УДК 001.573:696.2

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТОКОРАСПРЕДЕЛЕНИЙ В ГАЗОВЫХ СЕТЯХ НИЗКОГО ДАВЛЕНИЯ

А.В. БУЛАХ
(Полоцкий государственный университет)

Рассмотрена математическая модель установившегося потокораспределения в газовых сетях низкого давлении. Представлены методы расчета потокораспределений в газовых сетях низкого давления, пригодных для реализации на ЭВМ (в среде MATHCAD). Показана экономическая эффективность метода, позволяющая снизить затраты на проектирование, а также снизить металловложения в сеть, что в итоге приведет в целом к снижению капиталовложения заказчика проекта.

1. Матричные способы задания инженерных газовых сетей

Инженерную газовую сеть низкого давления (ГНД) условного населенного пункта можно рассматривать как ориентированный граф (орграф) [1, 2]. Вершины графа будем называть узлами сети, дуги – участками. Множество участков, ограничивающих некоторую фигуру, называют *кольцом*. Предполагается, что указанная фигура не пересекается никакими другими участками.

Обычно рассматриваются газовые сети, для которых уже известны взаимное расположение узлов, участков, колец (граф-схема сети), длины всех участков, размеры площадей, подлежащих газификации, общий расход газа. Неизвестными являются диаметры труб, расходы газа и перепады давления на каждом участке, причем диаметры труб должны быть выбраны из стандартного набора.

Первым этапом задания и расчета ГНД является установление ориентации граф-схемы газовой сети. Для разветвленных тупиковых газовых сетей это делается естественным образом, т.е. участки ориентируются от пункта питания в направлении концевых точек. В случае закольцованных газовых сетей определяем точки схода и интуитивно задаем пути снабжения газом этих точек (обычно по кратчайшему расстоянию). Затем устанавливаем направления газовых потоков на остальных участках. В результате граф-схема сети станет орграфом.

Второй этап – упорядочение узлов и участков полученного орграфа. Нумерацию узлов и участков производят произвольным образом. Для удобства расчета закольцованных ГНД *точки схода и оканчивающиеся в них участки желательно нумеровать последними порядковыми номерами*. Отдельно цифрами 1, 2, …, n нумеруются точки схода и кольца. Номера других газифицируемых площадей должны быть продолжением номеров колец.

При производстве расчетов на ЭВМ (предполагается, что все расчеты будут производиться в среде MATHCAD [3]) граф-схему сети следует задать числами. Основной аналитический способ задания графа – матричный. Введем несколько матриц, определяющих структуру и свойства ГНД:

а) матрица соответствия между участками, их длинами, а также начальными и конечными узлами. Будем обозначать эту матрицу символом MS. 1-я строка матрицы MS содержит номера участков, т.е. состоит из чисел 1, 2, …, n. 2-я и 3-я строки содержат номера начального и конечного узлов соответствующих участков. 4-я строка состоит из длин участков;

б) матрица инциденций (матрица A) определяется следующим образом. Строки матрицы A соответствуют узлам, столбцы – участкам, т.е. размеры матрицы A равны $m \times n$, где m – количество узлов, n – количество участков; если i-й узел является началом j-го участка (i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n), то $A_{i,j} = -1$; если i-й узел является концом j-го участка, то $A_{i,j} = 1$; все остальные элементы матрицы A равны нулю.

