i^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2),$$

где $f_0(\alpha_3); f_k(\alpha_3)$ – непрерывные функции поперечной координаты α_3 , удовлетворяющие условиям:

$$f_0(\delta_0) = f_0(\delta_N) = 0;$$

$$f_k(\delta_{k-1}) = f_k(\delta_k) = 0;$$

$$f_k(\alpha_3) = 0; \alpha_3 \notin [\delta_{k-1}, \delta_k].$$

2. Нормальные напряжения, действующие на площадках, параллельных исходной поверхности, пренебрежимо малы по сравнению с другими компонентами тензора напряжений.

3. Прогиб не зависит от поперечной координаты α_3 .

4. Тангенциальные перемещения распределены по толщине пакета слоев согласно обобщенной кинематической гипотезе Тимошенко:

$$u_i^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = u_i(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \theta_i(\alpha_1, \alpha_2) + g(\alpha_3) \psi_i(\alpha_1, \alpha_2).$$

Функции $\mu_i^{(0)}, \mu_i^{(k)}, \psi_i$ и $g(\alpha_3)$ определены в монографии [9].

Обобщенная кинематическая гипотеза Тимошенко позволяет описать нелинейную зависимость тангенциальных перемещений от поперечной координаты α_3 .

Здесь, в отличие от классических гипотез Кирхгоффа – Лява, отсутствует требование того, чтобы волокна в процессе деформации оставались перпендикулярными к исходной поверхности.

Вывод уравнения

Предполагая, что колебания сопровождаются образованием большого числа волн малой длины в окружном или осевом направлении, и принимая во внимание принятые выше гипотезы, перемещения запишем в следующем виде [9]:

$$u_i^{(k)} = u_i - \alpha_3 w_i + g(\alpha_3) \psi_i, \quad \varepsilon_{ij} = e_{ij} + \alpha_3 \kappa_{ij} + g(\alpha_3) \psi_{ij}, \quad \varepsilon_{i3} = f_0(\alpha_3) \psi_i, \tag{1}$$

где

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + k_{ij} w, \quad \psi_{ij} = \frac{1}{2}(\psi_{i,j} + \psi_{j,i}), \quad \kappa_{ij} = -w_{ij}, \quad i, j = 1, 2.$$

Здесь дифференцирование относительно координаты α_i обозначено нижним индексом i после запятой.

В теории упругих оболочек уравнения состояния имеют вид [10]:

$$\sigma_{ij} = \frac{E_k}{1-\nu_k^2} \Xi \varepsilon_{ij}; \quad \Xi \varepsilon_{ij} = (1-\nu_k) \varepsilon_{ij} + \nu_k \delta_{ij} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}), \quad (2)$$

где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$

Принимая во внимание вязкоупругие свойства k -го слоя, уравнения (2) могут быть переписаны в виде [11]:

$$\sigma_{ij} = \frac{E_k}{1-\nu_k^2} \Xi J_k(\varepsilon_{ij}), \quad (3)$$

где

$$J_k(z) = z - \int_0^t K_k(t-s)z(s)ds. \quad (4)$$

Здесь $K_k(s)$ – ядро релаксации напряжений материала для k -го слоя.

Пусть ядро $K_k(t)$ удовлетворяет условию затухания памяти:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^0 K_k(T-s)ds = 0,$$

а $z(t)$ – ограниченная в интервале $(-T, 0)$ функция. Тогда оператор (4) может быть переписан в виде [10]:

$$J_k(z) = z - \int_{-\infty}^t K_k(t-s)z(s)ds.$$

Удельные мембранные усилия и изгибающие моменты определяются стандартным способом [9]:

$$T_{ij} = \sum_{k=1}^N \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \sigma_{ij} d\alpha_3, \quad M_{ij} = \sum_{k=1}^N \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \alpha_3 \sigma_{ij} d\alpha_3. \quad (5)$$

В дополнение к классическим силам и моментам изотропной теории оболочек, обобщенные удельные силы Q_i и моменты L_{ij} можно представить следующим образом [9]:

$$Q_i = \sum_{k=1}^N \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} f_0(\alpha_3) \sigma_{i3} d\alpha_3, \quad L_{ij} = \sum_{k=1}^N \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} g(\alpha_3) \sigma_{ij} d\alpha_3. \quad (6)$$

Введение обобщенных сил и моментов вызвано наличием дополнительных степеней свободы, соответствующих поперечным сдвигам в оболочке.