Если матрица MS уже введена, то матрица A строится с помощью следующей последовательности операторов MATHCAD:

$$A_{i,j} = 0 \quad A_{MS_{2,j},MS_{1,j}} := -1 \quad A_{MS_{3,j},MS_{1,j}} := 1;$$

в) матрица соответствия между путями, идущими в точки схода (конечные точки), и участками (матрица TS). Эта матрица имеет размеры $SX \times n$, где SX – количество точек схода. Строки матрицы TS соответствуют конечным точкам. Ранее отмечалось, что эти точки нумеруются отдельно от 1 до SX. Для обозначения конечных точек (и строк матрицы TS) вводим индекс sx (sx = 1, 2, ..., SX). Если j-й участок является частью пути из узла 1 в конечную точку с номером sx, то $TS_{sx,j} = 1$. Остальные элементы матрицы TS равны нулю. Для ввода матрицы TS на лист вычислений среды MATHCAD сначала обнуляются все элементы: $TS_{sx,j}$: = 0. Просматривая каждый путь в конечную точку, вводим ненулевые элементы матрицы TS. Если, например, участок с номером 15 является частью пути, идущего в конечную точку с номером 3, то $TS_{3,15}$: = 1;

г) для закольцованных сетей вводится матрица C, которую назовем *матрицей колец*. Матрица C имеет размеры $K\times n$, где K – количество колец. Если j-й участок ограничивает k-е кольцо (k = 1, 2,..., K; j = 1, 2, ..., n) и его направление при обходе кольца по контуру совпадает с направлением часовой стрелки, то $C_{k,j}$ = 1. Если же направление j-го участка, ограничивающего k-е кольцо, противоположно направлению часовой стрелки, то $C_{k,j}$ = –1. Остальные элементы матрицы C равны нулю. Ввод матрицы C на лист вычислений среды MATHCAD производится точно таким же образом, как и матрицы TS;

д) *матрица газифицируемых площадей* (матрица B). Матрица B имеет размеры $S\times n$, где S – количество площадей, т.е. строки B соответствуют газифицируемым площадям, столбцы – участкам. Если j-й участок ограничивает s-ю площадь (s = 1, 2, ..., S; j = 1, 2, ..., n), то $B_{s,j}$ = 1. Остальные элементы матрицы B равны нулю. Отметим, что кольца входят в состав газифицируемых площадей с номерами s = 1, 2, ..., K, причем $B_{s,j} = |C_{s,j}|$ при s = 1, 2, ..., K; j = 1, 2, ..., n. Площадям, лежащим вне колец, присваивают номера: K+1, K+2, ... S.

2. Определение путевых и узловых расходов ГНД

При расчете газовых сетей используются матрицы MS, TS, C, B, вектор длин участков $l = (l_1, l_2,..., l_n)$, вектор сосредоточенных расходов в каждом узле $VS = (VS_1, VS_2, ..., VS_m)$, вектор удельных путевых расходов по участкам $q = (q_1, q_2, ..., q_n)$, вектор площадей $F = (F_1, F_2, ..., F_S)$. Вместо вектора q могут быть заданы другие данные, с помощью которых этот вектор можно рассчитать (например, по методикам, изложенным в [2, 4]). Матрицы C, B и вектор F используются только для расчета кольцевых газовых сетей.

Ниже символом i обозначается номер узла (i = 1, 2, ... m), символом j – номер участка (j = 1, 2, ... n), символом sx – номер конечной точки (sx = 1, 2, ... SX). Здесь m, n и SX – количество узлов, участков и конечных точек соответственно. Для закольцованных ГНД дополнительно символами k (k = 1, 2, ... K) и s (s = 1, 2, ... S) обозначаем номера колец и газифицируемых площадей, где K и S – количества колец и газифицируемых площадей. Напомним, что номер площади, являющейся кольцом, совпадает с номером кольца, а номера площадей, лежащих вне колец, являются продолжением номеров колец.

Путевые расходы находим по формуле:

$$VP_j = q_j l_j. \tag{1}$$

При упрощенной схеме нахождения узловых расходов половина путевого расхода на участке остается в начальном узле, а вторая половина расходуется в конечном. В некоторых случаях эта схема приводит к заниженным значениям расчетных расходов. В таких случаях узловые расходы рекомендуется вычислять следующим образом: 0,45 путевого расхода реализуется в начальном узле каждого участка и 0,55 – в конечном. Для удобства расчетов в среде MATHCAD введем матрицу M:

- для упрощенной схемы определения узловых расходов:

$$M_{i,j} := if(A_{i,j} = -1;\ 0{,}5;\ 0{,}5A_{i,j})\ ; \tag{2}$$

- для более точной схемы:

$$M_{i,j} := if(A_{i,j} = -1;\ 0{,}45;\ 0{,}55A_{i,j})\ . \tag{3}$$

Тогда вектор узловых расходов

$$VY := M\cdot VP + VS. \tag{4}$$

3. Определение расчетных расходов

Расчетные расходы можно определить из уравнений равновесия узлов, соответствующих 1-му закону Кирхгофа. Согласно этим уравнениям алгебраическая сумма расходов во всех участках, примыкающих к каждому узлу, равна нулю. При этом входящим расходам приписывается знак «плюс», а выходящим – знак «минус». В последнем узле значения расходов повторяются из предыдущих узлов. Поэтому общее количество уравнений равно m – 1. Первый закон Кирхгофа можно записать в виде системы линейных уравнений:

$$A0\cdot V = B0, \tag{5}$$

где матрица $A0$ получена из A выбрасыванием одной строки (например, последней). Если ГРП подключен к узлу с номером 1, то вектор $B0$ определяется соотношениями: $B0_1 = VY_1 - Q$, $B0_i = VY_i$ (i = 2, 3, ..., n).

Для тупиковых разветвленных ГНД число уравнений системы (5) совпадает с числом неизвестных расходов, и решить ее можно, например, матричным способом:

$$V = A0^{-1} \cdot B0. \tag{6}$$

В случае закольцованных ГНД исследование и решение системы (5) значительно сложнее. Для удобства дальнейших рассуждений введем несколько дополнительных понятий. *Точками встречи* будем называть узлы, в которых оканчивается не менее двух участков. Сами участки, имеющие общие концевые точки, будем называть *встречными*. Количество точек встречи обозначим mVS, а количество встречных участков – nVS. В частности, точки схода, в которых оканчивается не менее двух участков, являются точками встречи. Методом математической индукции легко доказывается следующее утверждение.

Теорема 1

Число колец равно числу встречных участков минус число точек встречи, т.е. $K = nVS - mVS$.

Замечание

В большинстве случаев в точках встречи сходится два участка, что и будет предполагаться далее. При этом $nVS = 2mVS$, число колец равно числу точек встречи.

Ранг системы (10) равен $m - 1$. Для участков, оканчивающихся точками схода (их количество обозначим символом nSX), расчетные расходы известны. Они равны половинам (или 0,55) путевых расходов. Тогда в системе (10) остается $m - SX$ уравнений и $n - nSX$ неизвестных. Так как ранг оставшейся системы равен $r = m - SX - 1$, то эта система имеет $nS = n - nSX - m + SX + 1$ свободных неизвестных и r базисных. С учетом формулы Эйлера $n = m + K - 1$ и теоремы 1 количество свободных неизвестных $nS = nVS + SX - (nSX + mVS)$. Если в полученной формуле сократить число точек схода, которые оканчиваются одним участком с числом этих участков, то количество свободных неизвестных

$$nS = NVS - MVS, \tag{7}$$

где MVS – количество точек встречи, не являющихся точками схода, а NVS – количество участков, сходящихся в этих точках.

Формула (7) означает, что количество свободных неизвестных совпадает с числом колец, не содержащих точек схода. Ниже будет показано, что в качестве таких неизвестных удобно выбирать расходы на встречных участках (будем называть их *свободными участками*), т.е. из двух встречных участков один выбирается свободным. При этом желательно, чтобы каждое кольцо, не содержащее точек схода, ограничивалось хотя бы одним свободным участком.