Для исследования свободных колебаний положим

$$(T_{ij}, M_{ij}, L_{ij}, Q_i, \kappa_{ij}, \Psi_{ij}) = e^{i\Omega t} (T'_{ij}, M'_{ij}, L'_{ij}, Q'_i, \kappa'_{ij}, \Psi'_{ij}), \quad (7)$$

где t – время; $\Omega = \omega + i\alpha$; $i = \sqrt{-1}$; ω – фундаментальная частота свободных колебаний; α – декремент колебаний, а любая функция со штрихом не зависит от времени t (далее штрих будет опущен).

Введем дополнительные обозначения:

$$\gamma_k = \frac{E_k h_k \tilde{c}_k}{1-\nu_k^2} \left(\sum_{k=1}^N \frac{E_k h_k \tilde{c}_k}{1-\nu_k^2} \right)^{-1}, \quad \nu = \frac{\nu_k E_k h_k \tilde{c}_k}{1-\nu_k^2} \left(\sum_{k=1}^N \frac{E_k h_k \tilde{c}_k}{1-\nu_k^2} \right)^{-1}, \quad E = \frac{1-\nu^2}{h} \left(\sum_{k=1}^N \frac{E_k h_k \tilde{c}_k}{1-\nu_k^2} \right), \quad h = \sum_{k=1}^N h_k, \quad (8)$$

где

$$\tilde{c}_k = 1 - c_k, \quad c_k = \int_0^{+\infty} K_k(s) e^{-i\Omega s} ds. \quad (9)$$

Можно заметить, что из уравнений (8) следует равенство:

$$\frac{E_k h_k \tilde{c}_k}{1 - \nu_k^2} = \frac{Eh}{1 - \nu^2} \gamma_k. \tag{10}$$

Принимая во внимание уравнения (1), (3), (5) – (7) и (10), получим следующие выражения для усилий и моментов:

$$T_{ij} = \frac{Eh}{1 - \nu^2} \Xi e_{ij} + \frac{Eh^2}{2(1 - \nu^2)} (c_{13} \Xi \kappa_{ij} + c_{12} \Xi \Psi_{ij}); \tag{11}$$

$$M_{ij} = \frac{1}{2} hc_{13} T_{ij} + \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} (\eta_3 \Xi \kappa_{ij} + \eta_2 \Xi \Psi_{ij}); \tag{12}$$

$$L_{ij} = \frac{1}{2} hc_{12} T_{ij} + \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} (\eta_2 \Xi \kappa_{ij} + \eta_1 \Xi \Psi_{ij}); \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} h^3 \pi_{1k} &= \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} g^2(\alpha_3) d\alpha_3, & \frac{1}{12} h^3 \pi_{2k} &= \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} a_3 g(\alpha_3) d\alpha_3, \\ \frac{1}{2} h^2 \pi_{3k} &= \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} g(\alpha_3) d\alpha_3, & h \xi_k &= h_k, \quad h \zeta_k = \delta_k, \quad c_{13} = \sum_{k=1}^N (\zeta_{k+1} + \zeta_k) \gamma_k, \quad c_{12} = \sum_{k=1}^N \xi_k^{-1} \pi_{3k} \gamma_k, \\ \eta_1 &= \sum_{k=1}^N \xi_k^{-1} \pi_{1k} \gamma_k - 3c_{12}^2, & \eta_2 &= \sum_{k=1}^N \xi_k^{-1} \pi_{2k} \gamma_k - 3c_{13} c_{12}, \quad \eta_3 = 4 \sum_{k=1}^N (\xi_k^2 + 3\zeta_{k-1} \zeta_k) \gamma_k - 3c_{13}^2. \end{aligned}$$