Можно считать, что точки схода и оканчивающиеся в них участки имеют последние порядковые номера, а оставшиеся точки встречи и свободные участки – предпоследние. Тогда систему уравнений для оставшихся неизвестных расходов $V_1, V_2, \ldots, V_r$ можно получить следующим образом. Предварительно положим $V_j = 0$ ($j = 1, 2, \ldots, r$). В последующих рассуждениях будем предполагать, что матрица M определяется формулой (2). Тогда на участках, оканчивающихся точками схода, расходы полагаем равными половинам путевых расходов, т.е.

$$V_j = 0{,}5VP_j (j = r + nS + 1, r + nS + 2, \ldots, n). \tag{8}$$

Для оставшихся свободных участков расходы определяем по формуле:

$$V_j = 0{,}5VP_j + kt_j VT_j \ (0 \le kt_j \le 1), \tag{9}$$

где VT_j – максимально возможный транзитный расход через свободный участок с номером j ($j = r + 1$; $r + 2, \ldots, r + nS$). Для начала полагаем $kt_j = 0{,}5$. Вводим матрицу $a0$ и вектор $b0$:

$$a0_{i1,j1} = A_{i1,j1}, \quad b0_{i1} = (B0 - A0 \cdot V)_{i1}, (i1 = 1, 2, \ldots, r; j1 = 1, 2, \ldots, r).$$

Искомая система и ее решение:

$$a0 \cdot U = b0 \ \Rightarrow \ U = a0^{-1} \cdot b0, \quad V_{j1} = U_{j1}. \tag{10}$$

Из соотношений (9) следует, что расходы на свободных участках можно регулировать в известных пределах (от $0{,}5VP_j$ до $0{,}5VP_j + VT_j$).

Таким образом, расходы на всех участках становятся известными:

- для разветвленных тупиковых ГНД они определяются однозначно формулой (6);
- для кольцевых ГНД расходы задаются формулами (8) ...(10).

4. Определение потерь давлений и диаметров труб участков по минимуму материальных вложений

Для нахождения перепадов давления на участках и их диаметров применим метод минимизации материальных вложений. Материальные вложения в каждый участок можно считать пропорциональными диаметру участка и его длине. Тогда целевая функция задачи минимизации материальных вложений в газовую сеть имеет вид:

$$F = \sum_{j=1}^{n} l_j d_j .$$

Перепады давлений, диаметры труб и расходы на участках связаны между собой формулой гидравлических потерь [2, 4], из которой диаметры можно выразить через расходы и потери давлений:

$$p_j = a \cdot \frac{V_j^{1,75}}{d_j^{4,75}} \cdot l_j \Rightarrow d_j = \left(\frac{a l_j}{p_j}\right)^{\alpha} V_j^{\beta} (\alpha = \frac{1}{4,75},\ \beta = \frac{1,75}{4,75}), \qquad (11)$$

где коэффициент a зависит от используемого газа (например, для метана $a = 2{,}02$; для природного газа плотностью 0,73 кг/м^3 $a = 2{,}06$). Тогда задачу минимизации материальных вложений можно записать в виде

$$F(p) = \sum_j \left(\frac{l_j}{p_j}\right)^{\alpha} V_j^{\beta} l_j \to min \qquad (12)$$

при условиях

$$TS \cdot p \le P_{max},\ C \cdot p = 0,\ p > 0. \qquad (13)$$

Неизвестными в этой задаче становятся перепады давлений p_j. Первое из условий (13) – условие технологичности, означающее, что перепад давления на пути от ГРП до каждой конечной точки не должен превышать предельно допустимого перепада P_{max} (обычно P_{max} = 100 или 120 даПа). Второе условие применяется только для закольцованных ГНД и означает выполнимость второго закона Кирхгофа. Третье условие означает, что направления участков зафиксированы.