Следуя [9], введем обобщенные перемещения \hat{u}_i и деформации \hat{e}_{ij} :

$$e_{ij} = \hat{e}_{ij} - \frac{1}{2} hc_{13} \kappa_{ij} - \frac{1}{2} hc_{12} \Psi_{ij}, \quad u_i = \hat{u}_i - \frac{1}{2} hc_{13} w_i - \frac{1}{2} hc_{12} \psi_i. \tag{14}$$

Тогда уравнение (11) может быть переписано как

$$T_{ij} = \frac{Eh}{1 - \nu^2} \Xi \hat{e}_{ij}.$$

Рассмотрим следующие преобразования [9]:

$$\hat{M}_{ij} = M_{ij} - \frac{1}{2} hc_{13} T_{ij}, \quad \hat{L}_{ij} = L_{ij} - \frac{1}{2} hc_{12} T_{ij}.$$

Тогда, используя (11) – (13), последние соотношения могут быть представлены в виде:

$$\hat{M}_{ij} = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} (\eta_3 \Xi \kappa_{ij} + \eta_2 \Xi \Psi_{ij}), \quad \hat{L}_{ij} = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} (\eta_2 \Xi \kappa_{ij} + \eta_1 \Xi \Psi_{ij}). \tag{15}$$

Уравнение (6) для обобщенных удельных сил может быть переписано как

$$Q_i = G \Psi_i. \tag{16}$$

Здесь

$$\begin{aligned} G &= \frac{\left[\sum_{k=1}^N \left(\lambda_k - \frac{\lambda_{k0}^2}{\lambda_{kk}} \right) \right]^2}{\sum_{k=1}^N \left(\lambda_k - \frac{\lambda_{k0}^2}{\lambda_{kk}} \right) \tilde{G}_k^{-1}} + \sum_{k=1}^N \frac{\lambda_{k0}^2}{\lambda_{kk}} \tilde{G}_k; \\ \lambda_k &= \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} f_n^2(\alpha_3) d\alpha_3, \quad \lambda_{kn} = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} f_k(\alpha_3) f_n(\alpha_3) d\alpha_3 \quad (n = 0, k); \end{aligned}$$

$$\tilde{G}_k = G_k \tilde{e}_k,$$

где $G_k = E_k / [2(1 + \nu_k)]$ является модулем сдвига k -го слоя.

Для вывода уравнений свободных колебаний воспользуемся принципом Гамильтона:

$$\int_0^{l_2} (\delta U - \delta T) dt = 0, \tag{17}$$

где $\delta U, \delta T$ являются вариациями потенциальной и кинетической энергий соответственно. Выполняя обычную процедуру вычисления вариаций в (17), можно получить уравнения в терминах удельных напряжений и приведенных моментов. Необходимо заметить, что эти уравнения имеют такой же вид, что и уравнения для слоистых упругих оболочек и для однослойных вязкоупругих оболочек. После исключения нелинейных слагаемых и сил инерции, соответствующих касательным смещениям, уравнения примут вид:

$$T_{1i,1} + T_{2i,2} = 0, \tag{18}$$

$$\hat{L}_{1i,1} + \hat{L}_{2i,2} = Q_i, \quad i = 1, 2, \tag{19}$$

$$\hat{M}_{11,11} + 2\hat{M}_{12,12} + \hat{M}_{22,22} - \frac{1}{R_2(\alpha_2)} T_{22} + \Omega^2 \left(\sum_{k=1}^N \rho_k h_k \right) w = 0, \tag{20}$$

а граничные условия

$$w = \hat{M}_{11} = \hat{L}_{11} = \psi_2 = 0,$$

$$w = w_1 = \psi_1 = \psi_2 = 0$$

для свободно опертого и защемленного краев $\alpha_1 = 0, L$ соответственно.

Используя выражения (1) и (14), получим уравнение:

$$\hat{e}_{11,22} - 2\hat{e}_{12,12} + \hat{e}_{22,11} = R_2^{-1} w_{11}. \tag{21}$$

Представим силовую функцию F таким образом, чтобы

$$T_{ij} = \delta_{ij} \Delta F - F_{,ij}, \tag{22}$$

где $\Delta = \partial^2 / \partial \alpha_1^2 + \partial^2 / \partial \alpha_2^2$ – оператор Лапласа. Тогда уравнения (18) будут удовлетворены тождественно.

Выражая обобщенные деформации \hat{e}_{ij} посредством силовой функции и подставив их в уравнение (21), получим

$$\Delta \Delta F = EhR_2^{-1} w_{11}. \tag{23}$$

Представим функции ψ_1, ψ_2 в виде

$$\psi_1 = a_{,1} + \varphi_{,2}, \quad \psi_2 = a_{,2} + \varphi_{,1}. \tag{24}$$

Тогда, принимая во внимание (1), (15), (16), уравнения (18) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \Delta(\eta_1 a - \eta_2 w)_{,1} + \frac{Eh^3}{24(1+\nu)} \eta_1 (\Delta \varphi)_{,2} &= G(a_{,1} + \varphi_{,2}), \\ \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \Delta(\eta_1 a - \eta_2 w)_{,2} - \frac{Eh^3}{24(1+\nu)} \eta_1 (\Delta \varphi)_{,1} &= G(a_{,2} - \varphi_{,1}). \end{aligned}$$

Данные уравнения могут быть тождественно удовлетворены, если принять

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \Delta(\eta_1 a - \eta_2 w) = G\varphi, \quad \frac{Eh^3}{24(1+\nu)} \eta_1 \Delta \varphi = G\varphi. \tag{25}$$

Следуя [9] введем функции χ и a следующим образом:

$$w = \left(1 - \frac{h^2}{\beta} \Delta\right) \chi, \quad a = -\frac{\eta_2}{\eta_1} \frac{h^2}{\beta} \Delta \chi. \quad (26)$$

Можно заметить, что первое уравнение в (25) удовлетворяется тождественно, если принять

$$\beta = \frac{12(1-v^2)G}{Eh\eta_1}.$$

Тогда второе уравнение в (25) примет вид:

$$\frac{1-v}{2} \frac{h^2}{\beta} \Delta \varphi = \varphi. \quad (27)$$

Наконец, заменяя приведенные моменты в уравнении (20), с учетом (1), (22), (24), (26), получаем дифференциальное уравнение:

$$D \left(1 - \frac{\theta h^2}{\beta} \Delta\right) \Delta \Delta \chi + R 2_2^{-1} F_{,11} - \Omega^2 \rho_0 h w = 0, \quad (28)$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-v^2)} \eta_3, \quad \theta = 1 - \frac{\eta_2^2}{\eta_1 \eta_3}, \quad \rho_0 = \sum_{k=1}^N \rho_k \xi_k.$$

Полученная система дифференциальных уравнений (23), (26) – (28) с комплексными коэффициентами описывает свободные колебания тонких слоистых оболочек и учитывает вязкоупругие свойства слоев.

Граничные условия для края $\alpha_1 = 0, L$ получены из процедуры вычисления вариаций в (17). Несколько вариантов граничных условий были получены в [9]. Рассмотрим здесь два вида граничных условий:

$$\chi = \Delta \chi - \Delta^2 \chi = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} = 0,$$

$$\left(1 - \frac{h^2}{\beta} \Delta\right) \chi = \frac{\partial \chi}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (\Delta \chi) = \varphi = 0$$

для свободно опертого и жестко защемленного края соответственно.

Напряженно-деформированное состояние оболочки часто представляет собой сумму основного напряженного состояния и краевых эффектов. Первое из них распространяется на всю оболочку, а вторые имеют местный характер и локализуются вблизи краев оболочки. Уравнение (27) имеет решение типа краевого эффекта. Для того чтобы изучить основное напряженное состояние, уравнение (27) может быть опущено. В этом случае система уравнений может быть сведена к системе вида:

$$\Delta^2 F - \frac{Eh}{R} \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_1^2} = 0, \quad W = \left(1 - \frac{h^2}{\beta} \Delta\right) \chi,$$

$$\frac{Eh^3 \eta_3}{12(1-v^2)} \left(1 - \frac{\theta h^2}{\beta} \Delta\right) \Delta^2 \chi + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_1^2} - \rho h \Omega^2 W = 0. \quad (29)$$

В качестве граничных условий на краях рассмотрим условия шарнирного опирания:

$$F = \Delta F = \chi = \Delta \chi = \Delta^2 \chi = 0 \quad \text{при} \quad \alpha_1 = 0, L. \quad (30)$$

Решение системы (29) с граничными условиями (30) может быть найдено в виде:

$$(\chi, F) = (\chi_0, F_0) \sin \frac{\pi n \alpha_1}{L} \sin \frac{m \alpha_2}{R}, \quad (31)$$

где m – число волн в окружном направлении; n – число волн в осевом направлении.