Задача (12), (13) совместно с условиями (11) является задачей на условный экстремум для функции нескольких переменных. В [2] эта задача решается методом неопределенных множителей Лагранжа. По этому методу нахождение оптимального решения сводится к решению нелинейной системы алгебраических уравнений. В современных условиях более целесообразно воспользоваться разработанными методами решения задач (12), (13). Например, в среде MATHCAD эта задача решается при помощи следующей последовательности операторов:

$$F(p) = \sum_j \left(\frac{l_j}{p_j}\right)^{1+\alpha} \cdot V_j^{\beta} \qquad p_j := 5 .$$

Given

$$TS \cdot p \le P_{max}, \qquad p > 0 \qquad po := Minimize(F, p)$$

Оптимальным решением будет вектор po.

После решения задачи по формуле, имеющей вид:

$$d_j = \left(\frac{a l_j}{po_j}\right)^{\alpha} \cdot V_j^{\beta},$$

находим диаметры труб d_j на каждом участке. Найденные диаметры заменяем на близкие по размерам стандартные диаметры D_j. По диаметрам D_j вычисляем перепады давлений ps_j по первой из формул (11):

$$ps_j = a \cdot \frac{V_j^{1,75}}{D_j^{4,75}} \cdot l_j .$$

В случае тупиковых разветвленных ГНД далее производим проверку условий технологичности с помощью оператора $TS\cdot ps =$. При невыполнении этого условия на каких-либо путях, некоторые из стандартных диаметров на этих путях следует заменить на диаметры большего размера.

Для закольцованных ГНД дополнительно производится проверка выполнения 2-го закона Кирхгофа, которую можно сделать с помощью оператора $C\cdot ps =$. Допускается 10-ти процентное отклонение от выполнения 2-го закона Кирхгофа, т.е. для каждого кольца алгебраическая сумма перепадов давлений, деленная на сумму их абсолютных величин по модулю не должна превышать 0,1.

В среде MATHCAD такую проверку можно осуществить с помощью операторов:

$$KIR_k := \frac{(C\cdot ps)_k}{\left(\sum_j \left|C_{k,j}\right|\cdot \left|ps_j\right|\right)}\cdot 100\% \quad (KIR)^T = . \tag{14}$$

Примеры показывают, что в большинстве случаев выражение (14) для многих колец превышает по модулю 10 %.

Корректировкой расходов (9) можно добиться выполнения 2-го закона Кирхгофа в кольцах, ограниченных свободными участками. Пусть для k-го кольца выражение (9) превышает по модулю 10 %. Для определенности предположим, что свободный участок k-го кольца направлен по часовой стрелке. Если $KIR_k < 0$, то расход по свободному участку нужно увеличить. Если же $KIR_k > 0$, то расход по свободному участку следует уменьшить. После изменения коэффициентов kt_j в (19) производится пересчет расходов по формуле (10), решается задача (12)...(13) и вычисляется выражение (14). Величина изменения коэффициентов kt_j определяется опытным путем, т.е. многократным повторением указанной процедуры. При невозможности дальнейшего увеличения (уменьшения) расхода свободного участка следует изменить диаметр этого участка. Так как коэффициенты kt_j можно изменять непрерывно, то в результате для колец, ограниченных свободными участками, 2-й закон Кирхгофа (с ошибкой не более 10 %) будет выполнен.

Для остальных колец выполнения 2-го закона Кирхгофа добиваются изменением диаметров участков, оканчивающихся точками схода. *Нельзя дать полной гарантии того, что во всех случаях этого можно добиться* (в связи с дискретностью набора стандартных диаметров). В частном случае, когда все точки схода являются тупиковыми (в них оканчивается лишь один участок), корректировкой свободных расходов всегда можно добиться выполнения 2-го закона Кирхгофа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Евдокимов А.А., Дубровский В.В., Тевяшев А.Д. Потокораспределение в инженерных сетях. – М.: Стройиздат, 1979. – 200 с.
2. Левин А.М. Проектирование газовых сетей городов и населенных пунктов. – Новополоцк: ПГУ, 1996. – 48 с.
3. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. Mathcad 12. – М.: NT Press, 2005. – 345 с.
4. Ионин А.А. Газоснабжение. – М.: Стройиздат, 1989. – 440 с.