Подставляя (31) в уравнения (29), получаем систему однородных линейных алгебраических уравнений относительно F_0 и χ_0 . Из условия существования нетривиального решения этой системы находим выражение для комплексной частоты свободных колебаний Ω^2 :

$$\Omega^2 = \frac{E}{\rho R^2} \left\{ \pi^4 \varepsilon^4 \Delta_{nm}^2 \frac{1 + K\theta \Delta_{nm}}{1 + K\Delta_{nm}} + \frac{n^4}{l^4 \Delta_{nm}^2} \right\}, \tag{32}$$

где

$$l = \frac{L}{R}, \quad \varepsilon^4 = \frac{h^2 \eta_3}{12R^2(1 - \nu^2)}, \quad \Delta_{nm} = \left[\frac{n^2}{l^2} + \frac{m^2}{\pi^2} \right].$$

Отделяя в (32) вещественную и мнимую части, находим собственную частоту колебаний $\omega = \text{Re}\Omega$ и соответствующий ей декремент $\alpha = \text{Im}\Omega$ как функции натуральных чисел n и m .

Примеры

В качестве первого примера рассмотрим тонкую трехслойную цилиндрическую оболочку радиуса $R = 0,15$ м и длиной $L = 0,45$ м. Слои оболочки расположены симметрично относительно средней линии. Первый и третий слои имеют одинаковую толщину $h_1 = h_3$ и изготовлены из керамики с модулем Юнга $E_1 = E_3 = 1,52 \cdot 10^{12}$ Па, плотностью $\rho_1 = \rho_3 = 2510$ кг/м³ и числом Пуассона $\nu_1 = \nu_3 = 0,3$. Межслойный наполнитель изготовлен из флуоропластика с $E_2 = 2,34 \cdot 10^8$ Па, $\rho_2 = 2150$ кг/м³, $\nu_2 = 0,3$.

Будем считать здесь, что первый и третий (керамические) слои подчиняются закону упругих деформаций, а межслойный наполнитель – закону вязкоупругих деформаций. Тогда $K_1 = K_3 \equiv 0$, а ядро скорости релаксации напряжений для флуоропластика [12]

$$K_2 = 0,02366 e^{-3,33 \cdot 10^{-4} t} t^{-0,95}. \tag{33}$$

Выполняя преобразование Лапласа функции K_2 , находим коэффициент (9):

$$c_2 = \frac{0,02366 \Gamma(0,05)}{(i\omega - \alpha + 3,33 \cdot 10^{-4})^{0,05}}, \tag{34}$$

где $\Gamma(x)$ – Гамма-функция.

Были выполнены расчеты по оценке влияния толщины межслойного наполнителя h_2 на собственные частоты ω и декремент колебаний α при $n = 1$, $h_1 = h_3 = 0,00015$ м и различных значениях m .

На рисунках 2, 3 представлены графики параметров ω и α как функций относительной толщины наполнителя h_2/h , где $h = h_1 + h_2 + h_3$. Цифрами 1, 2, 3, 4 отмечены кривые, отвечающие волновым числам $m = 1, 2, 7, 5$ соответственно.

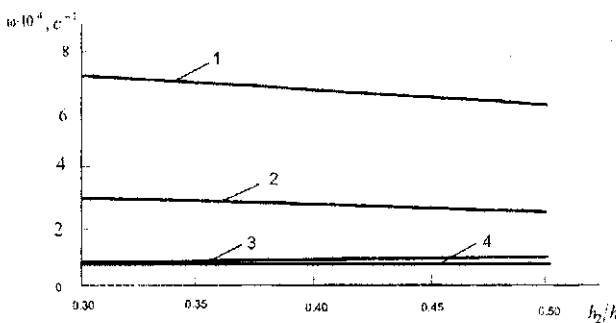


Рис. 2. Собственная частота колебаний

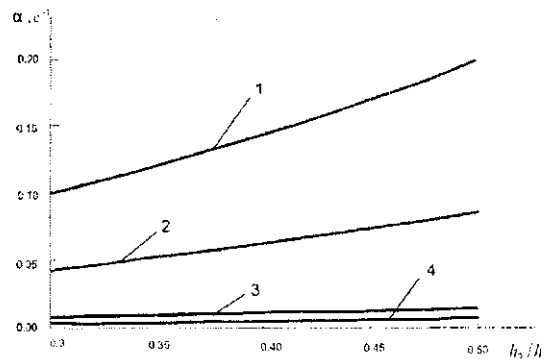


Рис. 3. Декремент колебаний

Как видно из рисунков, для рассматриваемых параметров оболочки, наименьшая частота колебаний соответствует числу $m = 5$ волн в окружном направлении и одной полуволне $n = 1$ в осевом направлении.

Как и ожидалось, увеличение толщины заполнителя приводит к росту декремента колебаний α , однако данная зависимость $\alpha(h_2/h)$ становится слабой при больших числах $m \geq 3$. В рассмотренном диапазоне изменения $0 < h_2/h \leq 0,5$ собственная частота ω убывает с ростом h_2 при малых m ($m = 1, 2$) и возрастает при $m \geq 3$. Данное обстоятельство позволяет путем варьирования толщины заполнителя решать задачу оптимального проектирования оболочки, заключающуюся в максимизации нижнего спектра частот колебаний с одновременным увеличением декремента колебаний.

Рассмотрим далее трехслойную цилиндрическую оболочку, имеющую такие же составляющие, как и в первом примере.

Пусть выполняется условие:

$$h_1 = h_3 = F(h_2) = h_1^0 - \frac{1}{2} \frac{\rho_2}{\rho_1} h_2, \quad (35)$$

где $h_1^0 = 0,0005$ м, $0 \leq h_2 \leq 2h_1^0 \frac{\rho_1}{\rho_2} = \tilde{h}_2$.

Тогда для любых $h_1 = h_3$, удовлетворяющих (35), вес оболочки будет постоянным. Считаем, что $\omega = \omega(h_1, h_2, h_3, m, n)$ при постоянстве всех остальных параметров. Поставим минимаксную задачу:

$$\omega^* = \omega(h_1^*, h_2^*, h_3^*, m^*, n^*) = \max_{0 \leq h_2 \leq \tilde{h}_2} \left\{ \min_{m,n} \omega[F(h_2), h_2, m, n] \right\}. \quad (36)$$

На рисунке 4 показан график функции $\omega_F = \omega_F(h_2) = \min_{m,n} \omega[F(h_2), h_2, m, n]$, позволяющий определить оптимальную толщину h_2^* заполнителя, при которой решается поставленная задача (36).

Кривая на рисунке 5 показывает зависимость соответствующего декремента колебаний α_F от параметра h_2 . Видно, что для рассматриваемых параметров задачи $h_2^* \approx 2 \cdot 10^{-4}$ м, для которой $\omega^* \approx 1,11 \cdot 10^4$ с⁻¹.

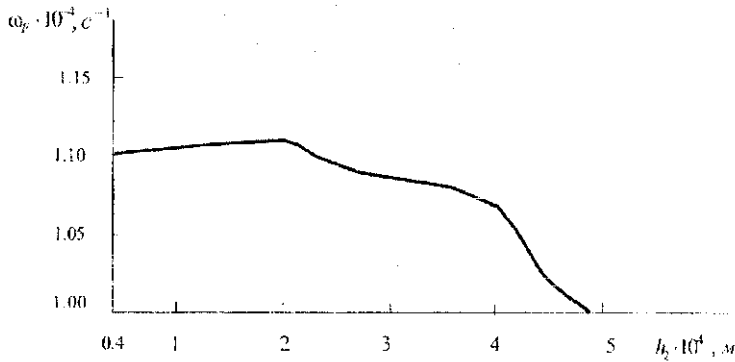


Рис. 4. Наименьшая собственная частота колебаний как функция параметра h_2 при постоянном весе оболочки

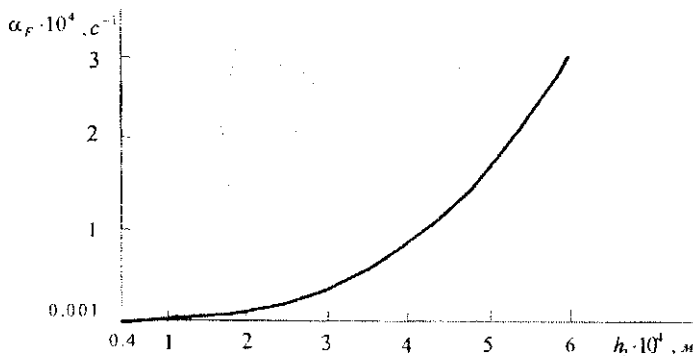


Рис. 5. Декремент колебаний как функция параметра h_2 при постоянном весе оболочки

Выводы

В работе выведены уравнения движения (29) слоистых композитных оболочек с комплексными коэффициентами, учитывающими вязкоупругие свойства материала, а также наличие поперечных сдвигов.

Полученная в явном виде формула (32) позволяет решить задачу оптимального проектирования многослойной оболочки с вязкоупругим наполнителем по наилучшему гашению низкочастотных колебаний с увеличением наименьшей частоты путем оптимального выбора толщины межслойных наполнителей.

Результаты работы могут быть использованы при проектировании тонкостенных элементов машин, а также габаритных тонкостенных инженерных сооружений в промышленном строительстве, летательных аппаратов и подводных тонкостенных объектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ботогова М.Г., Михасев Г.И. Свободные колебания вязкоупругой некруговой цилиндрической оболочки под действием однородной осевой нагрузки // Прикладная механика. - 1999. - № 11. - С. 68 - 74.
2. Singh S.P., Gupta K. Damped free vibrations of layered composite cylindrical shells // J. Sound and Vibr. - 1994.-№2.-С. 191 -209.
3. Haiming Zhou, Mohan D. Rao. Damping of composite tubes with embedded viscoelastic layers // Journal of Vibration and Acoustics. - 1996. - Voi. 118. - С. 384 389.
4. Старовойтов Э.И., Яровая А.В. Осесимметричные колебания круглой линейно-вязкоупругой трехслойной пластинки // Динамические и технологические проблемы механических конструкций и сплошных сред: Материалы 5 Между нар. симпозиума, - Ярополец, 1999. - С. 128 - 133.
5. Ramech TC., Ganesan N. Vibration and damping analysis of conical shells with constrained damping treatment // Finite Elements in Analysis and Design. - 1993, - № 12. - С. 17-29.
6. Korjakin R., Chate A., Altenbach H, Analysis of free damped vibrations of laminated composite conical shells // Composite Structures. - 1998, - № 41. - С. 39 - 47.
7. Саркисян В.С., Джулакян Г.М., Григорян К.А. Оптимальное проектирование слоистых цилиндрических оболочек // Механика неоднородных структур: Тез. докл. 3 Всесоюзн. конф. - Львов, 1991. - С. 299.
8. Hu H.-T., Tsai J.-Y. Maximization of the fundamental frequencies of laminated cylindrical shells with respect to fiber orientations // J. Sound and Vibr. - 1999. - № 4. - С. 723 - 740.
9. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин. - М.: Машиностроение, 1988. - 287 с.
10. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. - М.: Наука, 1979. - 744 с.
11. Матяш В.И. Колебания изотропных упруговязких оболочек // Механика полимеров. - 1971. - №1.- С. 157- 163.
12. Старовойтов Э.И., Яровая А.В., Леоненко Д.В. Локальные и импульсные нагружения трехслойных элементов конструкций. - Гомель: БелГУТ, 2003. - 367 с.